

# Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 24. Januar 2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Greibach Normalform

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Greibach-Normalform**, wenn alle Ableitungsregeln von der Form

$$A \rightarrow a\alpha \text{ mit } A \in V, a \in \Sigma \text{ und } \alpha \in V^*$$

sind.

## Satz:

Für jede kontextfreie Grammatik  $G$ , für die  $L(G)$  das leere Wort nicht enthält, kann eine (äquivalente) kontextfreie Grammatik  $G'$  mit  $L(G) = L(G')$  in Greibach-Normalform konstruiert werden.

# Beweis - Ersetzung (i)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

**Ersetzung (i).** Eine Regel

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

wobei

$$B \rightarrow \beta_1, B \rightarrow \beta_2, \dots, B \rightarrow \beta_r$$

alle Regeln sind, deren linke Seite  $B$  ist, kann durch die Regeln

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$$

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_2 \alpha_2$$

...

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_r \alpha_2$$

ersetzt werden.

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

**Ersetzung (ii).** Seien

$$A \rightarrow A\alpha_1, \dots, A \rightarrow A\alpha_r$$

$$A \rightarrow \beta_1, \dots, A \rightarrow \beta_s$$

alle Regeln, deren linke Seite  $A$  ist, wobei  $\beta_i$  nicht mit  $A$  beginnen. Dann können die Regeln

$$A \rightarrow A\alpha_1, \dots, A \rightarrow A\alpha_r$$

durch die Regeln

$$A \rightarrow \beta_1 B, \dots, A \rightarrow \beta_s B$$

$$B \rightarrow \alpha_1, \dots, B \rightarrow \alpha_r,$$

$$B \rightarrow \alpha_1 B, \dots, B \rightarrow \alpha_r B$$

ersetzt werden. Dabei sei  $B$  eine neu eingeführte Variable.

Annahme  $G$  ist in Chomsky-Normalform mit

$$V = \{A_1, \dots, A_m\}$$

$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

und damit ausschließlich Regeln der Form

$$A_i \rightarrow A_j A_k$$

$$A_i \rightarrow a_j .$$

Die Grammatik in Greibach-Normalform wird zusätzlich die Variablen  $\{B_1, \dots, B_m\}$  benutzen. Sei

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$$

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \quad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_j \rightarrow A_j A_k$$

$$A_j \rightarrow a_j .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

## 1. Invariante

Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \quad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_j \rightarrow A_j A_k$$

$$A_j \rightarrow a_j .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

## 2. Invariante

Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus  $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ .

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \quad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_j \rightarrow A_j A_k$$

$$A_j \rightarrow a_j .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

### 3. Invariante

Symbole aus  $\Sigma$  kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.



$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \quad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_j \rightarrow A_j A_k$$

$$A_j \rightarrow a_j .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

## 4. Invariante

Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus  $V = \{A_1, \dots, A_m\}$  ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus  $V$  beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus  $V$ .

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \quad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_j \rightarrow A_j A_k$$

$$A_j \rightarrow a_j .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

## 5. Invariante

Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus  $V' \setminus V = \{B_1, \dots, B_m\}$  ist, besteht nur aus Variablen aus  $V'$ .

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \quad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_j \rightarrow A_j A_k$$

$$A_j \rightarrow a_j .$$

Wir formen  $G$  zunächst so um, dass außer Invarianten 1-5 noch die nächste Invariante gilt:

## 6. Invariante

Falls  $A_j \rightarrow A_j \alpha$  Regel ist, so gilt  $j > i$ .

**1.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

**2.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus  $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ .

**3.Invariante** Symbole aus  $\Sigma$  kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

**4.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus  $V = \{A_1, \dots, A_m\}$  ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus  $V$  beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus  $V$ .

**5.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus  $V' \setminus V = \{B_1, \dots, B_m\}$  ist, besteht nur aus Variablen aus  $V'$ .

**6.Invariante** Falls  $A_j \rightarrow A_j \alpha$  Regel ist, so gilt  $j > i$ .

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow A_1A_2, A_3 \rightarrow 0\}$$

**Vorher:** Grammatik in Chomsky-Normalform

**Nachher:** 6. Invariante hält: Falls  $A_j \rightarrow A_j\alpha$  Regel ist, so gilt  $j > i$ .

**Aktion:** Dabei wenden wir (in dieser Reihenfolge)

Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln  $A_1 \rightarrow A_1\alpha$

Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln  $A_2 \rightarrow A_1\alpha$

Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln  $A_2 \rightarrow A_2\alpha$

Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln  $A_3 \rightarrow A_1\alpha$

Ersetzung (i) zur Ersetzung aller Regeln  $A_3 \rightarrow A_2\alpha$

Ersetzung (ii) zur Ersetzung aller Regeln  $A_3 \rightarrow A_3\alpha$

⋮

## Ersetzung (i)

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r$$

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \dots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3 A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow A_1 A_2, A_3 \rightarrow 0\}$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3 A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow A_2 A_3 A_2, A_3 \rightarrow 0\}$$

## Ersetzung (i)

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3 A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow A_2 A_3 A_2, A_3 \rightarrow 0\}$$

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \dots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3 A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow A_3 A_1 A_3 A_2 | 1 A_3 A_2, \\ A_3 \rightarrow 0\}$$



## Ersetzung (ii)

$$A \rightarrow A\alpha_1, \dots, A \rightarrow A\alpha_r$$

$$A \rightarrow \beta_1, \dots, A \rightarrow \beta_s$$

$$A \rightarrow \beta_1 B, \dots, A \rightarrow \beta_s B$$

$$B \rightarrow \alpha_1, \dots, B \rightarrow \alpha_r,$$

$$B \rightarrow \alpha_1 B, \dots, B \rightarrow \alpha_r B$$

$$A \rightarrow \beta_1, \dots, A \rightarrow \beta_s$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3 A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow A_3 A_1 A_3 A_2, \\ A_3 \rightarrow 0|1 A_3 A_2\}$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ A_2 \rightarrow A_3 A_1, A_2 \rightarrow 1, \\ A_3 \rightarrow 0B_3|1A_3A_2B_3, \\ B_3 \rightarrow A_1A_3A_2|A_1A_3A_2B_3 \\ A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\}$$

**Vorher:** Alle Regeln sind von der Form

$$A \rightarrow a\alpha$$

$$A \rightarrow \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*, a \in \Sigma$$

wobei es keine  $\varepsilon$ -Regeln oder Kettenregeln mit linker Seite  $A \in V$  gibt.  
Wegen Invariante 6

- gibt es keine Regel  $A_m \rightarrow \alpha$
- beginnen alle  $A_{m-1} \rightarrow \alpha$ -Regeln mit  $A_m$ .

**Aktion:** Ersetze mit absteigenden  $k$  alle Regeln der Form

$$A_k \rightarrow \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*$$

mittels Ersetzung (i).

**Nachher:** Regeln mit linker Seite in  $V$  in Form  $A_k \rightarrow a\alpha$ ,  $a \in \Sigma$ ,  $\alpha \in (V')^*$ .

## Ersetzung (i)

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3,$$

$$A_2 \rightarrow A_3 A_1,$$

$$A_2 \rightarrow 1,$$

$$A_3 \rightarrow 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3,$$

$$A_3 \rightarrow 0 | 1 A_3 A_2\}$$

$$B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3$$

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \dots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2 A_3,$$

$$A_2 \rightarrow 0 B_3 A_1 | 1 A_3 A_2 B_3 A_1$$

$$A_2 \rightarrow 0 A_1 | 1 A_3 A_2 A_1$$

$$A_2 \rightarrow 1,$$

$$A_3 \rightarrow 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3,$$

$$A_3 \rightarrow 0 | 1 A_3 A_2\}$$

$$B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3$$

## Ersetzung (i)

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow A_2A_3,$$

$$A_2 \rightarrow 0B_3A_1|1A_3A_2B_3A_1$$

$$A_2 \rightarrow 0A_1|1A_3A_2A_1|1$$

$$A_3 \rightarrow 0B_3|1A_3A_2B_3,$$

$$A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\}$$

$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2|A_1A_3A_2B_3$$

$$V = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$S = A_1$$

$$R = \{A_1 \rightarrow 0B_3A_1A_3$$

$$A_1 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$

$$A_1 \rightarrow 0A_1A_3|1A_3A_2A_1A_3|1A_3,$$

$$A_2 \rightarrow 0B_3A_1|1A_3A_2B_3A_1$$

$$A_2 \rightarrow 0A_1|1A_3A_2A_1|1$$

$$A_3 \rightarrow 0B_3|1A_3A_2B_3,$$

$$A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\}$$

$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2|A_1A_3A_2B_3$$

## Beweis - Verfahren - Schritt 3

**Vorher:** Rechte Seiten von Regeln, deren linke Seite aus  $V' \setminus V = \{B_1, \dots, B_m\}$  ist, beginnen mit einer Variablen aus  $\{A_1, \dots, A_m\}$  (wegen Invarianten 2 und 5).

**Aktion:** Ersetze Regeln  $B_j \rightarrow A_j \alpha$ ,  $\alpha \in (\Sigma \cup V')^*$  mit Ersetzung (i).

**Nachher:**  $G$  ist in Greibach-Normalform.

## Ersetzung (i)

$$A_1 \rightarrow 0B_3A_1A_3$$

$$A_1 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$

$$A_1 \rightarrow 0A_1A_3|1A_3A_2A_1A_3|1A_3, A_1 \rightarrow 0A_1A_3|1A_3A_2A_1A_3|1A_3,$$

$$A_2 \rightarrow 0B_3A_1|1A_3A_2B_3A_1$$

$$A_2 \rightarrow 0A_1|1A_3A_2A_1|1$$

$$A_3 \rightarrow 0B_3|1A_3A_2B_3,$$

$$A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\}$$

$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2|A_1A_3A_2B_3$$

$$A_1 \rightarrow 0B_3A_1A_3$$

$$A_1 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$

$$A_2 \rightarrow 0B_3A_1|1A_3A_2B_3A_1$$

$$A_2 \rightarrow 0A_1|1A_3A_2A_1|1$$

$$A_3 \rightarrow 0B_3|1A_3A_2B_3,$$

$$A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\}$$

$$B_3 \rightarrow 1A_3A_3A_2|0B_3A_1A_3A_3A_2$$

$$B_3 \rightarrow 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2|0A_1A_3A_3A_2$$

$$B_3 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2|1A_3A_3A_2B_3$$

$$B_3 \rightarrow 0B_3A_1A_3A_3A_2B_3|1A_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3$$

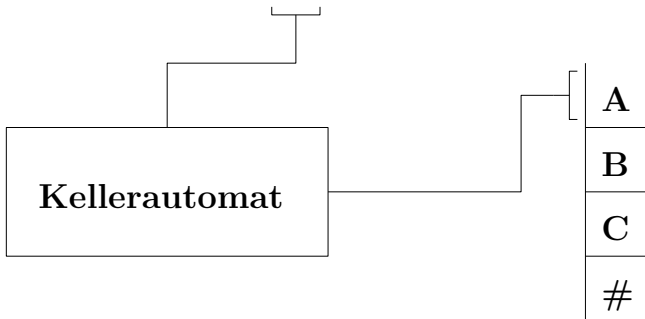
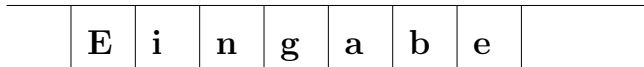
$$B_3 \rightarrow 0A_1A_3A_3A_2B_3$$

$$B_3 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3$$

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat** (NPDA bzw. PDA, Push-down Automaton) besteht aus  $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ , wobei

- $Q$  endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$  endliches Eingabealphabet
- $\Gamma$  endliches STACK-Alphabet
- $q_0 \in Q$  Anfangszustand
- $Z_0 \in \Gamma$  Initialisierung des STACK
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ , d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$  Menge der akzeptierenden Endzustände,  
 $F = \emptyset$  ist möglich.

## Eingabeband



**Keller**



Eine **Konfiguration eines PDA** ist ein Tripel  $(q, w, \alpha)$  mit

- $q \in Q$ ,
- $w \in \Sigma^*$  der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$  STACK-Inhalt.

Zu Konfiguration  $(q, w_1 \dots w_k, Z_1 \dots Z_m)$  gibt es die **Nachfolgekonfigurationen**:

$(q', w_2 \dots w_k, Z'_1 \dots Z'_r Z_2 \dots Z_m)$  für alle  $(q', Z'_1 \dots Z'_r) \in \delta(q, w_1, Z_1)$

und

$(q', w_1 \dots w_k, Z'_1 \dots Z'_r Z_2 \dots Z_m)$  für alle  $(q', Z'_1 \dots Z'_r) \in \delta(q, \varepsilon, Z_1)$ .

Ein PDA **akzeptiert** ein  $w \in \Sigma^*$  **durch leeren Stack**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration  $(q_0, w, Z_0)$  in eine Konfiguration  $(q, \varepsilon, \varepsilon)$ ,  $q \in Q$ , gibt.

Ein PDA **akzeptiert** ein  $w \in \Sigma^*$  **durch einen akzeptierenden Endzustand**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration  $(q_0, w, Z_0)$  in eine Konfiguration  $(q, \varepsilon, \gamma)$  mit  $q \in F$  und  $\gamma \in \Gamma^*$  gibt.

Ein PDA ist **deterministisch** (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle  $q \in Q$ ,  $a \in \Sigma$ ,  $Z \in \Gamma$ .

Ein DPDA für  $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ . Informelle Beschreibung:

- Betrachte beliebiges Wort  $w_1 \dots w_n \# w_n \dots w_1 \in L$ .

## Phase 1

- Lies  $w_1 \dots w_n$  und schreibe jeweils  $w_i$  auf den STACK bis  $\#$  gelesen.

## Phase 2

- Lies  $w_n \dots w_1$  und vergleiche den jeweils gelesenen Buchstaben mit dem jeweils obersten Buchstaben auf dem STACK.
  - Gleichheit: Nimm obersten Buchstaben vom STACK
  - Sonst: Stoppe in nichtakzeptierenden Zustand

## Phase 3

- Ist nur noch  $Z_0$  auf dem STACK
  - Entferne  $Z_0$
  - Akzeptiere die Eingabe „mit leerem STACK“

Ein DPDA für  $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ .

$(Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{0, 1, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}), q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$  Phase 1

$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$

$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$

$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$

$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$

$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$

$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$

$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$

Trennzeichen gelesen  $\Rightarrow$  Zu Phase 2

$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$  Phase 2

$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$  Phase 3

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

		Zustand	Eingabe	Stack
$\delta(q_0, 0, Z_0)$	=	$(q_1, 0$		$Z_0)$
$\delta(q_0, 1, Z_0)$	=	$(q_1, 1$		$Z_0)$
$\delta(q_1, 0, 0)$	=	$(q_1, 00)$		
$\delta(q_1, 0, 1)$	=	$(q_1, 01)$		
$\delta(q_1, 1, 0)$	=	$(q_1, 10)$		
$\delta(q_1, 1, 1)$	=	$(q_1, 11)$		
$\delta(q_1, \#, 0)$	=	$(q_2, 0)$		
$\delta(q_1, \#, 1)$	=	$(q_2, 1)$		
$\delta(q_2, 0, 0)$	=	$(q_2, \varepsilon)$		
$\delta(q_2, 1, 1)$	=	$(q_2, \varepsilon)$		
$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$	=	$(q_2, \varepsilon)$		

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$
$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$
$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$
$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$
$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$
$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$
$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$

$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$

$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$
$q_1$	01#100	$0Z_0$

## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$

$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$

$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$
$q_1$	01#100	$0Z_0$
$q_1$	1#100	$00Z_0$



## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$

$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$

$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$
$q_1$	01#100	$0Z_0$
$q_1$	1#100	$00Z_0$
$q_1$	#100	$100Z_0$

## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$\delta(q_0, 0, Z_0)$	=	$(q_1, 0Z_0)$	Zustand	Eingabe	Stack
$\delta(q_0, 1, Z_0)$	=	$(q_1, 1Z_0)$	$q_0$	001#100	$Z_0$
$\delta(q_1, 0, 0)$	=	$(q_1, 00)$	$q_1$	01#100	$0Z_0$
$\delta(q_1, 0, 1)$	=	$(q_1, 01)$	$q_1$	1#100	$00Z_0$
$\delta(q_1, 1, 0)$	=	$(q_1, 10)$	$q_1$	#100	$100Z_0$
$\delta(q_1, 1, 1)$	=	$(q_1, 11)$	$q_2$	100	$100Z_0$
$\delta(q_1, \#, 0)$	=	$(q_2, 0)$	$q_2$	00	$00Z_0$
$\delta(q_1, \#, 1)$	=	$(q_2, 1)$			
$\delta(q_2, 0, 0)$	=	$(q_2, \varepsilon)$			
$\delta(q_2, 1, 1)$	=	$(q_2, \varepsilon)$			
$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$	=	$(q_2, \varepsilon)$			

## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$

$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$

$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$
$q_1$	01#100	$0Z_0$
$q_1$	1#100	$00Z_0$
$q_1$	#100	$100Z_0$
$q_2$	100	$100Z_0$
$q_2$	00	$00Z_0$
$q_2$	0	$0Z_0$

## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$

$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$

$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$
$q_1$	01#100	$0Z_0$
$q_1$	1#100	$00Z_0$
$q_1$	#100	$100Z_0$
$q_2$	100	$100Z_0$
$q_2$	00	$00Z_0$
$q_2$	0	$0Z_0$
$q_2$		$Z_0$

## Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_1, 0Z_0)$$

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_1, 1Z_0)$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, 00)$$

$$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 01)$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = (q_1, 10)$$

$$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, 11)$$

$$\delta(q_1, \#, 0) = (q_2, 0)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, 1, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$$

Zustand	Eingabe	Stack
$q_0$	001#100	$Z_0$
$q_1$	01#100	$0Z_0$
$q_1$	1#100	$00Z_0$
$q_1$	#100	$100Z_0$
$q_2$	100	$100Z_0$
$q_2$	00	$00Z_0$
$q_2$	0	$0Z_0$
$q_2$		$Z_0$

akzeptiert durch leeren Stack

**Ein NPDA für  $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ . Informelle Beschreibung:**

- In diesem Fall fehlt das Trennzeichen.
- Der NPDA funktioniert wie der DPDA aus dem letzten Beispiel
- Der Übergang in Phase 2 funktioniert allerdings nichtdeterministisch.

**Bemerkung:**

- Für die Sprache  $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$  gibt es keinen DPDA.
- NPDAs können also mehr als DPDAs.

## Kellerautomaten - Beispiel 2

Ein NPDA für  $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ .

$(Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{0, 1, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}), q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_1, 0Z_0)\}$       Phase 1  
 $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_1, 1Z_0)\}$

$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, 00), (q_2, \epsilon)\}$   
 $\delta(q_1, 0, 1) = \{(q_1, 01)\}$   
 $\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_1, 10)\}$   
 $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, 11), (q_2, \epsilon)\}$

$\delta(q_2, 0, 0) = \{(q_2, \epsilon)\}$       Phase 2  
 $\delta(q_2, 1, 1) = \{(q_2, \epsilon)\}$

$\delta(q_2, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, \epsilon)\}$       Phase 3

**Satz:**

Zu einem PDA, der eine Sprache  $L$  durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert, kann ein PDA konstruiert werden, der  $L$  mit leerem STACK akzeptiert.



- Sei  $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$  PDA, der  $L$  durch Übergang in einen Zustand aus  $F_1$  akzeptiert.
- Wir konstruieren dazu einen PDA  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$ , der  $L$  durch leeren STACK akzeptiert.
- Sei  $q_E$  ein neuer Zustand
- Sei  $Z_0^2$  ein neues Stack-Symbol

### Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$ .

- Lege zu Beginn  $Z_0^2$  vor  $Z_0^1$  auf den Stack, so dass der Stack nicht „versehentlich“ geleert werden kann.
- Dann Verfahre wie in  $\mathcal{A}_1$ .
- Wenn Zustand in  $F_1$  erreicht wird: Gehe zu  $q_E$  und leere den Stack

- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$  akzeptiert durch Endzustand
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$ , akzeptiert durch leeren Stack
- Sei  $q_E$  ein neuer Zustand
- Sei  $Z_0^2$  ein neues Stack-Symbol

$$Q_2 = Q_1 \cup \{q_0^2, q_E\}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\}$$

$$\delta_2(q_0^2, \varepsilon, Z_0^2) = \{(q_0^1, Z_0^1 Z_0^2)\}$$

$$\delta_2(q, a, Z) = \delta_1(q, a, Z) \text{ für } q \in Q_1, a \neq \varepsilon, Z \in \Gamma_1$$
$$q \in Q_1 \setminus F_1, a = \varepsilon, Z \in \Gamma_1$$

$$\delta_2(q, \varepsilon, Z) = \delta_1(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } q \in F_1, Z \in \Gamma_2$$

$$\delta_2(q_E, \varepsilon, Z) = \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } Z \in \Gamma_2$$

$$\delta(\cdot) = \emptyset \text{ sonst}$$

**Satz:**

Zu einem PDA, der eine Sprache  $L$  mit leerem STACK akzeptiert, kann ein PDA konstruiert werden, der  $L$  durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert.

- Sei  $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1)$ , ein PDA der  $w \in L$  mit leerem STACK akzeptiert
- Wir konstruieren dazu einen PDA  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2, F_2)$ , der genau die  $w \in L$  durch Übergang in einen Zustand  $q \in F_2$  akzeptiert.
- Sei  $Z_0^2$  ein neues Stack-Symbol
- Sei  $q_F$  ein neuer (End-)Zustand
- Sei  $q_0^2$  ein neuer (Anfangs-)Zustand

## Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$ .

- Lege zu Beginn  $Z_0^2$  vor  $Z_0^1$  auf den Stack, und lösche  $Z_0^2$  nur, wenn die Abarbeitung von  $\mathcal{A}_1$  durch leeren Stack akzeptiert hätte.
- Gehe in Endzustand  $q_F$ , wenn  $\mathcal{A}_1$  durch leeren Stack akzeptiert hätte.

- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$  akzeptiert durch leeren Stack
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$ , akzeptiert durch Endzustand
- $q_0^2$  neuer Anfangszustand
- $q_F$  neuer (End-)Zustand
- $Z_0^2$  ein neues Stack-Symbol

$$Q_2 = Q_1 \cup \{q_0^2, q_F\},$$

$$F_2 = \{q_F\}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\}$$

$$\delta_2(q_0^2, a, X) = \begin{cases} \{q_0^1, Z_0^1 Z_0^2\} & \text{falls } a = \varepsilon \text{ und } X = Z_0^2 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_2(q, a, Z) = \delta_1(q, a, Z), \text{ falls } q \in Q_1, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ und } Z \in \Gamma_1$$

$$\delta_2(q, \varepsilon, Z_0^2) = \{(q_F, \varepsilon)\} \text{ für } q \in Q_1.$$

**Satz:**

Für eine Grammatik  $G$  in Greibach-Normalform kann ein PDA konstruiert werden, der  $L(G)$  mit leerem STACK akzeptiert.

- Sei  $G = (\Sigma, V, S, R)$  eine Grammatik in Greibach Normalform
- Konstruiere gewünschten Automaten  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$

$$Q := \{q_0\}$$

$$\Gamma := V$$

$$Z_0 := S$$

$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \alpha) \mid (A \rightarrow a\alpha) \in R\}$$

Per Induktion über die Länge  $i$  einer Ableitung beweisen wir:

- $S \xrightarrow{*} w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \Leftrightarrow \mathcal{A}$  kann beim Lesen von  $w_1 \dots w_i$  den STACK-Inhalt  $A_1 \dots A_m$  erzeugen. Möglicherweise ist  $A_1 \dots A_m = \epsilon$ .

Daraus folgt:

- $\mathcal{A}$  erkennt  $w_1 \dots w_n$  mit leerem STACK  $\Leftrightarrow S \xrightarrow{*} w_1 \dots w_n$  in  $G$

$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S$$
$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \alpha) \mid (A \rightarrow a\alpha) \in R\}$$

**Induktionsanfang** ist mit  $i = 0$  trivialerweise erfüllt.

**Induktionsschritt:**

Sei  $i \geq 1$  und „ $\xrightarrow{j}$ “ stehe für eine Ableitung der Länge  $j$ . Dann gilt

$$S \xrightarrow{i} w_1 \dots w_j A_1 \dots A_m \iff \begin{array}{l} \exists A' \in V, r \in \{1, \dots, m\} \text{ mit} \\ S \xrightarrow{i-1} w_1 \dots w_{j-1} A' A_r \dots A_m \\ \rightarrow w_1 \dots w_j A_1 \dots A_m. \end{array}$$

Mit Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu

$\exists A' \in V, r \in \{1, \dots, m\}$  so, dass

- $A$  das Wort  $w_1 \dots w_{j-1}$  lesen und dabei STACK-Inhalt  $A' A_r \dots A_m$  erzeugen kann, und
- $A' \rightarrow w_j A_1 \dots A_{r-1}$  Regel von  $G$  ist.



$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S$$
$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \alpha) \mid (A \rightarrow a\alpha) \in R\}$$

**Induktionsanfang** ist mit  $i = 0$  trivialerweise erfüllt.

**Induktionsschritt:**

Sei  $i \geq 1$  und „ $\xrightarrow{j}$ “ stehe für eine Ableitung der Länge  $j$ .

Mit Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu

$\exists A' \in V, r \in \{1, \dots, m\}$  so, dass

- $\mathcal{A}$  das Wort  $w_1 \dots w_{i-1}$  lesen und dabei STACK-Inhalt  $A' A_r \dots A_m$  erzeugen kann, und
- $A' \rightarrow w_i A_1 \dots A_{r-1}$  Regel von  $G$  ist.

Dies ist genau dann erfüllt, wenn  $\mathcal{A}$  das Wort  $w_1 \dots w_i$  lesen und dabei den STACK-Inhalt  $A_1 \dots A_m$  erzeugen kann.