Theoretische Grundlagen der Informatik Übung

7. Übungstermin · 17. Januar 2017

Benjamin Niedermann

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · LEHRSTUHL ALGORITHMIK

Übersicht

Inhalt

- Chomsky-Hierarchien und Grammatiken
  - Konstruktion von Grammatiken
  - Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus
  - Eindeutigkeit von kontextfreien Grammatiken

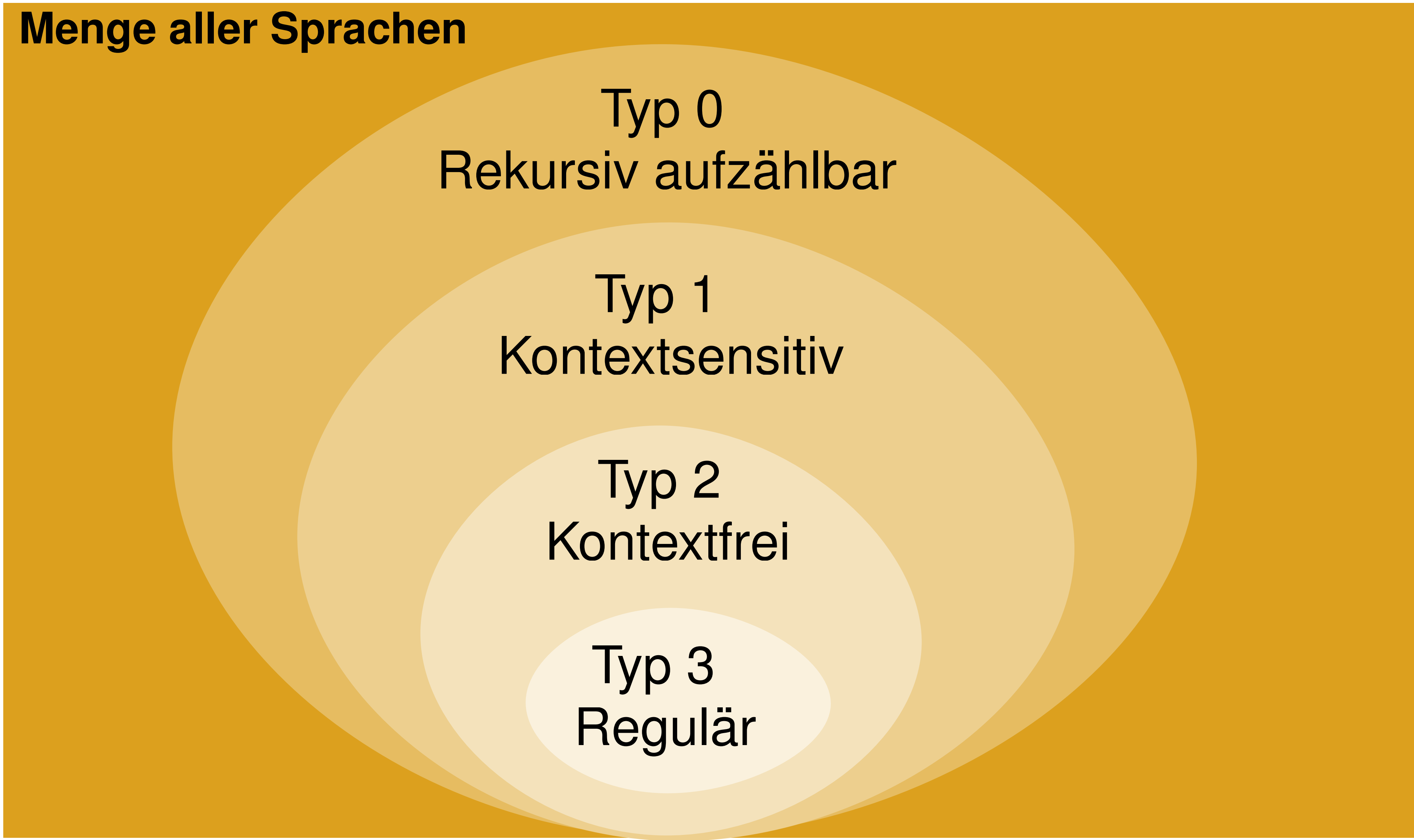
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Chomsky Hierarchie

Chomsky-Hierarchien

Typ	Grammatik	Regeln
0	rekursiv aufzählbar	beliebig
1	kontextsensitiv	$\alpha A\beta \rightarrow \alpha\gamma\beta$
2	kontextfrei	$A \rightarrow \alpha$
3	regulär	$A \rightarrow a \mid aB$

Chomsky-Hierarchien



Chomsky-Hierarchien und Grammatiken

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgende Sprache eine Grammatik an.

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^\star \mid i = j \vee j = k\}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^\star \mid i = j \vee j = k\}$$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^\star \mid i = j \vee j = k\}$$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-2

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^\star \mid i = j \vee j = k\}$$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-2

2. Schritt: Grammatik vom Typ-2 formal definieren und formulieren.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^\star \mid i = j \lor j = k\}$$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-2

2. Schritt: Grammatik vom Typ-2 formal definieren und formulieren.

$G = (\Sigma, V, S, R)$ $\Sigma = \{a, b, c\}$ $V = \{S, T, U, V, W\}$

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^\star \mid i = j \vee j = k\}$$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-2

2. Schritt: Grammatik vom Typ-2 formal definieren und formulieren.

$G = (\Sigma, V, S, R)$ $\Sigma = \{a, b, c\}$ $V = \{S, T, U, V, W\}$

$$
\begin{aligned}
R = \{ \; & S \to TU \mid VW, \\
& T \to aTb \mid \varepsilon, \\
& U \to Uc \mid \varepsilon, \\
& W \to bWc \mid \varepsilon, \\
& V \to Va \mid \varepsilon. \\
\}
\end{aligned}
$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgende Sprache eine Grammatik an.

a) $L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgende Sprache eine Grammatik an.

a) $L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

a) $L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-1

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgende Sprache eine Grammatik an.

a) $L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-1

2. Schritt: Grammatik vom Typ-1 formal definieren und formulieren.

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

a) $L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-1

2. Schritt: Grammatik vom Typ-1 formal definieren und formulieren.

$G = (\Sigma, V, S, R)$ $\quad \Sigma = \{0,1\}$ $\quad V = \{S, X_i, R_i, L_i, T\}$

für $i \in \{0,1\}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktion

Geben Sie für die folgendene Sprache eine Grammatik an.

a) $L_1 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Sprache? Typ-1

2. Schritt: Grammatik vom Typ-1 formal definieren und formulieren.

$G = (\Sigma, V, S, R)$ $\Sigma = \{0, 1\}$ $V = \{S, X_i, R_i, L_i, T\}$ für $i \in \{0, 1\}$

$$R = \{ \; S \to T \mid \varepsilon$$

$$T \to 0TX_0 \mid 1TX_1 \mid L_0R_0 \mid L_1R_1$$

$$\begin{array}{lll} R_0X_0 \to X_0R_0 & L_0X_0 \to L_0R_0 & R_0 \to 0 \\ R_0X_1 \to X_1R_0 & L_0X_1 \to L_0R_1 & R_1 \to 1 \\ R_1X_0 \to X_0R_1 & L_1X_0 \to L_1R_0 & L_0 \to 0 \\ R_1X_1 \to X_1R_1 & L_1X_1 \to L_1R_1 & L_1 \to 1 \end{array}$$

$$\}$$

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Eine Zeichenkette von Zeichen '$\{$, $\}$, (,), [,]' ist wohlgeformt, wenn die verschiedenen Klammertypen passend in einer korrekten Reihenfolge angeordnet sind.

Beispiel 1: '([])$\{()\}$' ist wohlgeformt.
Beispiel 2: '([)]($\{)\}$' ist nicht wohlgeformt.

Beschreiben Sie eine Funktion, die testet, ob die Zeichenkette wohlgeformt ist.

*Aufgabe aus: Elements of Programming Interviews (ISBN: 9781479274833)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

(b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

(c) Beweisen Sie die Maximalität von k

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{\,(\,,\,)\,\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Grammatik?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Grammatik? Typ-2 ✓

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\,,\,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Grammatik? Typ-2 ✓

2. Schritt: Grammatik vom Typ-2 formal definieren und formulieren.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\, ,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Grammatik? Typ-2 ✓

2. Schritt: Grammatik vom Typ-2 formal definieren und formulieren.

$$G = (\Sigma, V, S, R) \qquad \Sigma = \{(,)\} \qquad V = \{S\}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\,,\,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

a) Konstruieren Sie eine Typ-k-Grammatik mit maximalem k die $L_{()}$ erzeugt.

1. Schritt: Von welchem Typ ist die Grammatik? Typ-2 ✓

2. Schritt: Grammatik vom Typ-2 formal definieren und formulieren.

$$G = (\Sigma, V, S, R) \qquad \Sigma = \{(,)\} \qquad V = \{S\}$$

$$R = \{$$

$$S \to (S)S \mid \varepsilon$$

$$\}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammer-ausdrücke gegeben.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \subseteq L_{()}$**:**

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(\,,\,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \subseteq L_{()}$**:**

- Klammern werden nie gelöscht oder verschoben (Typ-2)

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \subseteq L_{()}$:

- Klammern werden nie gelöscht oder verschoben (Typ-2)
- Jede Produktion, die eine Klammer erzeugt, erzeugt genau ein Paar (und). Also hat jedes Wort in $L(G)$ genausoviele öffnende wie schließende Klammern.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{\, (\, ,\,)\, \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \subseteq L_{()}$**:**

- Klammern werden nie gelöscht oder verschoben (Typ-2)
- Jede Produktion, die eine Klammer erzeugt, erzeugt genau ein Paar (und). Also hat jedes Wort in $L(G)$ genausoviele öffnende wie schließende Klammern.
- Jede Produktion, die mindestens eine Klammer erzeugt, erzeugt (vor). Also beinhaltet für jedes Wort w in $L(G)$ jedes Präfix von w mindestens soviele öffnende wie schließende Klammern.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammer-ausdrücke gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \supseteq L_{()}$**:**

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\,,\,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammer-ausdrücke gegeben.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \supseteq L_{()}$**:**

- Sei w in $L_{()}$ beliebig.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{\,(\,,\,)\,\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \supseteq L_{()}$**:**

- Sei w in $L_{()}$ beliebig.
- Algorithmus, der w erzeugt:

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\,,\,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammer-ausdrücke gegeben.

b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \supseteq L_{()}$**:**

- Sei w in $L_{()}$ beliebig.
- Algorithmus, der w erzeugt:
  - $w = (w_1)w_2$, (w_1) ist erstes Klammerpaar im Ausdruck
    - Führe $S \to (S)S$ aus

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\, , \,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass Ihre Grammatik genau $L_{()}$ erzeugt.

Zu zeigen ist: $L(G) = L_{()}$

$L(G) \supseteq L_{()}$**:**

- Sei w in $L_{()}$ beliebig.
- Algorithmus, der w erzeugt:
  - $w = (w_1)w_2$, (w_1) ist erstes Klammerpaar im Ausdruck
    - Führe $S \to (S)S$ aus
  - $w = \varepsilon$
    - Führe $S \to \varepsilon$ aus

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(c) Beweisen Sie die Maximalität von k.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(c) Beweisen Sie die Maximalität von k.

- $L_{()}$ ist nicht regulär (Hausaufgabe)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(c) Beweisen Sie die Maximalität von k.

- $L_{()}$ ist nicht regulär (Hausaufgabe)
- reguläre Sprachen entsprechen Chomsky-Typ-3

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Sprache der korrekten Klammerausdrücke

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (\,,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben.

(c) Beweisen Sie die Maximalität von k.

- $L_{()}$ ist nicht regulär (Hausaufgabe)
- reguläre Sprachen entsprechen Chomsky-Typ-3
- $\Rightarrow$ Chomsky-Typ-2 ist maximal.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

a) Lässt sich der CYK-Algorithmus auf G (ohne Abänderungen) anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort. Ändern Sie gegebenfalls G ab.

b) Prüfen Sie, ob die Wort $\mathtt{addd}$ in $L(G)$ liegt. Verwenden Sie dafür den CYK-Algorithmus.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

a) Lässt sich der CYK-Algorithmus auf G (ohne Abänderungen) anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort. Ändern Sie gegebenfalls G ab.

b) Prüfen Sie, ob die Wort $\mathtt{addd}$ in $L(G)$ liegt. Verwenden Sie dafür den CYK-Algorithmus.

(a) **Nein. Begründung:**

- G ist *nicht* in Chomsky-Normalform

Chomsky-Normalform:

$A \to BC$ oder $A \to a$ mit $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

1. Schritt: alle Regeln sind der Form

- $X \to Y, Y \in V^\star$ oder $X \to a, a \in \Sigma$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

1. Schritt: alle Regeln sind der Form

- $X \to Y, Y \in V^\star$ oder $X \to a, a \in \Sigma$

$$S \to A \mid aB \mid aC$$

$$B \to S \mid Ba$$

$$D \to d \mid dDD$$

$$A \to B \mid C \mid cAd$$

$$C \to D \mid c$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

1. Schritt: alle Regeln sind der Form

- $X \to Y, Y \in V^\star$ oder $X \to a, a \in \Sigma$

$S \to A \mid aB \mid aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid Ba$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to d \mid dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dDD$
$A \to B \mid C \mid cAd$	$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$
$C \to D \mid c$	$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

1. Schritt: alle Regeln sind der Form

- $X \to Y, Y \in V^\star$ oder $X \to a, a \in \Sigma$

$S \to A \mid aB \mid aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid Ba$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to d \mid dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dDD$
$A \to B \mid C \mid cAd$	$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$
$C \to D \mid c$	$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

1. Schritt: alle Regeln sind der Form

- $X \to Y, Y \in V^\star$ oder $X \to a, a \in \Sigma$

$S \to A \mid aB \mid aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid Ba$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to d \mid dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dDD$
$A \to B \mid C \mid cAd$	$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$
$C \to D \mid c$	$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

1. Schritt: alle Regeln sind der Form

- $X \to Y, Y \in V^\star$ oder $X \to a, a \in \Sigma$

$S \to A \mid aB \mid aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid Ba$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to d \mid dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dDD$
$A \to B \mid C \mid cAd$	$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$
$C \to D \mid c$	$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

2. Schritt: Rechten Seiten haben Länge ≤ 2.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

2. Schritt: Rechten Seiten haben Länge ≤ 2.

$$S \to A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \to S \mid B Z_a$$

$$D \to Z_d \mid Z_d DD$$

$$A \to B \mid C \mid Z_c A Z_d$$

$$C \to D \mid Z_c$$

$$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

2. Schritt: Rechten Seiten haben Länge ≤ 2.

$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid BZ_a$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to Z_d \mid Z_dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dE$
$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$	$A \to B \mid C \mid Z_cF$
$C \to D \mid Z_c$	$C \to D \mid Z_c$
$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$	$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$
	$E \to DD \quad F \to AZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

2. Schritt: Rechten Seiten haben Länge ≤ 2.

$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid BZ_a$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to Z_d \mid Z_dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dE$
$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$	$A \to B \mid C \mid Z_cF$
$C \to D \mid Z_c$	$C \to D \mid Z_c$
$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$	$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$
	$E \to DD \quad F \to AZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

2. Schritt: Rechten Seiten haben Länge ≤ 2.

$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$	$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$
$B \to S \mid BZ_a$	$B \to S \mid BZ_a$
$D \to Z_d \mid Z_dDD$	$D \to Z_d \mid Z_dE$
$A \to B \mid C \mid Z_cAZ_d$	$A \to B \mid C \mid Z_cF$
$C \to D \mid Z_c$	$C \to D \mid Z_c$
$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$	$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$
	$E \to DD \quad F \to AZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

3. Schritt: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

3. Schritt: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$S \to A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \to S \mid B Z_a$$

$$D \to Z_d \mid Z_d E$$

$$A \to B \mid C \mid Z_c F$$

$$C \to D \mid Z_c$$

$$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$$

$$E \to DD \quad F \to A Z_d$$

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

3. Schritt: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$S \to A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \to S \mid B Z_a$$

$$D \to Z_d \mid Z_d E$$

$$A \to B \mid C \mid Z_c F$$

$$C \to D \mid Z_c$$

$$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$$

$$E \to DD \quad F \to A Z_d$$

✓

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.

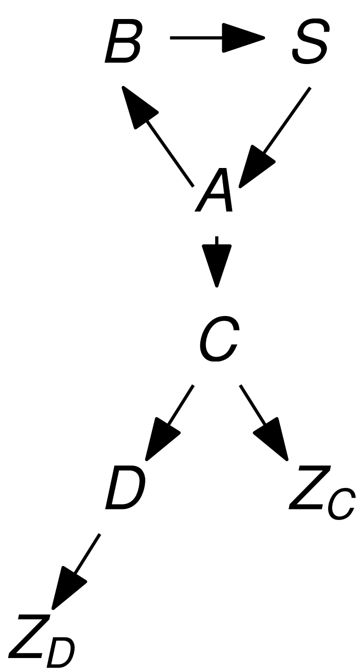
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \rightarrow A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \rightarrow S \mid B\mathtt{a}, \quad D \rightarrow \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \rightarrow B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \rightarrow D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow B$.

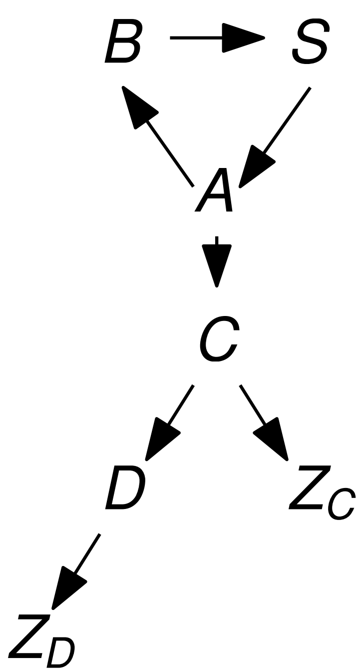


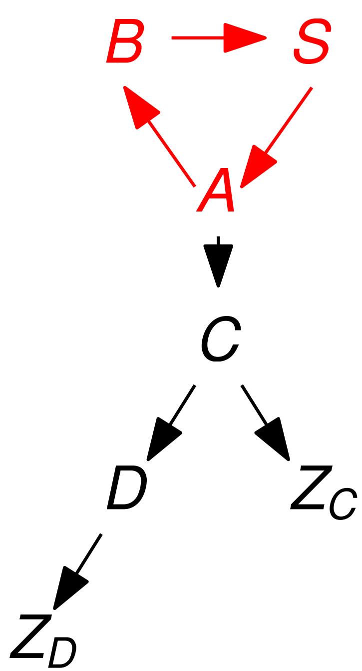
Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.





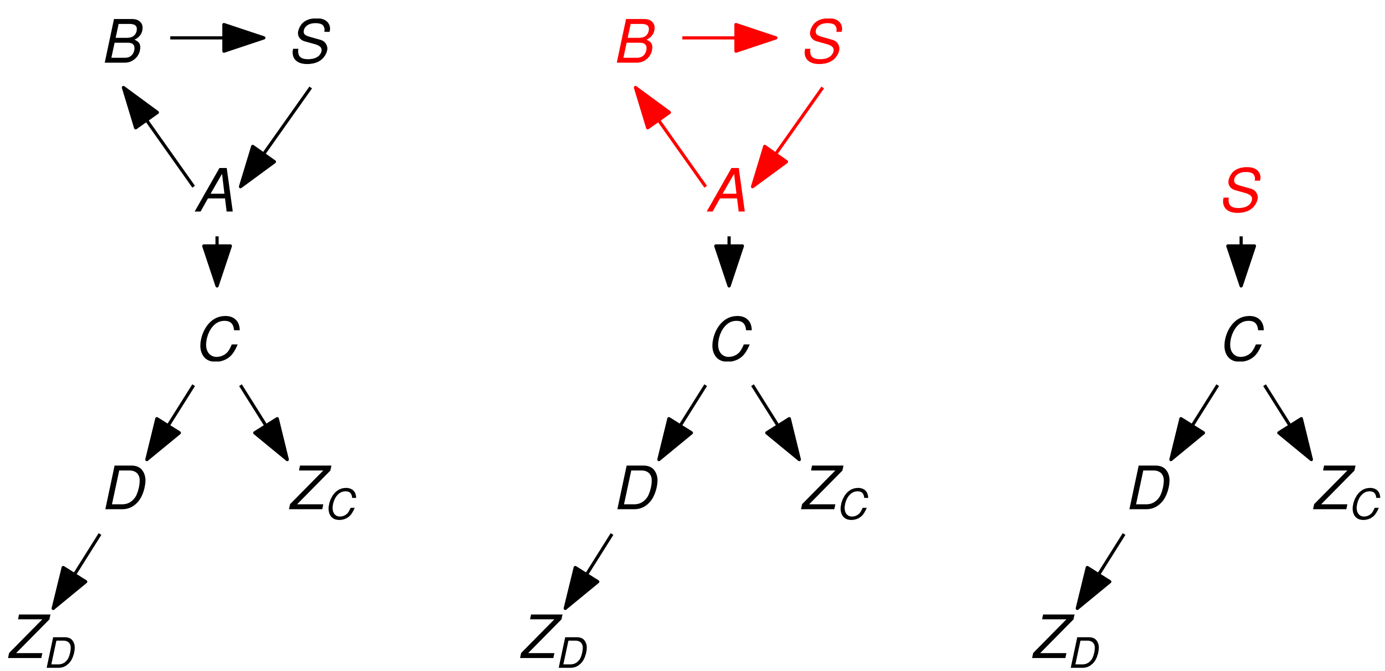
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.



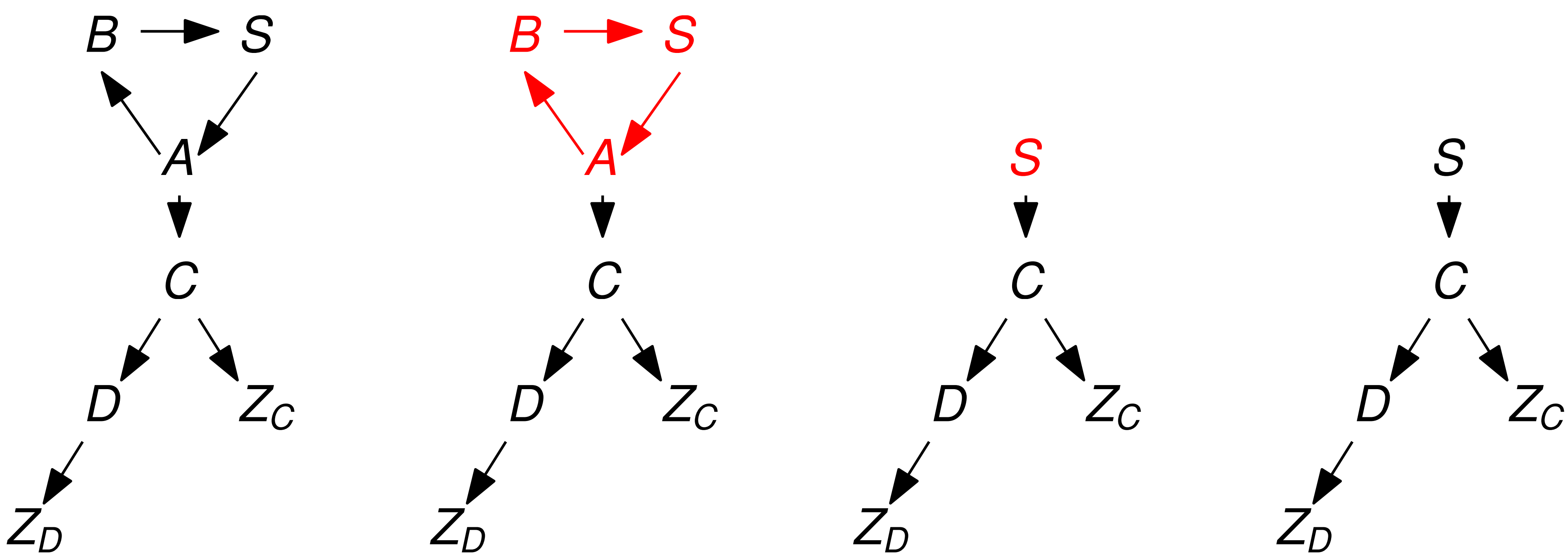
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.

$$S \to A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \to S \mid B Z_a$$

$$D \to Z_d \mid Z_d E$$

$$A \to B \mid C \mid Z_c F$$

$$C \to D \mid Z_c$$

$$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$$

$$E \to DD \quad F \to A Z_d$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.

$$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$$

$$B \to S \mid BZ_a$$

$$D \to Z_d \mid Z_dE$$

$$A \to B \mid C \mid Z_cF$$

$$C \to D \mid Z_c$$

$$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$$

$$E \to DD \qquad F \to AZ_d$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.

$$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$$
$$B \to S \mid BZ_a$$
$$D \to Z_d \mid Z_dE$$
$$A \to B \mid C \mid Z_cF$$
$$C \to D \mid Z_c$$
$$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$$
$$E \to DD \quad F \to AZ_d$$

$$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid C \mid Z_cF$$
$$D \to Z_d \mid Z_dE$$
$$C \to D \mid Z_c$$
$$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$$
$$E \to DD \quad F \to SZ_d$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.

$$S \to A \mid Z_aB \mid Z_aC$$
$$B \to S \mid \boxed{BZ_a}$$
$$D \to Z_d \mid Z_dE$$
$$A \to B \mid C \mid Z_cF$$
$$C \to D \mid Z_c$$
$$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$$
$$E \to DD \quad F \to AZ_d$$

$$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid \boxed{SZ_a} \mid C \mid Z_cF$$
$$D \to Z_d \mid Z_dE$$
$$C \to D \mid Z_c$$
$$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$$
$$E \to DD \quad F \to SZ_d$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere Kreis $B \to S \to A \to B$.

$S \to A \mid Z_a B \mid Z_a C$

$B \to S \mid BZ_a$

$D \to Z_d \mid Z_d E$

$A \to B \mid C \mid Z_c F$

$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$

$E \to DD \quad F \to AZ_d$

$S \to Z_a S \mid Z_a C \mid SZ_a \mid C \mid Z_c F$

$D \to Z_d \mid Z_d E$

$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$

$E \to DD \quad F \to SZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere verbleibende Kettenregeln: $A \to B$.

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere verbleibende Kettenregeln: $A \to B$.

(a) Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d,

(b) Keine Kettenregeln mit linker Seite Z_d und Z_c,

(c) Ersetze Kettenregeln mit linker Seite D,

(d) Ersetze Kettenregeln mit linker Seite C,

(e) Ersetze Kettenregeln mit linker Seite S.

$$\begin{aligned}
S &\to Z_a S \mid Z_a C \\
S &\to S Z_a \mid C \mid Z_c F \\
D &\to Z_d \mid Z_d E \\
C &\to D \mid Z_c \\
Z_a &\to a \\
Z_c &\to c \\
Z_d &\to d \\
E &\to DD \\
F &\to S Z_d
\end{aligned}$$

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere verbleibende Kettenregeln: $A \to B$.

$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid C \mid Z_cF$

$D \to Z_d \mid Z_dE$

$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$

$E \to DD \quad F \to SZ_d$

$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid d \mid Z_dE \mid c \mid Z_cF$

$D \to d \mid Z_dE$

$C \to d \mid Z_dE \mid c$

$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$

$E \to DD \quad F \to SZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere verbleibende Kettenregeln: $A \to B$.

$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid C \mid Z_cF$	$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid d \mid Z_dE \mid c \mid Z_cF$
$D \to Z_d \mid Z_dE$	$D \to d \mid Z_dE$
$C \to D \mid Z_c$	$C \to d \mid Z_dE \mid c$
$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$	$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$
$E \to DD \quad F \to SZ_d$	$E \to DD \quad F \to SZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

4. Schritt: Eliminiere verbleibende Kettenregeln: $A \to B$.

$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid C \mid Z_cF$

$D \to Z_d \mid Z_dE$

$C \to D \mid Z_c$

$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$

$E \to DD \quad F \to SZ_d$

$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid d \mid Z_dE \mid c \mid Z_cF$

$D \to d \mid Z_dE$

$C \to d \mid Z_dE \mid c$

$Z_a \to a \quad Z_c \to c \quad Z_d \to d$

$E \to DD \quad F \to SZ_d$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Der Cocke-Younger-Kasami Algorithmus

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R:

$$S \to A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a}C, \quad B \to S \mid B\mathtt{a}, \quad D \to \mathtt{d} \mid \mathtt{d}DD,$$
$$A \to B \mid C \mid \mathtt{c}A\mathtt{d}, \quad C \to D \mid \mathtt{c}.$$

b) Prüfen Sie, ob die Wörter `addd` und `cadd` in $L(G)$ liegen und verwenden Sie dafür den CYK-Algorithmus.

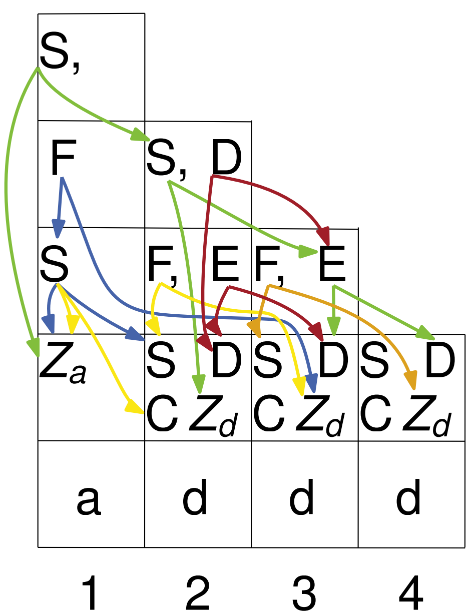
$$S \to Z_aS \mid Z_aC \mid SZ_a \mid d \mid Z_dE \mid c \mid Z_cF$$

$$D \to d \mid Z_dE$$

$$C \to d \mid Z_dE \mid c$$

$$Z_a \to a \qquad Z_c \to c \qquad Z_d \to d$$

$$E \to DD \quad F \to SZ_d$$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Eindeutige und mehrdeutige Grammatiken

Grammatiken

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, *\}$ und $V = \{S, Z\}$. R :

$$S \rightarrow S{+}S \mid S{-}S \mid S{*}S \mid Z,$$

$$Z \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 0Z \mid 1Z \mid 2Z \mid 3Z \mid 4Z \mid 5Z \mid 6Z \mid 7Z \mid 8Z \mid 9Z\ .$$

Bestimmen Sie einen Ableitungsbaum des Wortes `211-42+10*4`. Ist die Grammatik eindeutig oder inhärent mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eindeutige und mehrdeutige Grammatiken

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, \mathtt{4}, \mathtt{5}, \mathtt{6}, \mathtt{7}, \mathtt{8}, \mathtt{9}, +, -, *\}$, $V = \{S, Z\}$, R :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S{+}S \mid S{-}S \mid S{*}S \mid Z, \\ Z &\rightarrow \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \ldots \mid \mathtt{9} \mid \mathtt{0}Z \mid \mathtt{1}Z \mid \ldots \mid \mathtt{9}Z\,. \end{aligned}$$

Ist G eindeutig oder inhärent mehrdeutig?

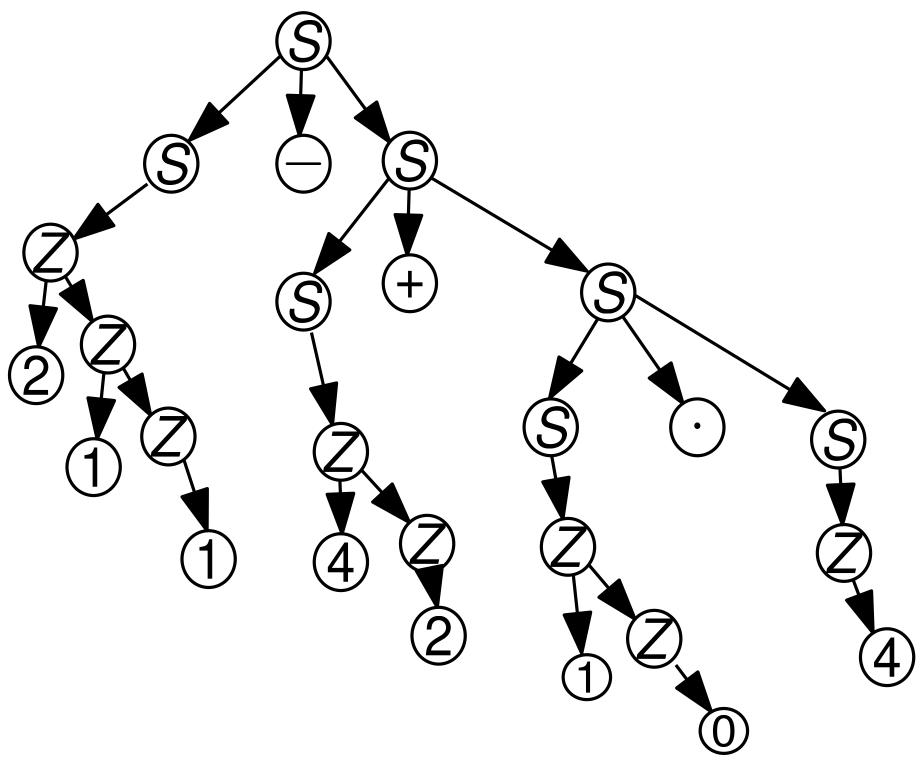
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

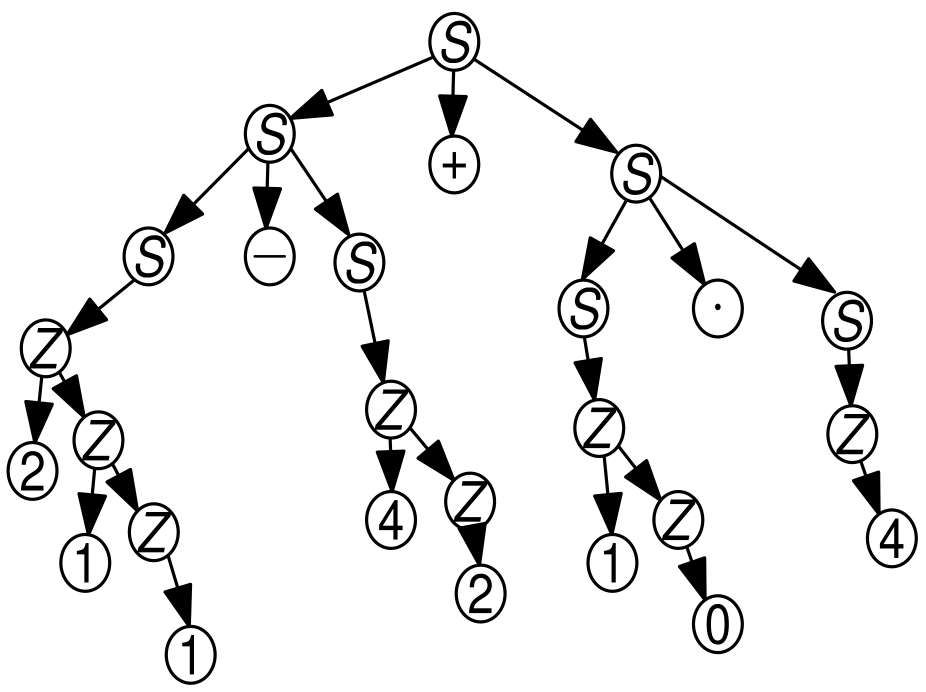
Eindeutige und mehrdeutige Grammatiken

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, *\}$, $V = \{S, Z\}$, R :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S{+}S \mid S{-}S \mid S{*}S \mid Z, \\ Z &\rightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \mid 0Z \mid 1Z \mid \ldots \mid 9Z\,. \end{aligned}$$

Ist G eindeutig oder inhärent mehrdeutig?





Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

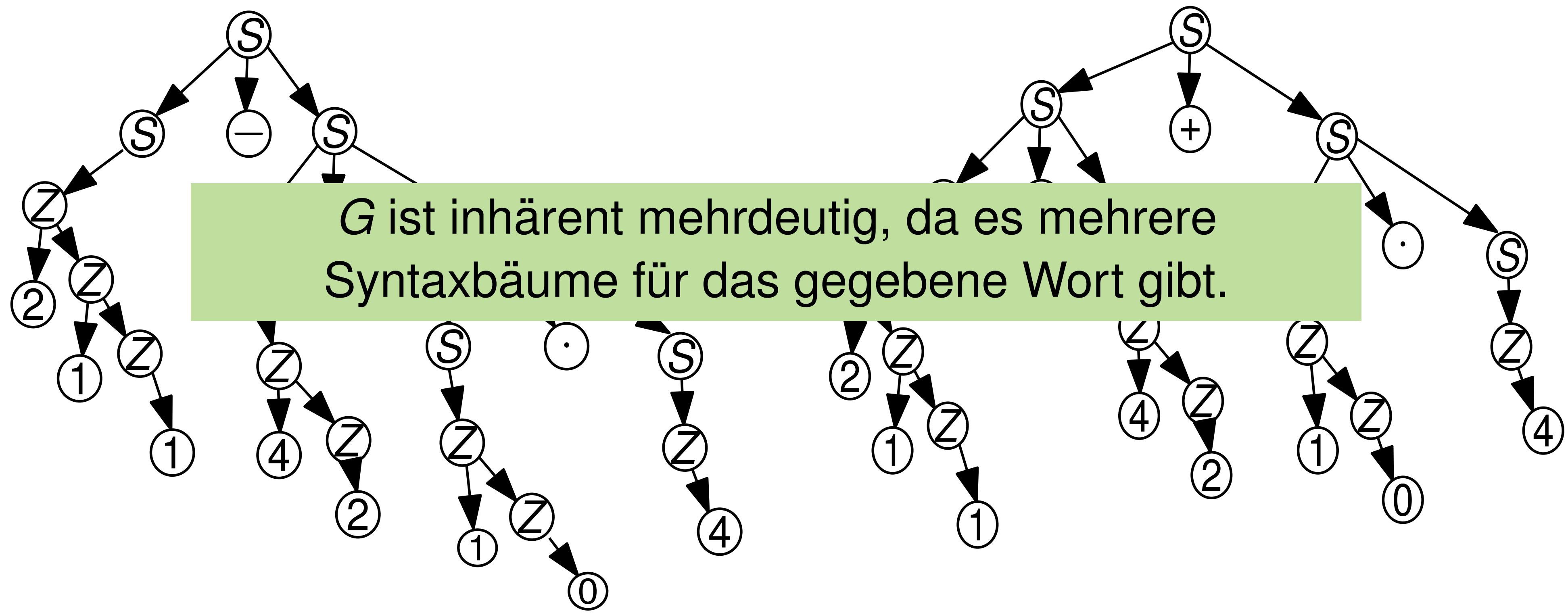
Eindeutige und mehrdeutige Grammatiken

$G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, *\}$, $V = \{S, Z\}$, R :

$$S \rightarrow S{+}S \mid S{-}S \mid S{*}S \mid Z,$$

$$Z \rightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \mid 0Z \mid 1Z \mid \ldots \mid 9Z\ .$$

Ist G eindeutig oder inhärent mehrdeutig?



G ist inhärent mehrdeutig, da es mehrere Syntaxbäume für das gegebene Wort gibt.

NEA aus Grammatik

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $V = \{X, Y, Z, S\}$, welche die Sprache L erzeugt. R sei durch die folgenden Ableitgungsregeln gegeben.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X \\
X &\rightarrow \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y \\
Y &\rightarrow \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z \\
Z &\rightarrow \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S
\end{aligned}
$$

Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$$V = \{X, Y, Z, S\}$$

$$\begin{aligned} R = \{S &\to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, \\ X &\to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, \\ Y &\to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, \\ Z &\to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}. \end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$V = \{X, Y, Z, S\}$

$$\begin{aligned} R = \{&S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, \\ &X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, \\ &Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, \\ &Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}. \end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$$V = \{X, Y, Z, S\}$$

$$\begin{aligned} R = \{S &\to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, \\ X &\to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, \\ Y &\to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, \\ Z &\to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}. \end{aligned}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$V = \{X, Y, Z, S\}$

$$R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X,$$
$$X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y,$$
$$Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z,$$
$$Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}.$$

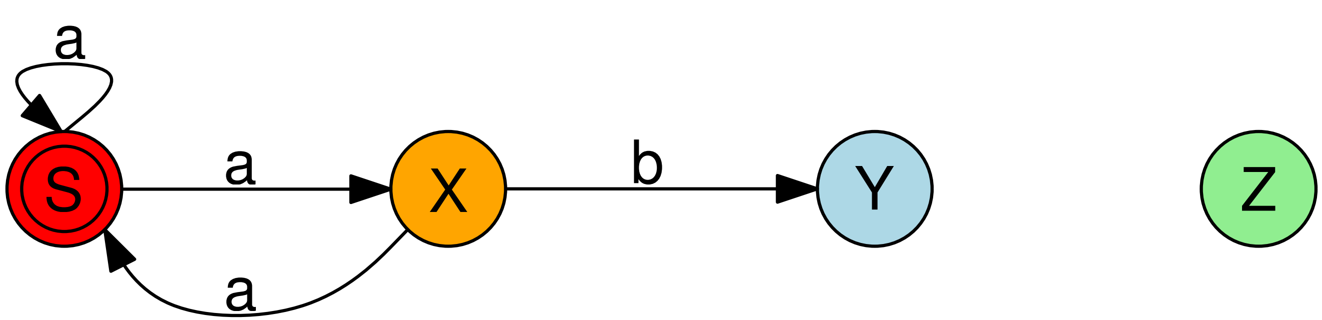
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$V = \{X, Y, Z, S\}$

$$
\begin{aligned}
R = \{&S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X,\\
&X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y,\\
&Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z,\\
&Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}.
\end{aligned}
$$



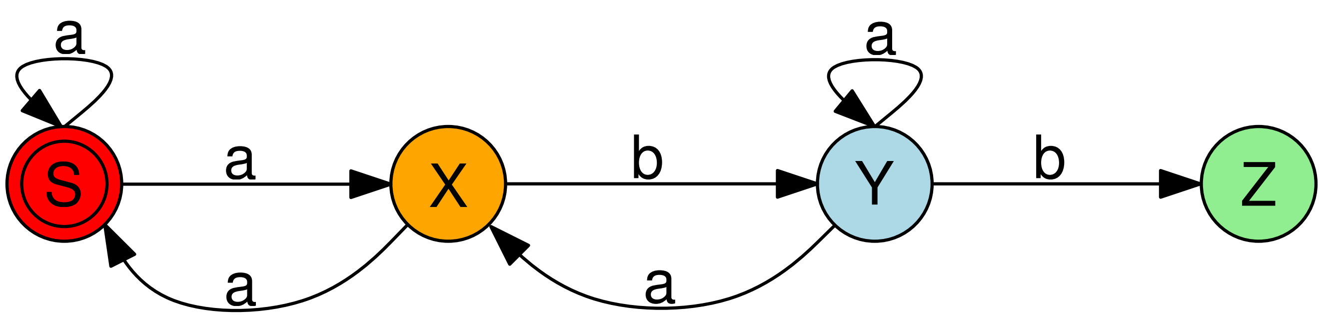
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$V = \{X, Y, Z, S\}$

$$R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X,$$
$$X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y,$$
$$Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z,$$
$$Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}.$$



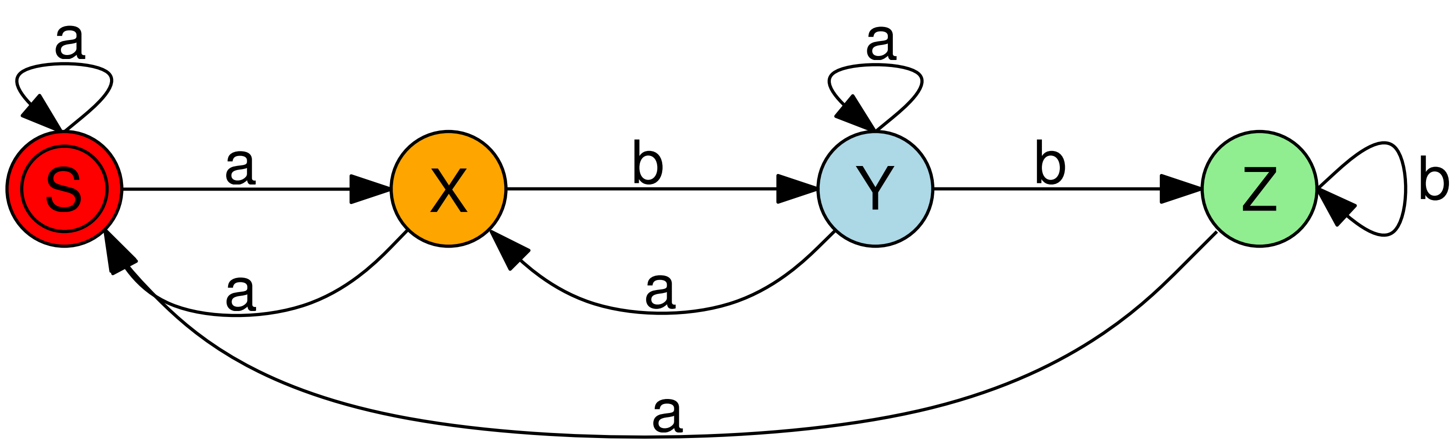
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \rightarrow \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \rightarrow \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \rightarrow \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$V = \{X, Y, Z, S\}$

$$\begin{aligned} R = \{ & S \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, \\ & X \rightarrow \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, \\ & Y \rightarrow \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, \\ & Z \rightarrow \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}. \end{aligned}$$



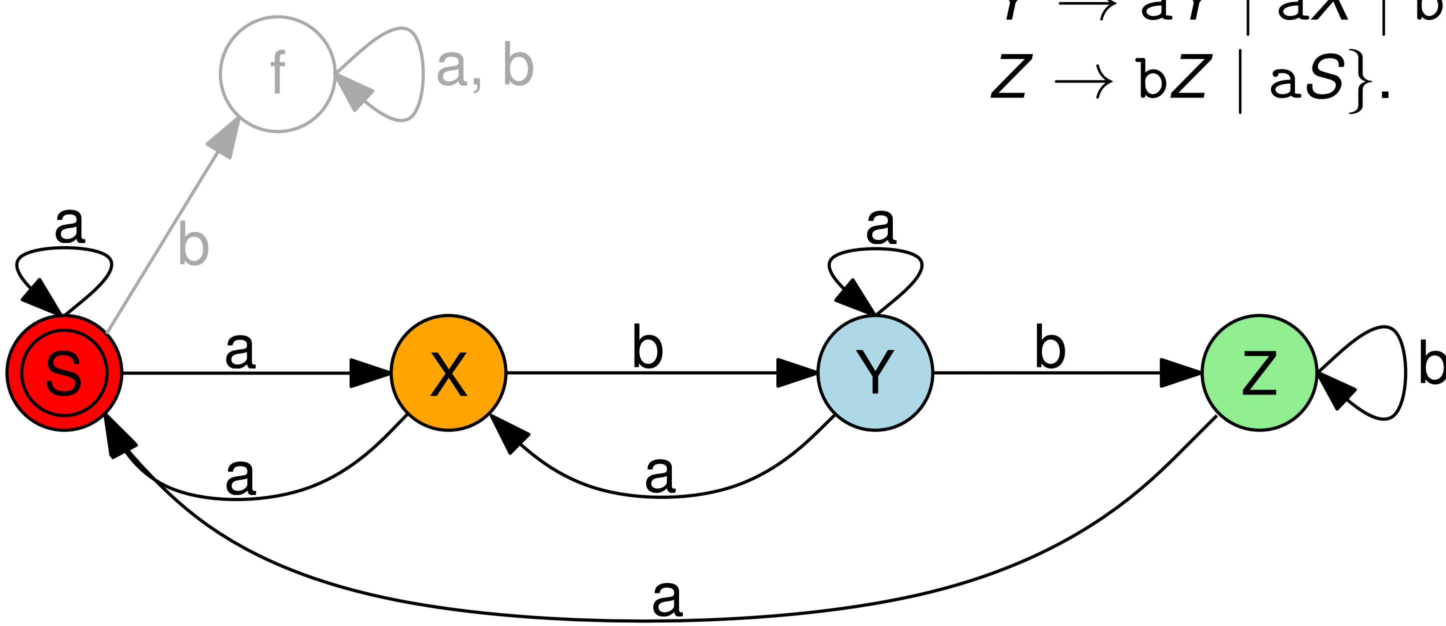
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NEA aus Grammatik

Gegeben: $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $V = \{X, Y, Z, S\}$ und $R = \{S \to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, Z \to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}$.
Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ an, der L erkennt.

$V = \{X, Y, Z, S\}$

$$\begin{aligned} R = \{S &\to \varepsilon \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}X, \\ X &\to \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}Y, \\ Y &\to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}Z, \\ Z &\to \mathtt{b}Z \mid \mathtt{a}S\}. \end{aligned}$$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik