Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 10. November 2016

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Frage

Frage:
Ist der Äquivalenzklassenautomat zu einem deterministischen endlichen Automaten schon der äquivalente Automat mit der minimalen Anzahl von Zuständen?

Frage

Frage:
Ist der Äquivalenzklassenautomat zu einem deterministischen endlichen Automaten schon der äquivalente Automat mit der minimalen Anzahl von Zuständen?

Antwort:
Ja, wir zeigen dies wie folgt:

- Zuerst konstruieren wir den minimalen Automaten zur Sprache L (Automat der Nerode-Relation)
- Anschließend zeigen wir, dass $\mathcal{A}^{\equiv}$ höchstens soviele Zustände hat wie der Automat der Nerode-Relation.

Definitionen: Rechtsinvarianz und Index

Definition (Rechtsinvarianz und Index):
Eine Äquivalenzrelation R über Σ^* heißt **rechtsinvariant**, wenn

für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt: falls $x \; R \; y$ so gilt auch $xz \; R \; yz$ für alle $z \in \Sigma^*$.

Den **Index** von R bezeichnen wir mit **ind(R)**; er ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von Σ^* bezüglich R.

Nerode-Relation

Definition (Nerode-Relationen):
Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist die **Nerode–Relation** R_L definiert durch: für $x, y \in \Sigma^*$ ist $x \; R_L \; y$ genau dann wenn $(xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ für alle $z \in \Sigma^*$ gilt.

Die Nerode–Relation R_L zu einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \; R_L \; y &\Rightarrow (xw \in L \Leftrightarrow yw \in L) \text{ für alle } w \in \Sigma^* \\ &\Rightarrow (xzw \in L \Leftrightarrow yzw \in L) \text{ für alle } w, \; z \in \Sigma^* \\ &\Rightarrow (xz \; R_L \; yz) \text{ für alle } z \in \Sigma^*. \end{aligned}$$

Satz von Nerode

Satz (von Nerode):
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt bzw. akzeptiert.
2. L ist die Vereinigung von (einigen) Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation mit endlichem Index.
3. Die Nerode–Relation hat endlichen Index.

Beweis zu Satz von Nerode: (1) $\rightarrow$ (2)

(1) $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt bzw. akzeptiert.

(2) L ist die Vereinigung von (einigen) Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation mit endlichem Index.

Beweis: Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der deterministische endliche Automat, der L akzeptiert, und $R_{\mathcal{A}}$ wie folgt definiert:

$$\forall\, x, y \in \Sigma^* : x\ R_{\mathcal{A}}\ y \iff \delta(s, x) = \delta(s, y).$$

- $R_{\mathcal{A}}$ ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation.
- Der Index von $R_{\mathcal{A}}$ ist die Anzahl der nicht überflüssigen Zustände von $\mathcal{A}$, also endlich.
- Also ist L die Vereinigung der Äquivalenzklassen von $R_{\mathcal{A}}$, die zu den Endzuständen von $\mathcal{A}$ gehören.

Beweis zu Satz von Nerode: (2) $\rightarrow$ (3)

(2) L ist die Vereinigung von (einigen) Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation R mit endlichem Index.

(3) Die Nerode–Relation hat endlichen Index.

Beweis:

- Wir zeigen $x\ R\ y$ impliziert $x\ R_L\ y$ (R_L eine Vergröberung von R)
- Dann gilt $\text{ind}(R_L) \leq \text{ind}(R) < \infty$.

Sei also $x\ R\ y$.

- Da R rechtsinvariant ist, gilt für alle $z \in \Sigma^*$: $xz\ R\ yz$.
- Voraussetzung: Jede Äquivalenzklasse von R gehört entweder ganz oder gar nicht zu L
- Also: $xz, yz \in L$ oder $xz, yz \notin L$.
- Damit folgt $x\ R_L\ y$.

Beweis zu Satz von Nerode: (3) $\rightarrow$ (1)

(3) Die Nerode–Relation hat endlichen Index.

(1) $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt bzw. akzeptiert.

Beweis: Wir konstruieren zu R_L einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q := \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$, Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R_L. Es ist also $|Q| = \text{ind}(R_L) < \infty$.
- $s := [\varepsilon]_{R_L}$,
- $F := \{[w]_{R_L} \mid w \in L\}$ (wohldefiniert)
- $\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$

Beweis zu Satz von Nerode: (3) $\rightarrow$ (1)

Beweis: Wir konstruieren zu R_L einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q := \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$, Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R_L. Es ist also $|Q| = \text{ind}(R_L) < \infty$.
- $s := [\varepsilon]_{R_L}$,
- $F := \{[w]_{R_L} \mid w \in L\}$ (wohldefiniert)
- $\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$

δ ist wohldefiniert:

- Falls $[w]_{R_L} = [w']_{R_L}$ dann gilt $w \; R_L \; w'$ und wegen Rechtsinvarianz von R_L auch $wa \; R_L \; w'a$.
- Also ist $[wa]_{R_L} = [w'a]_{R_L}$.

Beweis zu Satz von Nerode: (3) $\rightarrow$ (1)

Beweis: Wir konstruieren zu R_L einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q := \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$, Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R_L. Es ist also $|Q| = \text{ind}(R_L) < \infty$.
- $s := [\varepsilon]_{R_L}$,
- $F := \{[w]_{R_L} \mid w \in L\}$ (wohldefiniert)
- $\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ genau L akzeptiert.

- Nach Konstruktion ist $\delta(s, w) = \delta([\varepsilon], w) = [\varepsilon w]_{R_L} = [w]_{R_L}$.
- Also wird w von $\mathcal{A}$ akzeptiert genau dann, wenn $[w] \in F$ gilt, d.h. wenn $w \in L$.

Korollar

Korollar
Der im dritten Beweisteil zum Satz von Nerode konstruierte Automat $\mathcal{A}$ zu R_L — der **Automat der Nerode–Relation** — ist minimal.

Korollar

Korollar
Der im dritten Beweisteil zum Satz von Nerode konstruierte Automat $\mathcal{A}$ zu R_L — der **Automat der Nerode–Relation** — ist minimal.

Beweis: Sei $\mathcal{A}' := (Q', \Sigma, \delta', s', F')$ ein deterministischer endlicher Automat, der L akzeptiert.

- Aus 1 $\Rightarrow$ 2 folgt, dass eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation $R_{\mathcal{A}'}$ mit $\text{ind}(R_{\mathcal{A}'}) \leq |Q'|$ existiert.
- Wegen 2 $\Rightarrow$ 3 gilt: $\text{ind}(R_L) \leq \text{ind}(R_{\mathcal{A}'})$.
- Mit 3 $\Rightarrow$ 1 folgt

$$|Q| = \text{ind}(R_L) \leq \text{ind}(R_{\mathcal{A}'}) \leq |Q'|,$$

für den Nerode–Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$.

Minimalität des Äquivalenzklassenautomats

Satz (Minimalität des Äquivalenzklassenautomats):
Der Äquivalenzklassenautomat $A^{\equiv}$ zu einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ ohne überflüssige Zustände ist minimal.

Minimalität des Äquivalenzklassenautomats

Satz (Minimalität des Äquivalenzklassenautomats):
Der Äquivalenzklassenautomat $A^{\equiv}$ zu einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ ohne überflüssige Zustände ist minimal.

Beweis: Sei L die vom Automaten $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}^{\equiv}$ akzeptierte Sprache.

- $A^{\equiv}$ hat keine überflüssigen Zustände.
- Letzter Korollar: Es genügt zu zeigen, dass $|Q^{\equiv}| = \text{ind}(R_L)$.
- Es bleibt zu zeigen, dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:
  $x \; R_L \; y \Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(s, y)$.

$$
\begin{aligned}
x \; R_L \; y &\Rightarrow \forall\, z \in \Sigma^* \colon \; (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L) \\
&\Rightarrow \forall\, z \in \Sigma^* \colon \; (\delta(s, xz) \in F \Leftrightarrow \delta(s, yz) \in F) \\
&\Rightarrow \forall\, z \in \Sigma^* \colon \; (\delta(\delta(s, x), z) \in F \Leftrightarrow \delta(\delta(s, y), z) \in F) \\
&\Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(s, y)
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

- Ein DEA ist ein Modell für einen sehr einfachen Computer
- Folgende Mengen sind gleich
  - Die Menge der regulären Sprachen
  - Die Menge aller Sprachen, die von einem DEA erkannt werden.
  - Die Menge aller Sprachen, die von einem NEA erkannt werden.
- Mit Potenzmengenkonstruktion kann ein zu einem NEA äquivalenter DEA konstruiert werden.
- Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen und das Verallgemeinerte Pumping-Lemma für reguläre Sprachen sind Hilfsmittel, mit denen für manche Sprachen gezeigt werden kann, dass sie nicht regulär sind.
- Der Äquivalenzklassenautomat zu einem DEA ohne überflüssige Zustände akzeptiert die gleiche Sprache und ist zustandsminimal.
- Der Automat der Nerode-Relation zu einem DEA akzeptiert die gleiche Sprache und ist zustandsminimal

Kapitel

- **Turing-Maschinen**
- **Berechenbarkeit**

Turing-Maschinen und Berechenbarkeit

Beobachtung:
Endliche Automaten sind als Berechnungsmodell nicht mächtig genug.

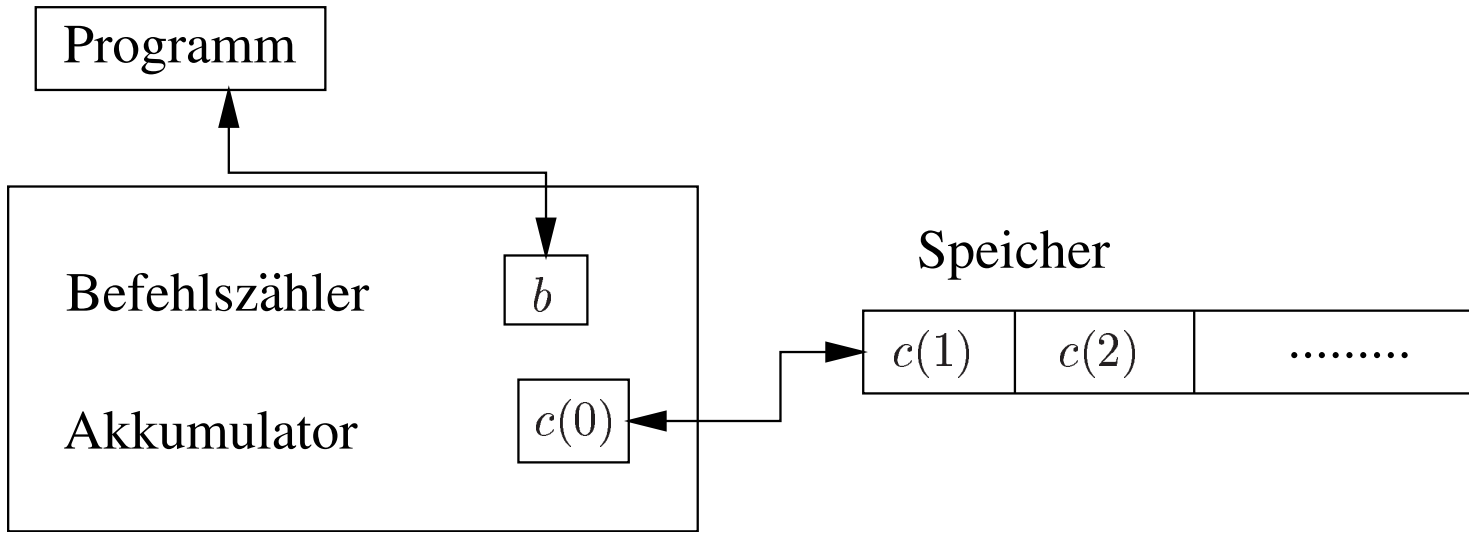
Frage:
Gibt es ein mächtigeres, realistisches Rechnermodell, das als Grundlage für allgemeine theoretische Aussagen über Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit und Komplexität geeignet ist?

Hauptfrage in diesem Kapitel:
Welche Probleme sind berechenbar?

Die Registermaschine (RAM)

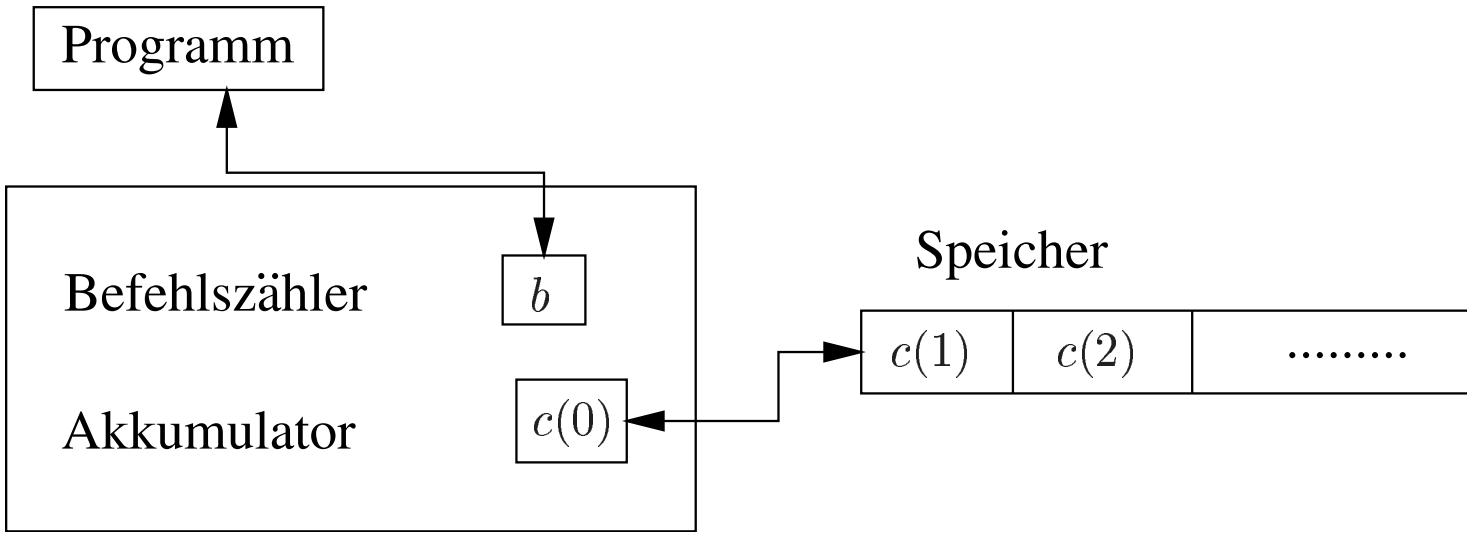
Die RAM besteht aus

- Befehlszähler (zeigt auf den nächsten Befehl im Programm),
- Akkumulatoren (endlicher Speicher zum Ausführen der Befehle),
- Registern (unendlicher Speicher), und
- Programm.



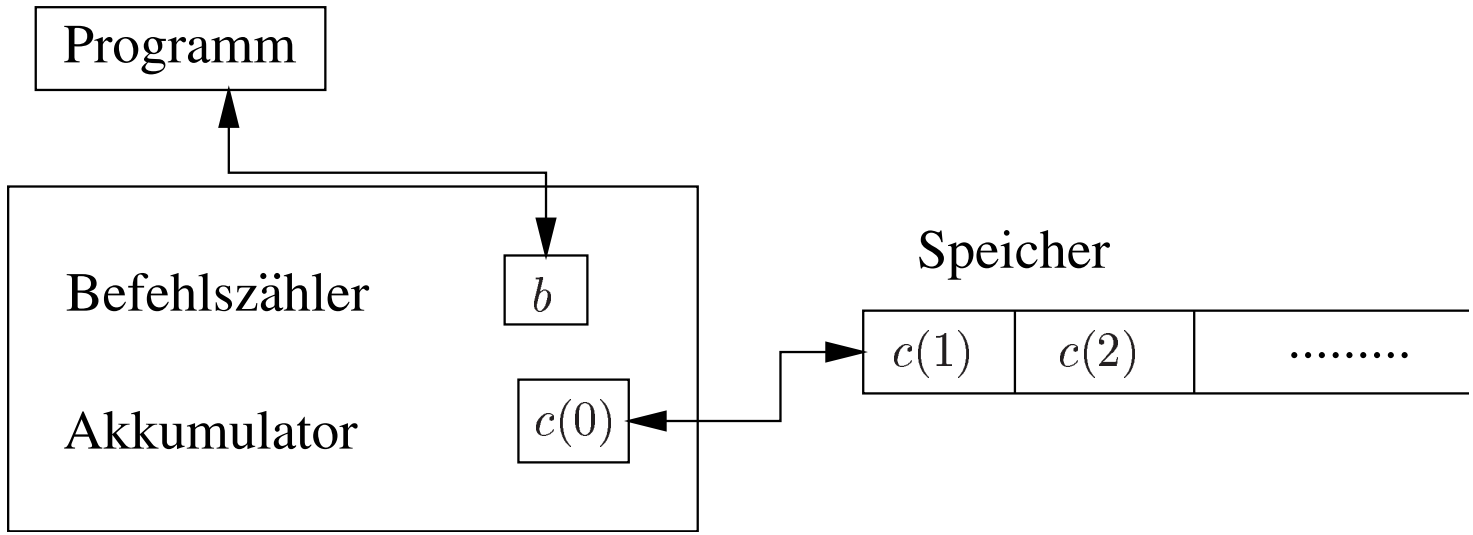
Die Registermaschine (RAM)

- Ein Programm besteht aus einer Folge von Befehlen.
- Programmzeilen sind durchnummeriert.
- Der Befehlszähler *b* startet bei 1 und enthält jeweils die Nummer des nächsten auszuführenden Befehls.



Die Registermaschine (RAM)

- In den ersten Registern steht zu Beginn der Berechnung die Eingabe.
- In den übrigen Registern steht 0.
- Am Ende der Berechnung stehen die Ausgabedaten in vorher festgelegten Registern.
- Den Inhalt des Registers i bezeichnen wir mit $c(i)$.



Befehle der Registermaschine (RAM)

Befehl	Wirkung
LOAD i	$c(0) := c(i); \quad b := b+1$
STORE i	$c(i) := c(0); \quad b := b+1$
ADD i	$c(0) := c(0) + c(i); \quad b := b+1$
SUB i	$c(0) := \max\{0, c(0) - c(i)\}; \quad b := b+1$
MULT i	$c(0) := c(0) \cdot c(i); \quad b := b+1$
DIV i	$c(0) := \left\lfloor \frac{c(0)}{c(i)} \right\rfloor; \quad b := b+1$
GOTO j	$b := j$
IF $c(0) \# \ell$ GOTO j	$\begin{cases} b := j & \text{falls } c(0) \# \ell \\ b := b+1 & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\# \in \{\leq, \geq, <, >, \neq, =\}$
END	$b := b$

Befehle der Registermaschine (RAM)

Befehl	Wirkung
LOAD i	$c(0) := c(i); \quad b := b+1$
STORE i	$c(i) := c(0); \quad b := b+1$
ADD i	$c(0) := c(0) + c(i); \quad b := b+1$
SUB i	$c(0) := \max\{0, c(0) - c(i)\}; \quad b := b+1$
MULT i	$c(0) := c(0) \cdot c(i); \quad b := b+1$
DIV i	$c(0) := \left\lfloor \frac{c(0)}{c(i)} \right\rfloor; \quad b := b+1$
GOTO j	$b := j$
IF $c(0) \# \ell$ GOTO j	$\begin{cases} b := j & \text{falls } c(0) \# \ell \\ b := b+1 & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\# \in \{\leq, \geq, <, >, \neq, =\}$
END	$b := b$

Befehle können modifiziert werden zu:

CLOAD, CSTORE, CADD, CSUB, CMULT, CDIV

ersetze hierzu immer c(i) durch die Konstante i

Befehle der Registermaschine (RAM)

Befehl	Wirkung
LOAD i	$c(0) := c(i); \quad b := b+1$
STORE i	$c(i) := c(0); \quad b := b+1$
ADD i	$c(0) := c(0) + c(i); \quad b := b+1$
SUB i	$c(0) := \max\{0, c(0) - c(i)\}; \quad b := b+1$
MULT i	$c(0) := c(0) \cdot c(i); \quad b := b+1$
DIV i	$c(0) := \left\lfloor \frac{c(0)}{c(i)} \right\rfloor; \quad b := b+1$
GOTO j	$b := j$
IF $c(0) \# \ell$ GOTO j	$\begin{cases} b := j & \text{falls } c(0) \# \ell \\ b := b+1 & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\# \in \{\leq, \geq, <, >, \neq, =\}$
END	$b := b$

Befehle können modifiziert werden zu:

INDLOAD, INDSTORE, INDADD, INDSUB, INDMULT, INDDIV

ersetze hierzu immer c(i) durch $c(c(i))$ (indirekte Addressierung)

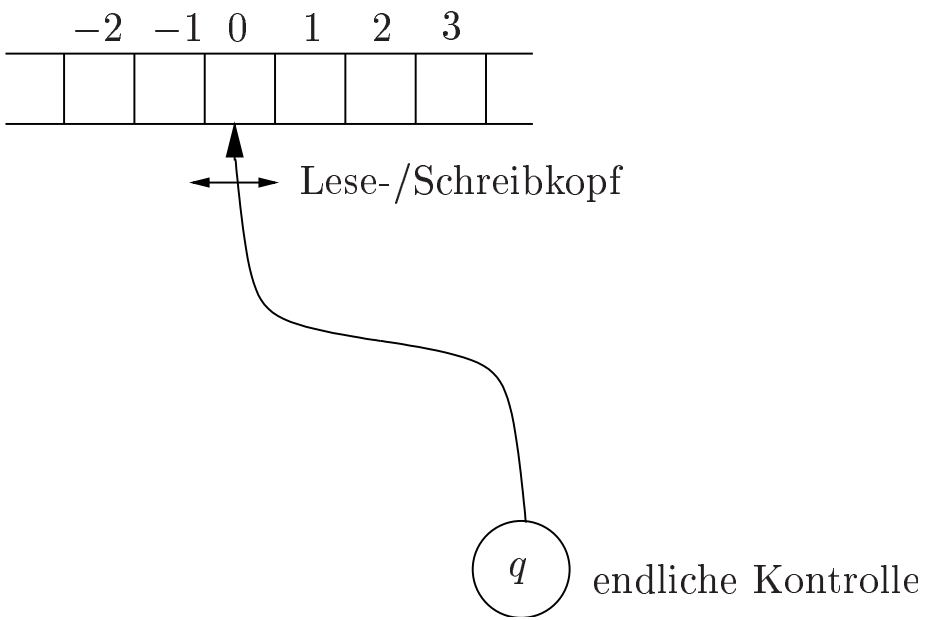
Kostenmodell der Registermaschine (RAM)

- Üblicherweise wird das **uniforme** Kostenmodell verwendet.
- Dabei kostet jede Programmzeile bis auf END eine Einheit.
- Dieses Modell ist gerechtfertigt solange keine großen Zahlen auftreten.
- Ansonsten ist das **logarithmische** Kostenmodell realistischer.
- Kosten entsprechen dann der Länge der benutzten Zahlen.

Die Turingmaschine (TM)

Eine TM besteht aus

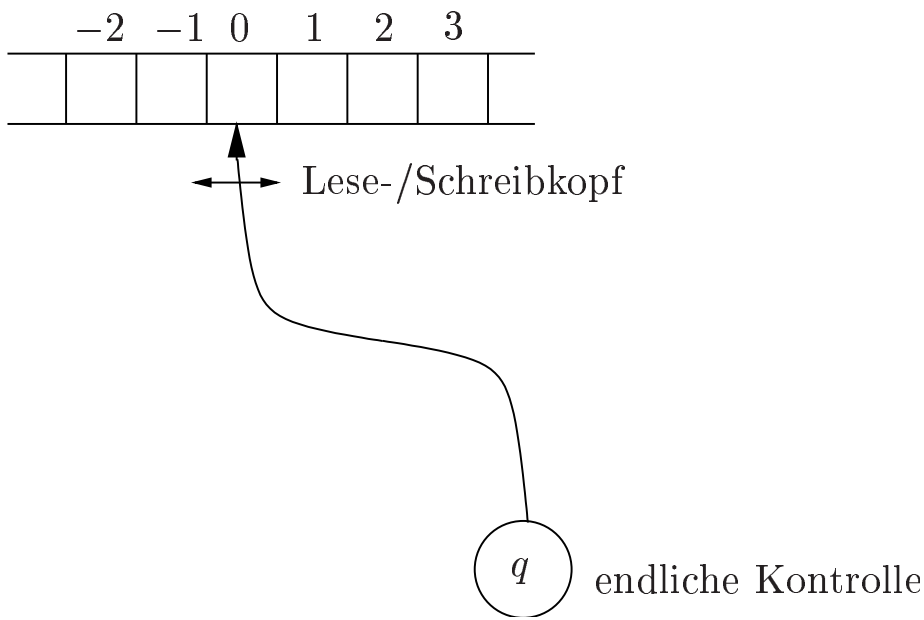
- beidseitig unendlichen Eingabe- und Rechenband,
- freibeweglichem Lese-/Schreibkopf, und
- endlicher Kontrolle.



Die Turingmaschine (TM)

Die Kontrolle

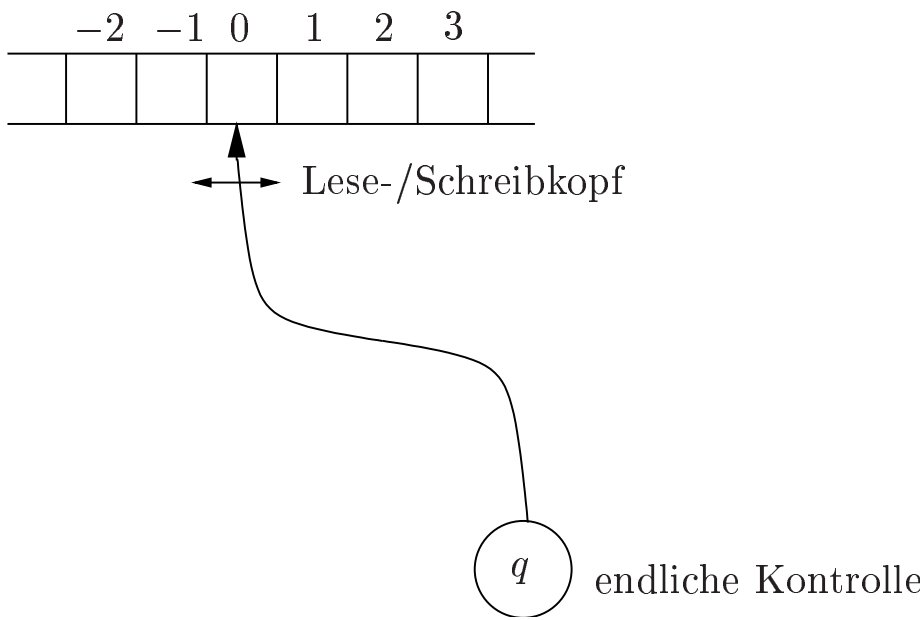
- ist immer in einem von endlich vielen Zuständen, und
- entspricht dem Befehlszähler der RAM.



Die Turingmaschine (TM)

Das Eingabe- und Rechenband

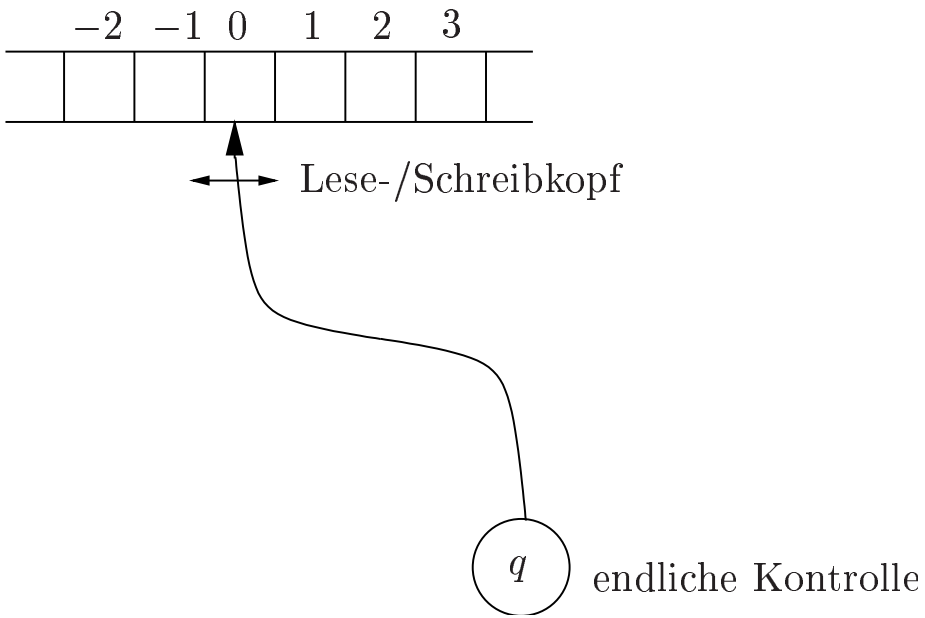
- enthält eine Folge von Symbolen (höchstens eins pro Zelle), und
- entspricht den Registern der RAM.



Die Turingmaschine (TM)

Ausgehend vom aktuellen Zustand verhält sich die TM wie folgt:

- lese das Symbol auf der aktuellen Position des Lese-/ Schreibkopfes,
- gehe in einen Folgezustand über,
- überschreibe evtl. das Symbol, und
- bewege den Lese-/ Schreibkopf nach rechts, links oder gar nicht.



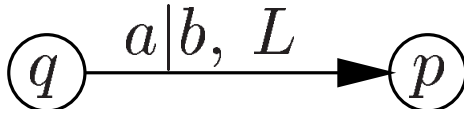
Formale Definition der Turingmaschine

Eine deterministische Turing-Maschine ((D)TM) besteht aus:

- Q, einer endlicher Zustandsmenge,
- Σ, einem endlichen Eingabealphabet,
- $\sqcup$, einem Blanksymbol mit $\sqcup \notin \Sigma$,
- Γ, einem endlichen Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$,
- $s \in Q$, einem Startzustand,
- $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, einer Übergangsfunktion.
  Dabei bedeutet L eine Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links, R eine Bewegung nach rechts und N ein Stehenbleiben. Die Übergangsfunktion beschreibt, wie das aktuell eingelesene Zeichen verarbeitet werden soll.
- $F \subseteq Q$, einer Menge von Endzuständen.
  Die Menge der Endzustände kann auch entfallen.

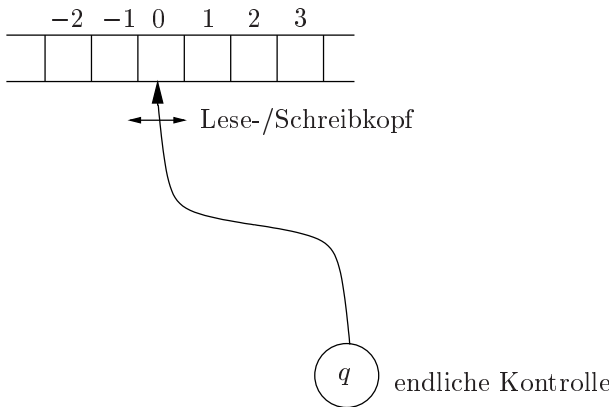
Bemerkungen zur TM

- Der Übergang $\delta(q, a) = (p, b, L)$ wird graphisch wie folgt dargestellt



Bedeutung:
Ist die Turing-Maschine im Zustand *q* und liest das Symbol *a*, so

- überschreibt sie dieses *a* mit *b*,
- geht auf dem Band eine Stelle nach links, und
- wechselt in den Zustand *p*.

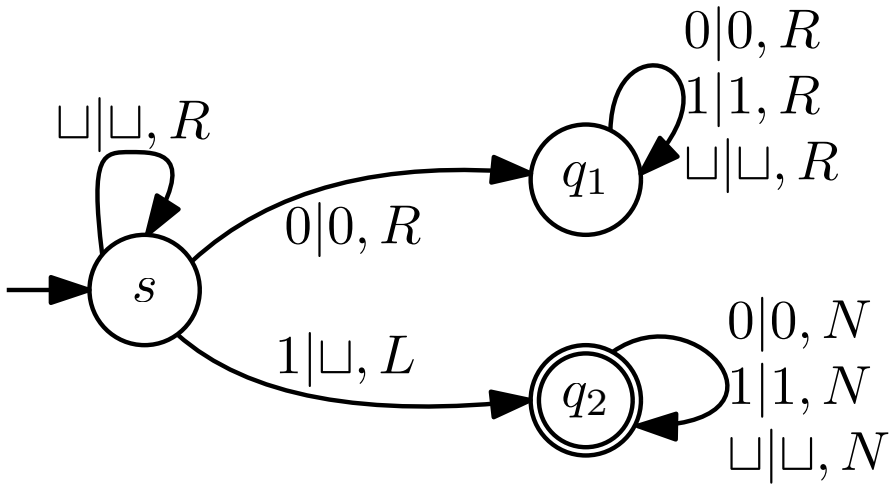


Bemerkungen zur TM

Konventionen

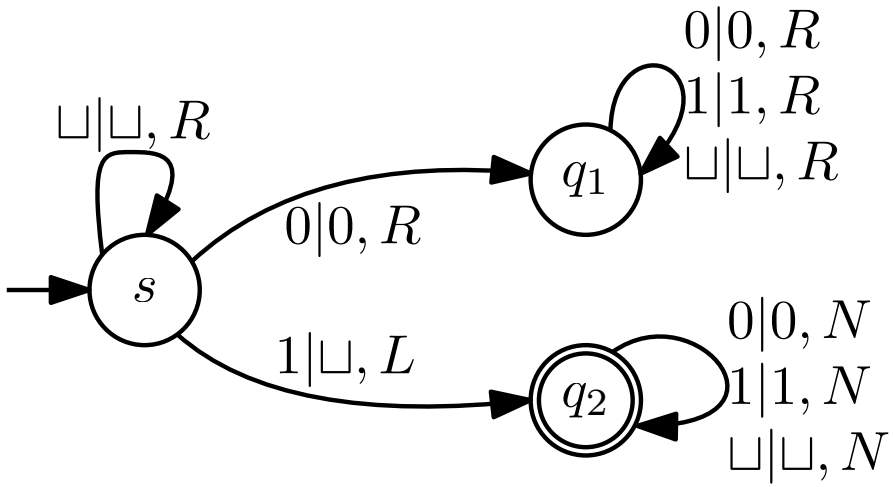
- Die Turing-Maschine startet im Zustand s.
- Der Lese-/Schreibkopf startet an der linkesten Stelle des Bandes, in der ein Eingabesymbol steht.
- Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie
  - zum ersten Mal in einen Endzustand kommt, oder
  - in einem Zustand q ein Symbol a liest und $\delta(q, a) = (q, a, N)$ ist.
- Das bedeutet, dass Übergänge, die aus Endzuständen herausführen, überflüssig sind.

Beispiel-Turingmaschine



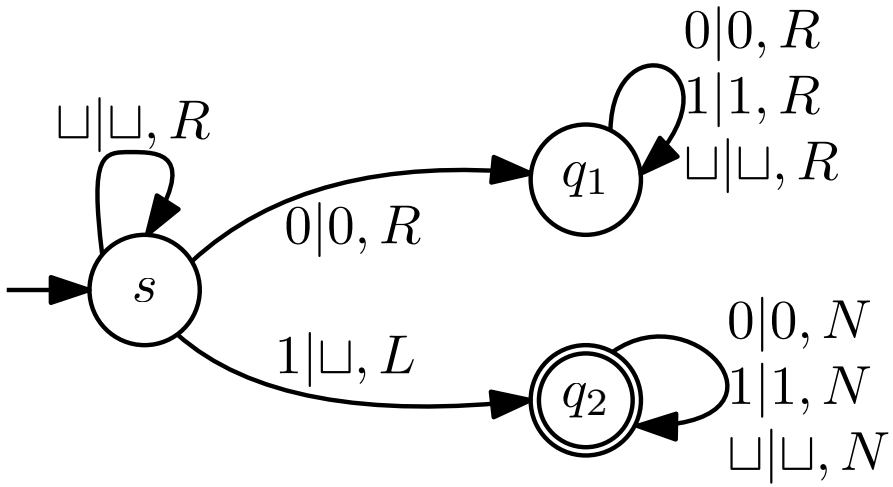
Frage: Was erkennt / berechnet diese TM ?

Beispiel-Turingmaschine



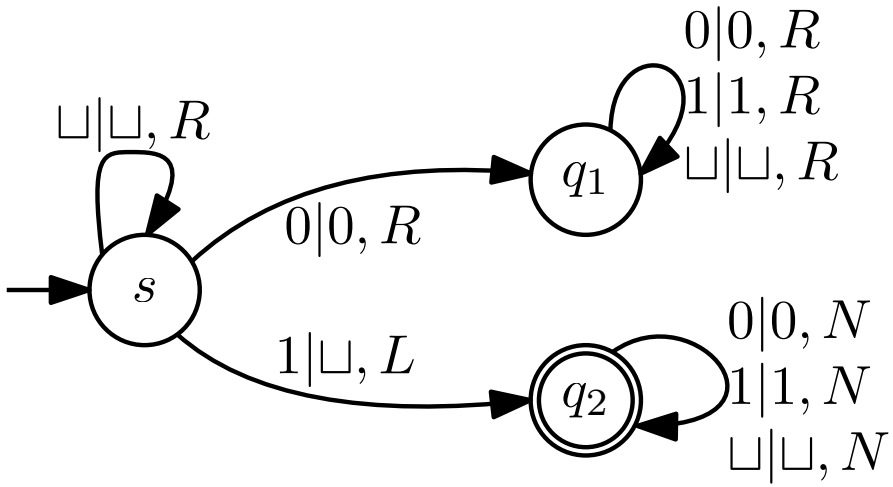
- Die TM erkennt alle Wörter aus $\{0, 1\}^*$, die mit einer Eins beginnen.
- Die TM löscht die die führende Eins, falls vorhanden.
- Alles andere auf dem Band bleibt unverändert.
- Der Lese-/Schreibkopf steht nach dem Stop links neben der Stelle an der die führende Eins gelesen wurde.
- Der Zustand q_1 ist unwesentlich.

Beispiel-Turingmaschine



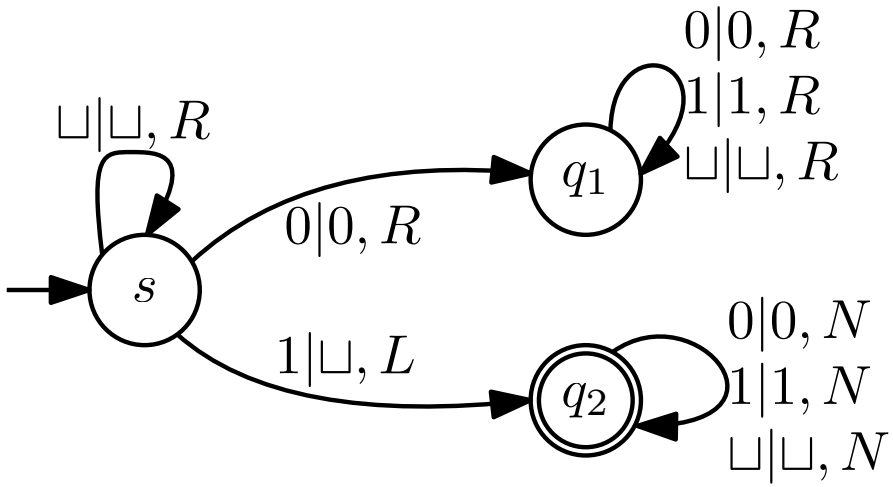
- Es gibt Eingaben, für die eine Turing-Maschine unter Umständen niemals stoppt.
- **Welche Eingaben sind dies in diesem Beispiel?**

Beispiel-Turingmaschine



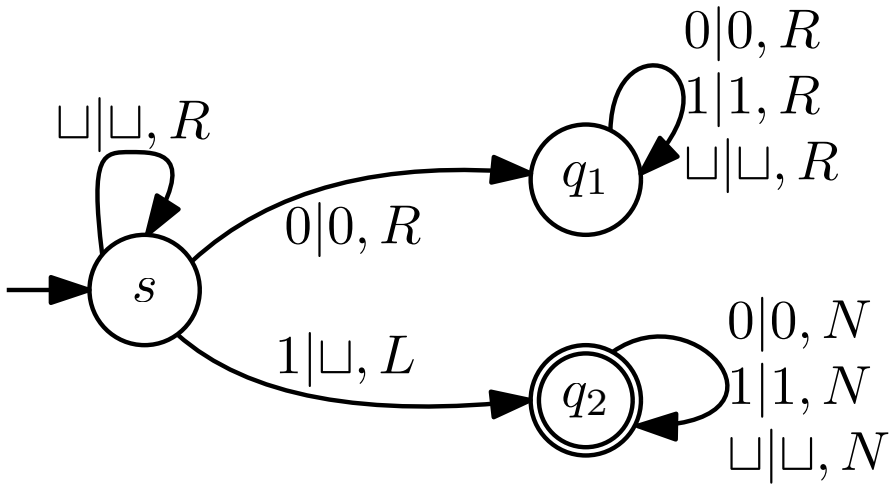
- Die TM stoppt nicht, falls die Eingaben nicht mit Eins beginnt.

Beispiel-Turingmaschine



- Eine Turing-Maschine erkennt nicht nur eine Sprache,
- sondern sie verändert auch die Eingabe, und
- hat insofern auch eine Ausgabe
  (= Inhalt des Bandes nach der Bearbeitung).
- Die Turing-Maschine realisiert also eine partielle Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$.

Beispiel-Turingmaschine



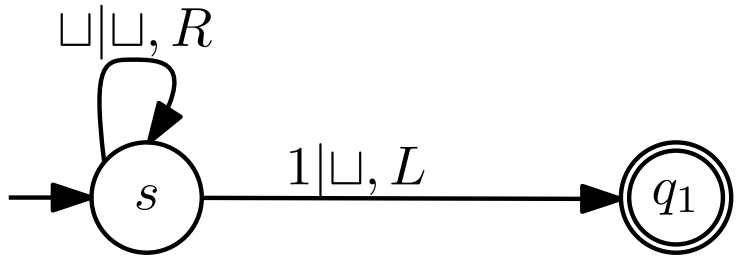
- Die Turing-Maschine realisiert also eine partielle Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$.
- Im Beispiel ist

$$f(w) = \begin{cases} v & \text{falls } w = 1v \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen zur TM

- Oft werden wir die Turing-Maschine beziehungsweise deren Übergangsfunktion nur unvollständig beschreiben.

- Beispiel:



- Eine Vervollständigung ist immer möglich.

- Wenn für eine bestimmte Kombination q, a kein Übergang $\delta(q, a)$ definiert ist, dann stoppt die Turing-Maschine im Zustand q.

Definitionen zur TM

- Eine Turing-Maschine **akzeptiert** eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, wenn sie nach Lesen von w in einem Zustand aus F stoppt.
- Sie **akzeptiert** eine Sprache L genau dann, wenn sie ausschließlich Wörter aus $w \in L$ als Eingabe akzeptiert.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$.

  Das Verhalten der Turing-Maschine für Eingaben $w \notin L$ ist damit nicht definiert. D.h., die Turing-Maschine stoppt entweder nicht in einem Endzustand oder aber stoppt gar nicht.