Theoretische Grundlagen der Informatik Übung

5. Übungstermin · 08. Dezember

Marcel Radermacher

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Übersicht

Organisatorisches

- Nicht abgeholte Übungsblätter liegen im ITI Wagner aus
- **Evaluation**
  - Freitextfelder für uns Übungsleiter aufschlussreich

Inhalt

- Polynomielle Reduktion
- $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

Polynomiale Transformation

Eine **polynomiale Transformation** einer Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ in eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist eine Funktion $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ mit den Eigenschaften:

- es existiert eine polynomiale deterministische Turing-Maschine, die f berechnet;
- für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Wir schreiben dann $L_1 \propto L_2$ (L_1 ist polynomial transformierbar in L_2).

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Polynomielle Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Polynomielle Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Sei $f \colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ definiert als

$$f(z) = \begin{cases} aa & \text{falls } z \text{ ungerade ist} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$f(1301) = aa$

$f(1000) = a$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Polynomielle Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Sei $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ definiert als

$$f(z) = \begin{cases} aa & \text{falls } z \text{ ungerade ist} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$f(1301) = aa$

$f(1000) = a$

1 Schritt: Zeige, dass f von DTM berechnet werden kann.

- DTM erhält als Eingabe eine Dezimalzahl.
- DTM löscht alle Zeichen, bis auf das letzte Zeichen.
- Wenn verbleibendes Zeichen ungerade, dann überschreibe mit *aa*
- **Ansonsten** überschreibe mit *a*
- Polynomieller Zeitaufwand.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Polynomielle Transformation

L_1 = Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$

L_2 = Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Sei $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ definiert als

$$f(z) = \begin{cases} aa & \text{falls } z \text{ ungerade ist} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$f(1301) = aa$

$f(1000) = a$

2. Schritt: Zeige, dass für jedes $w \in \Sigma_1^\star$ gilt: $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$

$$w \in L_1 \Leftrightarrow w \text{ ist ungerade.} \Leftrightarrow f(w) = aa \Leftrightarrow f(w) \in L_2.$$

2SAT $\in \mathcal{P}$

2SAT $\in \mathcal{P}$

Problem 2SAT:

- **Gegeben:** Menge U von Variablen, Menge von C Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält.
- **Gefragt:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass 2SAT in $\mathcal{P}$ liegt.

2SAT $\in \mathcal{P}$

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$

Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

2SAT $\in \mathcal{P}$

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$

Gebe $G = (V, E)$ für folgende zwei Instanzen an:

Instanz 1: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Instanz 2: $x_1 \vee x_2 \quad x_1 \vee \neg x_2 \quad \neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_1 \vee \neg x_2$

5 min Zeit

Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

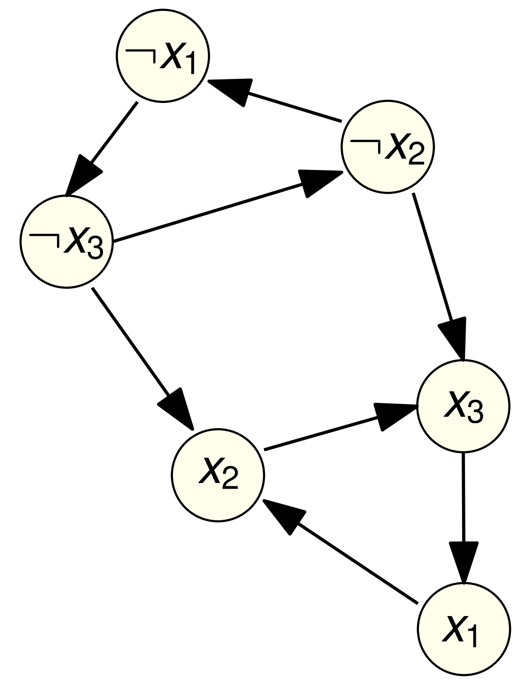
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

2SAT $\in \mathcal{P}$

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.

Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

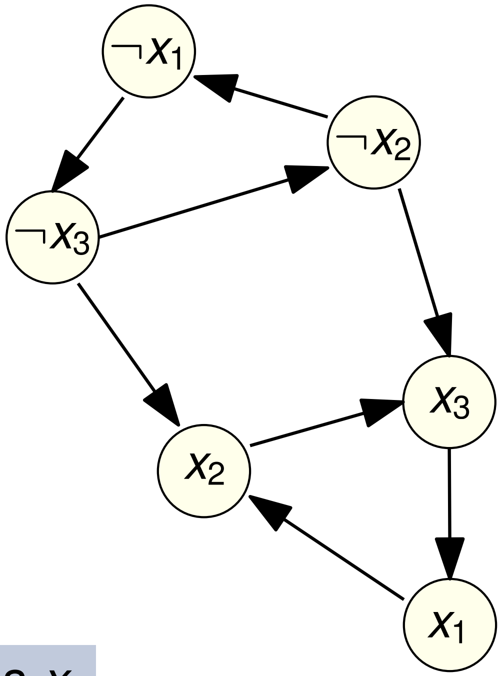
Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

2SAT $\in \mathcal{P}$

Konstruiere gerichteten Graphen $G = (V, E)$

$V = \{x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$

$E = \{(\neg l_1, l_2) \mid l_1 \vee l_2 \in C \text{ oder } l_2 \vee l_1 \in C\}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

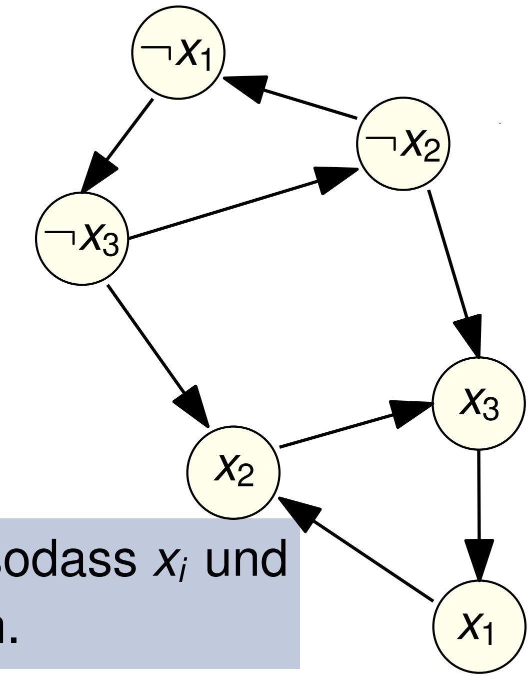
Es gilt:

$a \vee b \equiv \neg a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow a$

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

2SAT $\in \mathcal{P}$



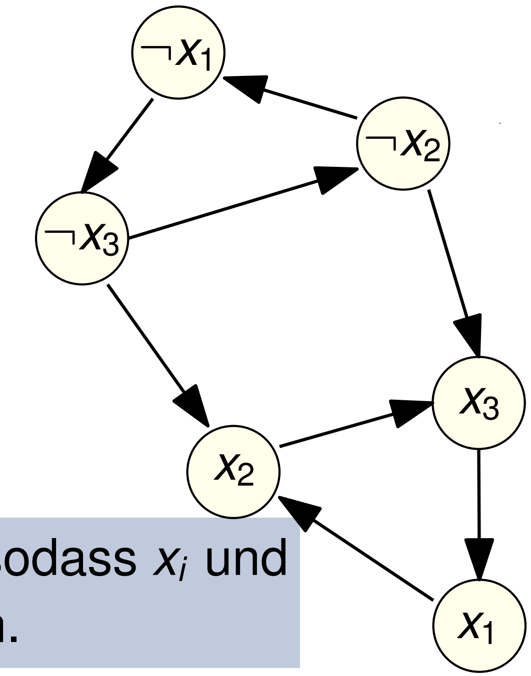
Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \ldots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \ldots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

2SAT $\in \mathcal{P}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

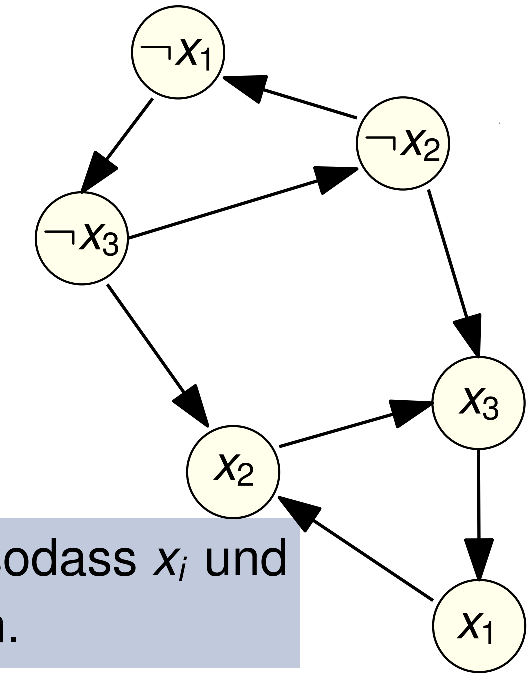
Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

"$\Rightarrow$" **Annahme:** $\exists\ x_i$ und $\neg x_i$, die in derselben stark verbunden Komponente liegen

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

2SAT $\in \mathcal{P}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

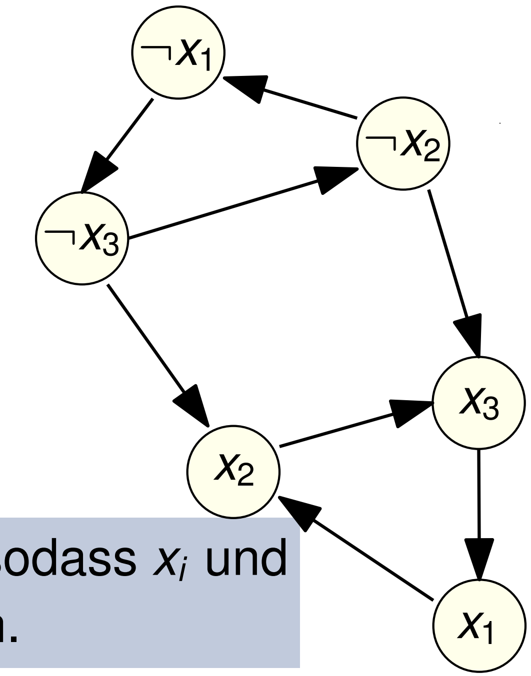
"$\Rightarrow$" **Annahme:** $\exists\ x_i$ und $\neg x_i$, die in derselben stark verbunden Komponente liegen

1. Es gibt gerichteten Pfad $x_i, \dots, \neg x_i$. → Es gilt Implikation $x_i \Rightarrow \neg x_i$
2. Es gibt gerichteten Pfad $\neg x_i, \dots, x_i$. → Es gilt Implikation $\neg x_i \Rightarrow x_i$

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

2SAT $\in \mathcal{P}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

"$\Rightarrow$ " **Annahme:** $\exists\ x_i$ und $\neg x_i$, die in derselben stark verbunden Komponente liegen

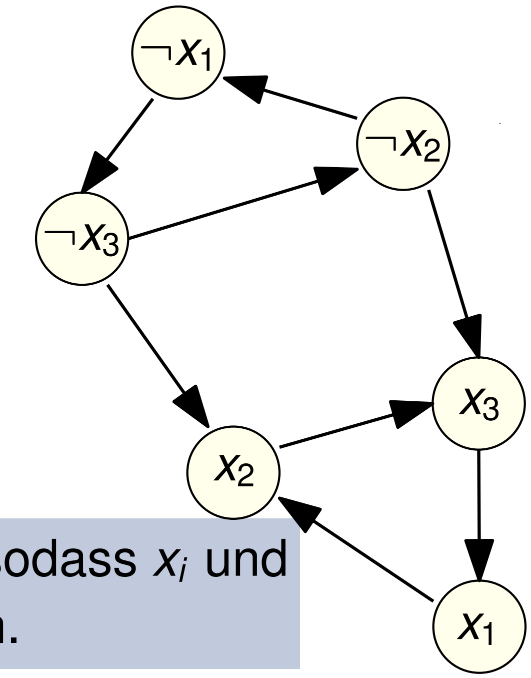
1. Es gibt gerichteten Pfad $x_i, \dots, \neg x_i$. $\longrightarrow$ Es gilt Implikation $x_i \Rightarrow \neg x_i$
2. Es gibt gerichteten Pfad $\neg x_i, \dots, x_i$. $\longrightarrow$ Es gilt Implikation $\neg x_i \Rightarrow x_i$

$\lightning$ C erfüllbar

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

2SAT $\in \mathcal{P}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn
1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

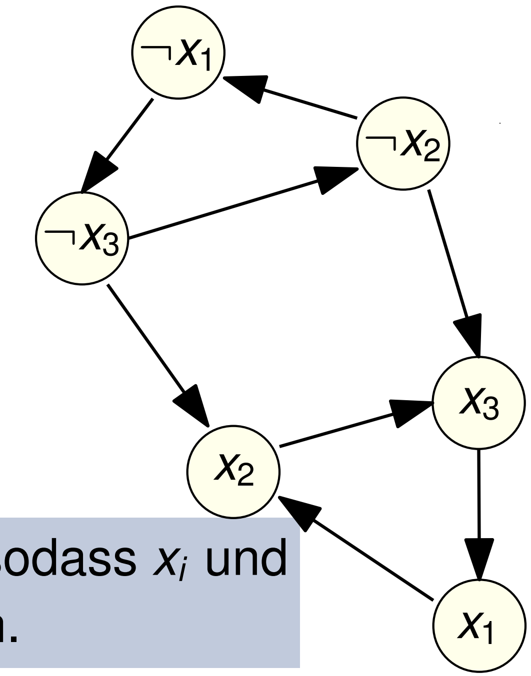
Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

"$\Leftarrow$" Es gibt kein x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

2SAT $\in \mathcal{P}$



Definition: Zwei Knoten $u, v \in V$ liegen in derselben *stark verbundenen Komponente* von G, wenn

1. Es gibt gerichteten Pfad $u, \dots, v$.
2. Es gibt gerichteten Pfad $v, \dots, u$.

Zeige: C ist erfüllbar gdw. es gibt keine Variable x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen.

"$\Leftarrow$" Es gibt kein x_i, sodass x_i und $\neg x_i$ in derselben stark verbunden Komponente liegen

Setze $x_i = \mathit{false}$, falls es gerichteten Pfad $x_i \dots \neg x_i$ gibt, denn es gilt $x_i \Rightarrow \neg x_i$

Setze $x_i = \mathit{true}$, falls es gerichteten Pfad $\neg x_i \dots x_i$ gibt, denn es gilt $\neg x_i \Rightarrow x_i$

Beispiel: $\neg x_1 \vee x_2 \quad \neg x_2 \vee x_3 \quad x_1 \vee \neg x_3 \quad x_2 \vee x_3$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \text{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

1. Schritt: Zeige, dass Π in $\mathcal{NP}$ liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

1. Schritt: Zeige, dass Π in $\mathcal{NP}$ liegt.

a) Orakel rät mögliche Lösung $\mathcal{L}$ für gegebene Instanz

2. Schritt: Zeige, dass es $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

1. Schritt: Zeige, dass Π in $\mathcal{NP}$ liegt.

a) Orakel rät mögliche Lösung $\mathcal{L}$ für gegebene Instanz

b) Gebe in polynomieller Zeit berechenbares Zertifikat an, dass $\mathcal{L}$ eine Lösung von I ist.

→ **Beispiel:** Algorithmus, der in polynomieller Zeit überprüft, ob geratene Lösung $\mathcal{L}$ tatsächlich eine Lösung von I ist.

2. Schritt: Zeige, dass es $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

1. Schritt: Zeige, dass Π in $\mathcal{NP}$ liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in$ NP, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

1. Schritt: Zeige, dass Π in $\mathcal{NP}$ liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$

a) Gebe polynomielle Reduktion $\propto$ an, sodass $\Pi' \propto \Pi$.
Zeige, dass $\propto$ tatsächlich polynomiell ist: z.B. beweise Laufzeit im O-Kalkül.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

Aussage aus Vorlesung:

Falls $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Schema für Beweis, dass Problem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

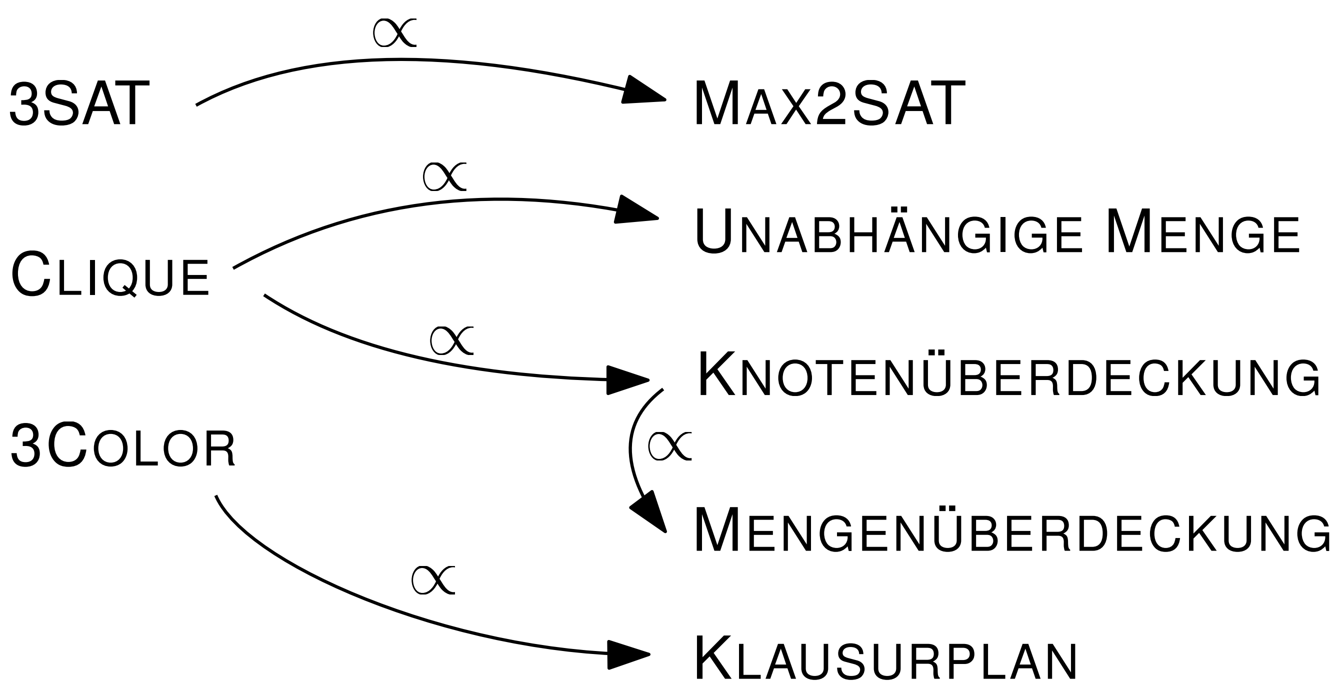
1. Schritt: Zeige, dass Π in $\mathcal{NP}$ liegt.

2. Schritt: Zeige, dass es $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gibt mit $\Pi' \propto \Pi$

a) Gebe polynomielle Reduktion $\propto$ an, sodass $\Pi' \propto \Pi$.
Zeige, dass $\propto$ tatsächlich polynomiell ist: z.B. beweise Laufzeit im O-Kalkül.

b) Sei $I' \in \Pi'$ beliebige Instanz und sei $I \in \Pi$ die Transformation von I' bzgl. $\propto$.
Zeige: I' ist eine *Ja*-Instanz von Π' **genau dann wenn** I ist eine *Ja*-Instanz von Π.

Einige $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme



MAX2SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

1. Schritt: MAX2SAT liegt in $\mathcal{NP}$.

1. Orakel rät die Belegung der Variablen aus U.
2. Überprüfe durch Einsetzen in polynomieller Zeit, ob mindestens k Klauseln erfüllt werden.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf Max2SAT

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\text{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\text{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\text{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

i. Zeigen Sie, dass F_c nicht erfüllbar ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \lor y \lor z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \lor \neg y, \neg y \lor \neg z, \neg x \lor \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \lor \neg w_c, y \lor \neg w_c, z \lor \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

i. Zeigen Sie, dass F_c nicht erfüllbar ist.

Wegen Gruppe I, müssen x, y, z und w_c wahr sein.

$\longrightarrow$ Klauseln aus Gruppe II können nicht wahr sein.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c,}_{\mathrm{I}} \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

MAX2SAT

Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ auf die Klauselmenge

$$F_c = \{\underbrace{x, y, z, w_c}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z}_{\mathrm{II}}, \underbrace{x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c}_{\mathrm{III}}\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können.

x	y	z	w_c	Anzahl erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf Max2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.
  $\longrightarrow$ $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf Max2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.
  → $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.

Was fehlt noch für die Reduktion?

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf Max2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.
  → $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.
- Setze Parameter k auf $7m$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MAX2SAT

Problem MAX2SAT: *(Skript Seite 65)*
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Wahrheitbelegung, die mindestens k Klauseln erfüllt.

Zeigen Sie, dass MAX2SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

2. Schritt: Reduktion von 3SAT auf Max2SAT

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit m Klauseln
- Bilde jede Klausel c von I auf die Klauseln F_c ab.
  → $10m$ Klauseln, die jeweils maximal 2 Literale enthalten.
- Setze Parameter k auf $7m$.
  → MAX2SAT-Instanz I' mit $10m$ Klauseln und Parameter $k = 7m$.

Beweise: I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine *Ja*-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine *Ja*-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine *Ja*-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt

$7m$ Klauseln von I' sind erfüllt.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine *Ja*-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt

$7m$ Klauseln von I' sind erfüllt.

$\Rightarrow$ In jeder Menge F_c sind 7 Klauseln erfüllt

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Max2SAT

Beweise: 3SAT-Instanz I ist erfüllbar genau dann wenn es Wahrheitsbelegung für I' gibt, die $7k$ Klauseln erfüllt.

x	y	z	w_c	#erfüllter Klauseln in F_c
0	0	0	0	6
0	0	1	0	7
0	1	0	0	7
0	1	1	0	7
1	0	0	0	7
1	0	1	0	7
1	1	0	0	7
1	1	1	1	7

$\Rightarrow$ Sei I eine Ja-Instanz, d.h. jede Klausel c ist erfüllbar.

- Damit sind 7 Klauseln in F_c gleichzeitig erfüllbar.
- Folglich sind insgesamt $7m$ Klauseln von I' erfüllbar.

$\Leftarrow$ Sei I' eine *Ja*-Instanz. Es sind also mindestens $7m$ Klauseln erfüllt.

Pro Menge F_c sind maximal 7 Klauseln gleichzeitig erfüllt

$7m$ Klauseln von I' sind erfüllt.

$\Rightarrow$ In jeder Menge F_c sind 7 Klauseln erfüllt

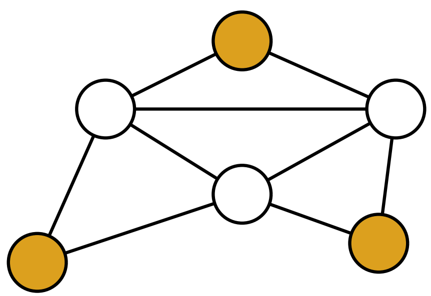
aus folgt das jede Klausel c von I ebenfalls erfüllt.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

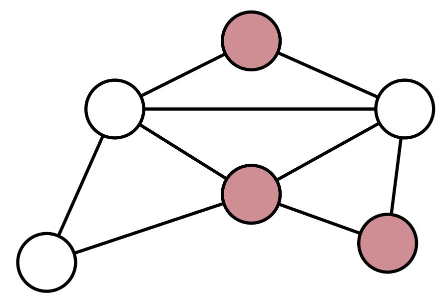
UNABHÄNGIGE MENGE ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge

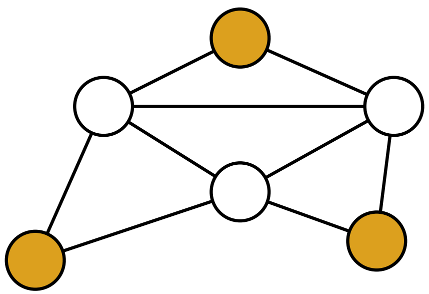


Keine unabhängige Menge

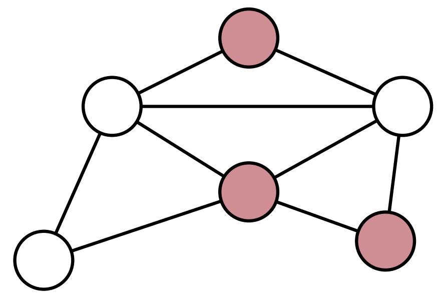
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge

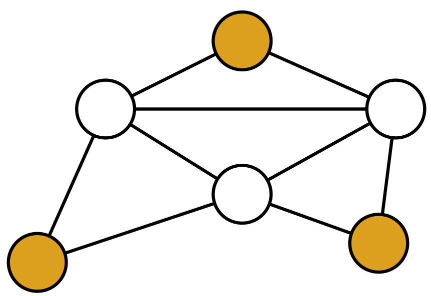


Keine unabhängige Menge

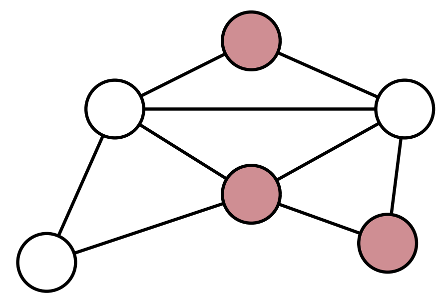
1. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE liegt in $\mathcal{NP}$.

Unabhängige Menge

Problem Unabhängige Menge
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

1. Schritt: Unabhängige Menge liegt in $\mathcal{NP}$.

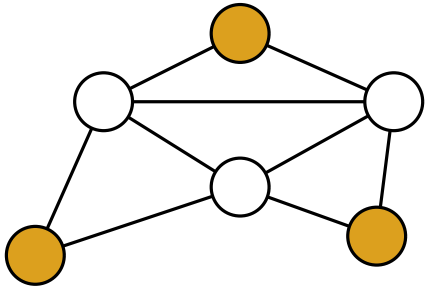
- Orakel rät Knotenmenge V'.
- Überprüfe, ob V' unabhängige Menge von G ist mit $k \leq |V'|$.
  - $|V'| \geq k$
  - V' sind Knoten aus V
  - Es gibt keine zwei Knoten $u, v \in V'$ mit $\{u, v\} \in E$.

Laufzeit $O(n^2)$

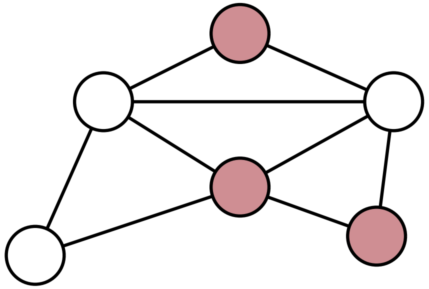
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



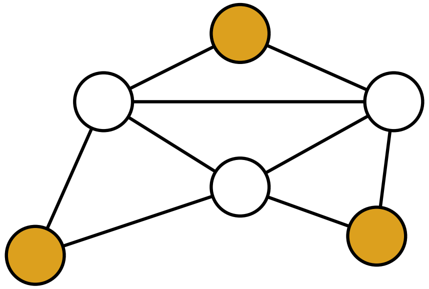
Keine unabhängige Menge

2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist $\mathcal{NP}$-schwer.

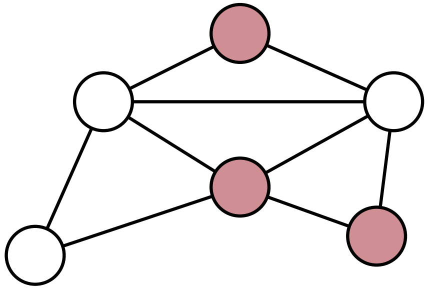
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

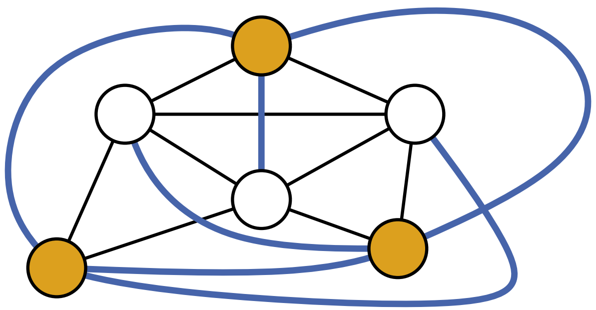
2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Problem CLIQUE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Clique C in G mit $|C| \geq k$?
Hinweis: $C \subseteq V$ heißt *Clique*, falls für jedes Paar $u, v \in C$ die Kante $\{u, v\} \in E$ existiert.

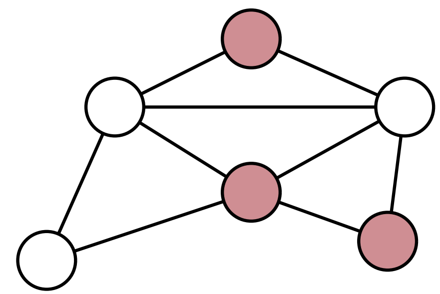
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist $\mathcal{NP}$-schwer. CLIQUE $\propto$ UNABHÄNGIGE MENGE

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von Clique.

Erstelle Komplementgraph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$

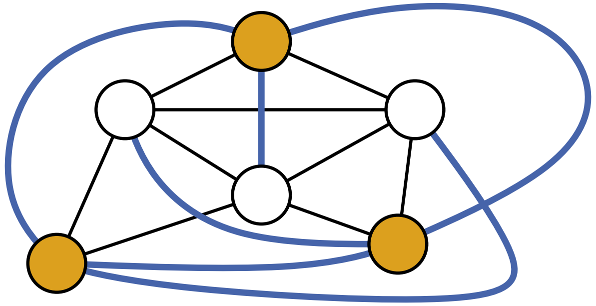
Instanz für UNABHÄNGIGE MENGE ist $I' = (\overline{G}, k)$

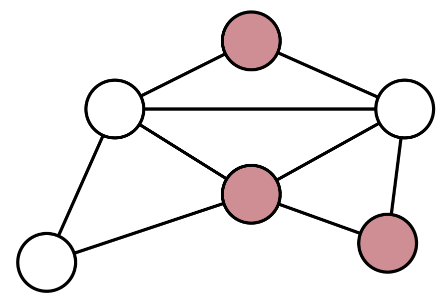
Kopieren des Graphen + $\overline{E}$ erstellen $\rightarrow$ Laufzeit $O(|V|^2)$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.





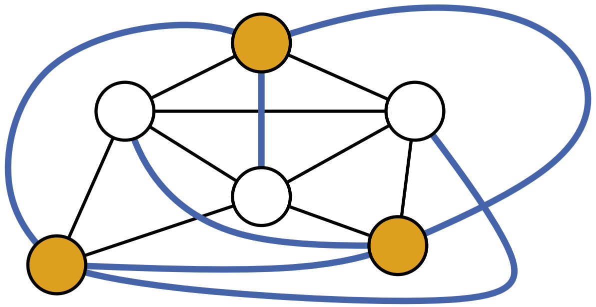
2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Reduktion ist korrekt: G hat Clique C mit $|C| \geq k$. $\Leftrightarrow$
$\overline{G}$ hat unabhängige Menge V' mit $|V'| \geq k$

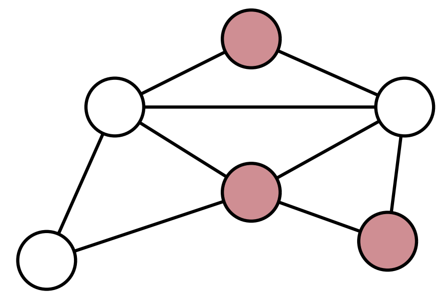
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Unabhängige Menge

Problem UNABHÄNGIGE MENGE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.



Unabhängige Menge



Keine unabhängige Menge

2. Schritt: UNABHÄNGIGE MENGE ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Reduktion ist korrekt: G hat Clique C mit $|C| \geq k$. $\Leftrightarrow$
$\overline{G}$ hat unabhängige Menge V' mit $|V'| \geq k$

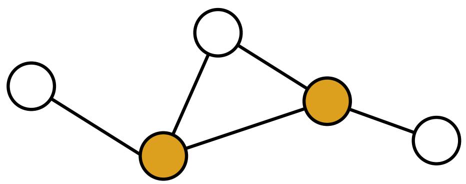
"$\Rightarrow$" Knoten aus C sind in $\overline{G}$ nicht miteinander verbunden $\rightarrow$ C ist unabhängige Menge in $\overline{G}$ mit $|C| \geq k$

"$\Leftarrow$" Knoten aus V' sind in G miteinander verbunden $\rightarrow$ V' ist Clique in G mit $V' \geq k$

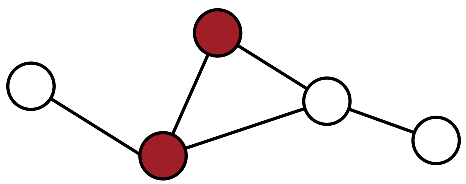
KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung

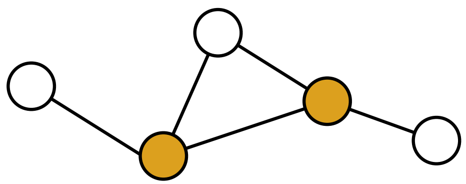


Keine Knotenüberdeckung

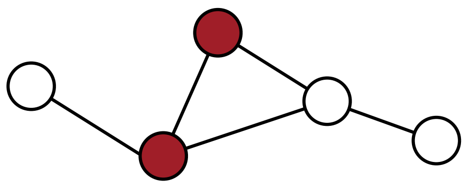
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem Knotenüberdeckung
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



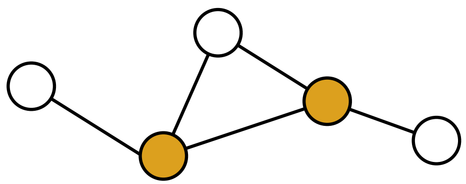
Keine Knotenüberdeckung

1. Schritt: Knotenüberdeckung liegt in $\mathcal{NP}$

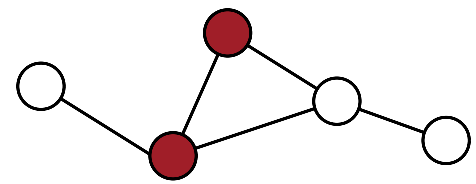
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

1. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG liegt in $\mathcal{NP}$

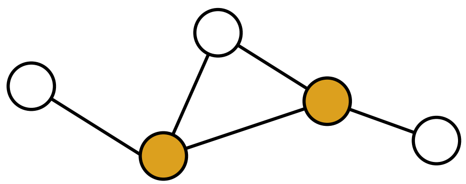
- Orakel rät Knotenmenge V'.
- Überprüfe, ob V' Knotenüberdeckung von G ist mit $|V'| \leq k$.
  - $|V'| \leq k$s
  - V' sind Knoten aus V
  - Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.

Laufzeit $O(n^3)$

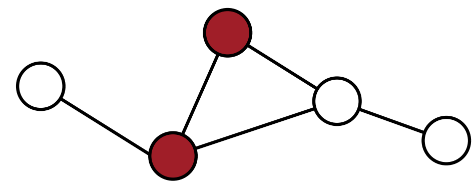
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



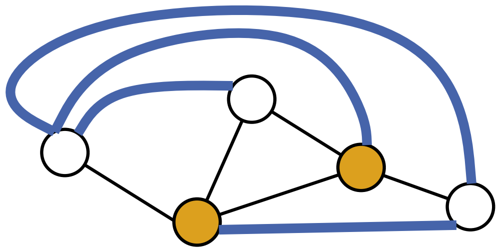
Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

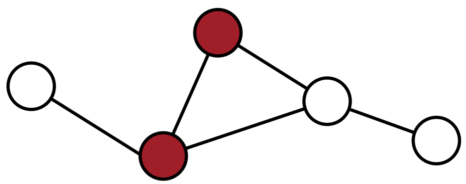
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



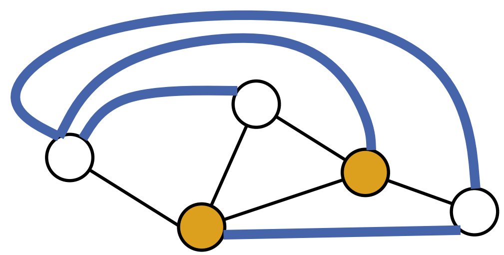
Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

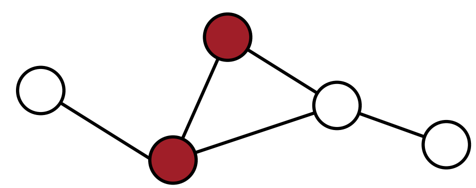
Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Knotenüberdeckung

Problem Knotenüberdeckung
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: Knotenüberdeckung ist $\mathcal{NP}$-schwer. Clique $\propto$ Knotenüberdeckung

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Beweis:

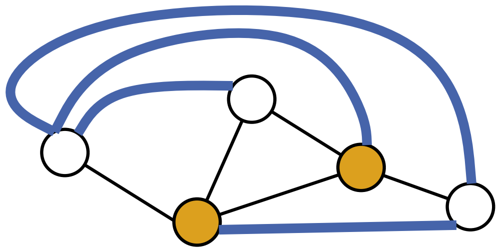
"$\Rightarrow$" Angenommen es gibt $\{u, v\} \in \overline{E}$, mit $u \notin V'$ und $v' \notin V'$.

Es gilt also $u \in C$ und $v \in C$. $\Rightarrow$ $\{u, v\} \in E$, weil C Clique von G $\lightning$ Def. $\overline{G}$

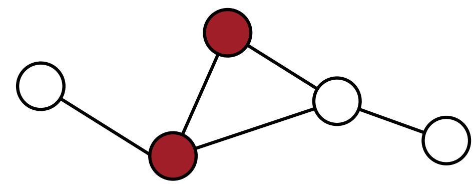
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Angenommen es gibt $\{u, v\} \in \overline{E}$, mit $u \notin V'$ und $v' \notin V'$.
Es gilt also $u \in C$ und $v \in C$. $\Rightarrow$ $\{u, v\} \in E$, weil C Clique von G ↯ Def. $\overline{G}$

"$\Leftarrow$" Seien $u, v \in V \setminus V'$. Es gibt keine Kante $\{u, v\} \in \overline{E}$, sonst ist V' keine Knotenüb.
Damit gibt es die Kante $\{u, v\}$ in G.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von CLIQUE.

Erstelle Komplementgraph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$

Instanz für KNOTENÜBERDECKUNG ist $I' = (\overline{G}, |V| - k)$

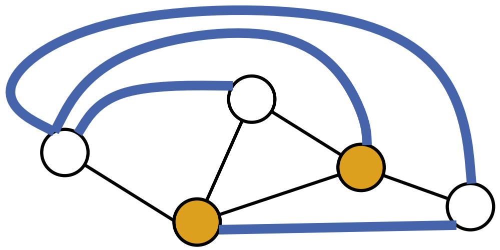
Kopieren des Graphen + $\overline{E}$ erstellen $\rightarrow$ Laufzeit $O(|V|^2)$

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

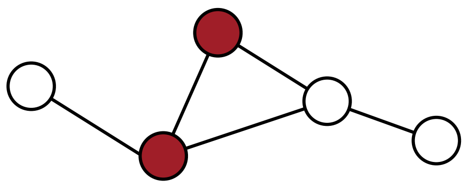
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung

Problem KNOTENÜBERDECKUNG
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeck.*, falls für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.



Knotenüberdeckung



Keine Knotenüberdeckung

2. Schritt: KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer. CLIQUE $\propto$ KNOTENÜBERDECKUNG

Reduktion ist korrekt: G hat Clique C mit $|C| \geq k$. $\Leftrightarrow$
$\overline{G}$ hat Knotenüberdeckung V' mit $|V'| \leq |V| - k$

Korrektheit folgt direkt aus Lemma.

Lemma: Sei $V' \subseteq V$. $C = V \setminus V'$ ist Clique in $G \Leftrightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung von $\overline{G}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

MENGENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \dots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

Beispiel: $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S_1 = \{1, 2, 3\}$ $S_2 = \{2, 4\}$ $S_3 = \{3, 4\}$ $S_4 = \{4, 5\}$

k=4: $\mathcal{U} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

k=2: $\mathcal{U} = S_1 \cup S_4$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \dots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

1. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG liegt in $\mathcal{NP}$.

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

1. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG liegt in $\mathcal{NP}$.

- Orakel rät Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$.
- Überprüfe
  - Nicht zu viele Zahlen: $\ell \leq k$
  - Zahlen im richtigen Zahlenbereich: $1 \leq i_j \leq n$ für alle $1 \leq j \leq \ell$
  - $\bigcup_{j=1}^{\ell} S_{i_j} = \mathcal{U}$

In polynomieller Zeit berechenbar.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG

Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?

Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

2. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \dots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

2. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Problem MENGENÜBERDECKUNG

Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?

Hinweis: Verwenden Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG für die Reduktion.

2. Schritt: MENGENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Rightarrow$" G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"⇒" G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$

Knoten induzieren Menge C an Indizes. **Zeige:** $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Rightarrow$" G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$

Knoten induzieren Menge C an Indizes. **Zeige:** $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$

Betrachte Kante $e \in E = \mathcal{U}$. Es gibt Knoten v in V', so dass e inzident zu v ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Rightarrow$" G besitzt Knotenüberdeckung V' der Größe $\ell = |V| \leq k$

Knoten induzieren Menge C an Indizes. **Zeige:** $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$

Betrachte Kante $e \in E = \mathcal{U}$. Es gibt Knoten v in V', so dass e inzident zu v ist.

Sei i der Index von v, somit enthält S_i die Kante e.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C, es gilt $|V'| \leq m = k$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C, es gilt $|V'| \leq m = k$.

Betrachte beliebige Kante $e \in \mathcal{U}$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \ldots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C, es gilt $|V'| \leq m = k$.

Betrachte beliebige Kante $e \in \mathcal{U}$.

Da C Mengenüberdeckung von $\mathcal{U}$ ist, gibt es $i \in C$ mit $e \in S_i$.

Mengenüberdeckung

Reduktion: KNOTENÜBERDECKUNG auf MENGENÜBERDECKUNG

Sei $I = (G = (V, E), k)$ Instanz von KNOTENÜBERDECKUNG, mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Sei $\mathcal{U} = E$
2. Def. n Teilmengen $S_1, \dots, S_n$ von $\mathcal{U}$: S_i enthält alle Kanten, die zu v_i inzident sind.
3. Setze $k = m$

"$\Leftarrow$" Es gibt Menge $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|C| \leq k$ und $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$.

Jede Menge S_i mit $i \in C$ korrespondiert mit einem Knoten v_i.

Sei V' die Menge der Knoten induziert duch C, es gilt $|V'| \leq m = k$.

Betrachte beliebige Kante $e \in \mathcal{U}$.

Da C Mengenüberdeckung von $\mathcal{U}$ ist, gibt es $i \in C$ mit $e \in S_i$.

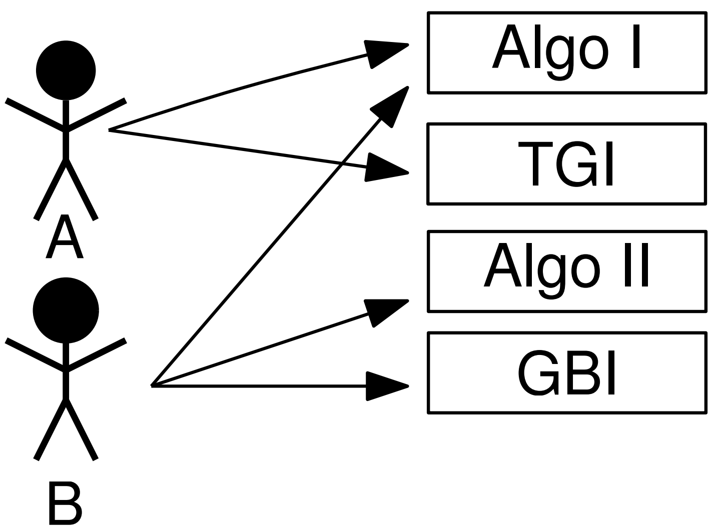
Nach Definition ist v_i inzident zu e und $v_i \in V' \Rightarrow V'$ ist Knotenüberdeckung

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

KLAUSURPLAN ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Klausurplan

Beispiel:



	Montag	Dienst
1. Block		
2. Block		
3. Block		
4. Block		
. . .		

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

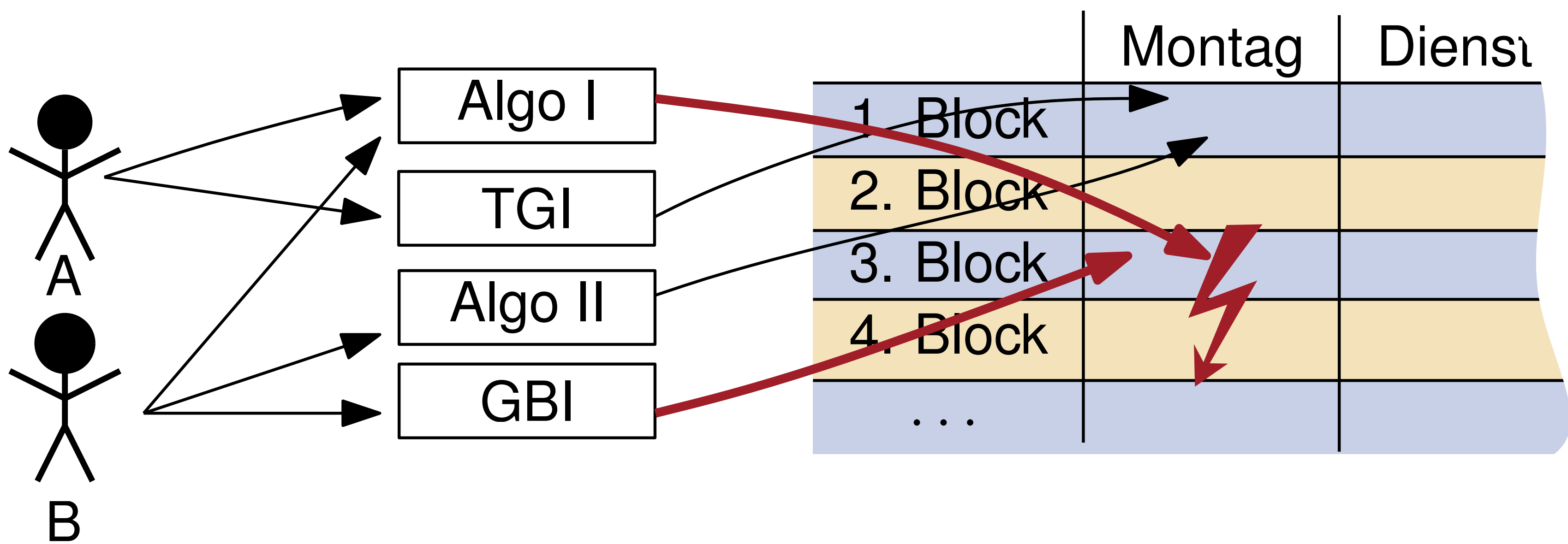
Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen.
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k.

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

Beispiel:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen.
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k.

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen.
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k.

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

1. Schritt: Zeige, dass Klausurplan in $\mathcal{NP}$ liegt.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN

Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen.
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k.

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

1. Schritt: Zeige, dass Klausurplan in $\mathcal{NP}$ liegt.

- Orakel rät Zuweisung der Klausuren.
- Überprüfe
  - Zuweisung ist gültig.
  - Berechne Konflikte $O(|S||K^2|)$ Zeit
  - Überprüfe, dass Anzahl Konflikte $\leq k$

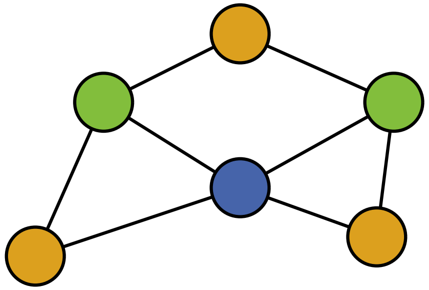
Klausurplan

Problem KLAUSURPLAN
Gegeben:
- Menge K an Klausuren
- Menge S an Studenten, die an Klausuren teilnehmen.
- Mögliche Zeitbereiche
- Parameter k.

Frage: Gibt es Zuweisung der Klausuren auf Zeitbereiche, sodass es maximal k Konflikte gibt?

2. Schritt: Zeige, dass KLAUSURPLAN NP-schwer ist. 3COLOR $\propto$ KLAUSURPLAN

Problem 3COLOR
Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und Parameter k
Frage: Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens k Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?



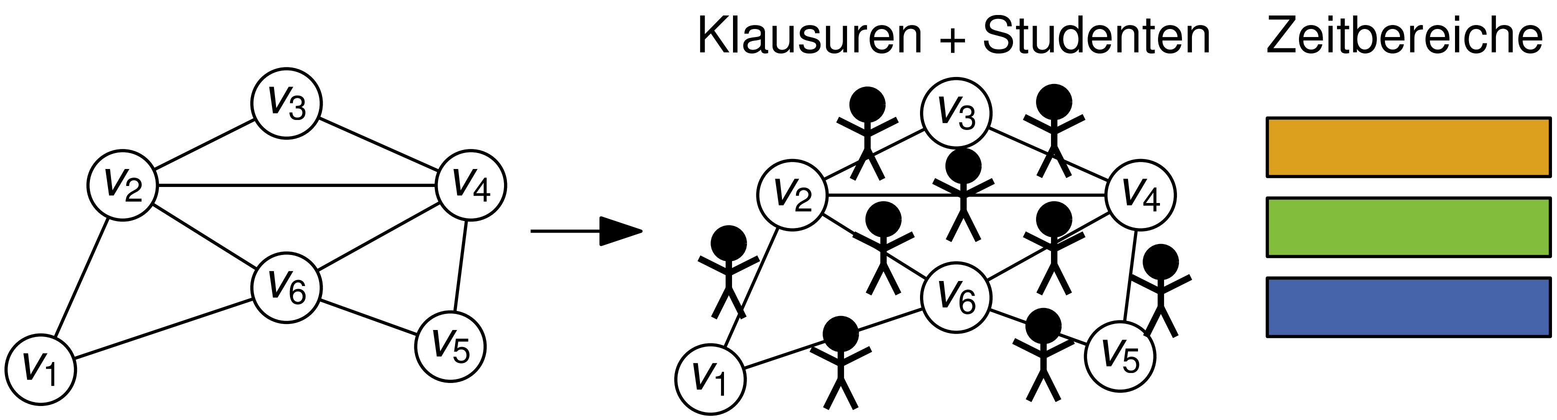
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.



Problem 3COLOR
Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Frage: Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens 3 Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Rightarrow$" Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3 färbbar

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Rightarrow$" Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3 färbbar

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Rightarrow$" Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3 färbbar

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausuren, die in G durch eine Kante verbunden sind, werden unterschiedlichen Zeitbereichen zugewiesen.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Rightarrow$" Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3 färbbar

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausuren, die in G durch eine Kante verbunden sind, werden unterschiedlichen Zeitbereichen zugewiesen.

Studenten entsprechen genau diesen Kanten.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Rightarrow$" Die Instanz $I = (G = (V, E))$ ist 3 färbbar

Die gegebene Färbung ordnet jeder Klausur einen Zeitbereich zu.

Klausuren, die in G durch eine Kante verbunden sind, werden unterschiedlichen Zeitbereichen zugewiesen.

Studenten entsprechen genau diesen Kanten.

$\rightarrow$ Klausurenplan hat keine Konflikte.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Jeder Student nimmt nur an Klausuren teil, die nicht zur selben Zeit statt finden.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.
Jede Klausur entspricht einem Knoten.

Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Jeder Student nimmt nur an Klausuren teil, die nicht zur selben Zeit statt finden.
Jeder Student entspricht einer Kante in G.

Klausurplan

Reduktion: Gegeben Instanz $I = (G = (V, E))$ von 3COLOR.

- Für jeden Knoten $u \in V$ führe Klausur u ein.
- Für jede Farbe führe einen Zeitbereich ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ führe Student ein, der an u und v teilnehmen möchte.

Setze $k = 0$.

"$\Leftarrow$" Der Konstruierte Klausurenplan hat keine Konflikte

Jeder Zeitbereich entspricht einer Farbe.

Jede Klausur entspricht einem Knoten.

→ Zuordnung Klausuren zu Zeitbereichen liefert Färbung der Knoten.

Jeder Student nimmt nur an Klausuren teil, die nicht zur selben Zeit statt finden.

Jeder Student entspricht einer Kante in G.

→ Benachbarte Knoten in G haben unterschiedliche Färbungen.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Reduktionsschemas

Beschränkung eines Problems

- offensichtliche 1 zu 1 Beziehung
- 3SAT $\propto$ 4SAT

Lokales Ersetzen

- Veränderung der lokalen Struktur
- weitesgehend unabhängige Veränderung
- 3SAT $\propto$ MAX2SAT

Komponenten Design

- Modulierung von Interaktion zwischen Komponenten
- Modeliere z.B. Literale und Klauseln
- 3SAT $\propto$ 3COLOR

$\mathcal{NP} = co - \mathcal{NP}$?

$\mathcal{NP}$ = co-$\mathcal{NP}$?

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

$\mathcal{NP}$ = **co-$\mathcal{NP}$?**

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Wiederholung:

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L, für die es eine nichtdeterministische Turingmaschine gibt, die L in polynomieller Zeit erkennt.

Die Klasse **co**-$\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen deren Komplement in $\mathcal{NP}$ enthalten ist:

$$\text{co-}\mathcal{NP} = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid \Sigma^\star \setminus L \in \text{NP}\}$$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

$\mathcal{NP}$ = co-$\mathcal{NP}$?

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Sei Π_1 ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und sei Π_1^c das Komplement hierzu.

$\mathcal{NP}$ = co-$\mathcal{NP}$?

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Sei Π_1 ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und sei Π_1^c das Komplement hierzu.

Annahme: $\Pi_1^c \in \mathcal{NP}$

$\mathcal{NP}$ = co-$\mathcal{NP}$?

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Sei Π_1 ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und sei Π_1^c das Komplement hierzu.

Annahme: $\Pi_1^c \in \mathcal{NP}$

Zeige: Komplement Π_2^c eines beliebigen Problems Π_2 liegt in $\mathcal{NP}$.

$\mathcal{NP}$ = co-$\mathcal{NP}$?

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Sei Π_1 ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und sei Π_1^c das Komplement hierzu.

Annahme: $\Pi_1^c \in \mathcal{NP}$

Zeige: Komplement Π_2^c eines beliebigen Problems Π_2 liegt in $\mathcal{NP}$.

Π_1 ist $\mathcal{NP}$-vollständig: Es gibt Reduktion φ von Π_2 auf Π_1

φ ist auch Reduktion von Π_2^c auf Π_1^c

$\mathcal{NP}$ = co-$\mathcal{NP}$?

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Sei Π_1 ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und sei Π_1^c das Komplement hierzu.

Annahme: $\Pi_1^c \in \mathcal{NP}$

Zeige: Komplement Π_2^c eines beliebigen Problems Π_2 liegt in $\mathcal{NP}$.

Π_1 ist $\mathcal{NP}$-vollständig: Es gibt Reduktion φ von Π_2 auf Π_1

φ ist auch Reduktion von Π_2^c auf Π_1^c

Sei I_2^c eine Instanz von Π_2^c.

Transformiere die Instanz in eine Instanz von Π_1^c: $I_1^c = \varphi(I_2^c)$.

$\mathcal{NP}$ = **co-$\mathcal{NP}$?**

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems in $\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $\mathcal{NP}$=co-$\mathcal{NP}$

Sei Π_1 ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und sei Π_1^c das Komplement hierzu.

Annahme: $\Pi_1^c \in \mathcal{NP}$

Zeige: Komplement Π_2^c eines beliebigen Problems Π_2 liegt in $\mathcal{NP}$.

Π_1 ist $\mathcal{NP}$-vollständig: Es gibt Reduktion φ von Π_2 auf Π_1

φ ist auch Reduktion von Π_2^c auf Π_1^c

Sei I_2^c eine Instanz von Π_2^c.

Transformiere die Instanz in eine Instanz von Π_1^c: $I_1^c = \varphi(I_2^c)$.

Da Π_1^c in $\mathcal{NP}$ liegt, kann eine NTM $\mathcal{M}$ wie folgt auf I_1^c arbeiten.

1. $\mathcal{M}$ berechnet eine Lösung von I_1^c
2. $\mathcal{M}$ überprüft ob Ja-Instanz
3. Falls ja, dann auch I_2^c sonst ist I_2^c keine Ja-Instanz.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner