

Theoretische Grundlagen der Informatik

Übung

2. Übungstermin · 8. November 2016
Guido Brückner

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · LEHRSTUHL ALGORITHMIK

Gliederung

Inhalt

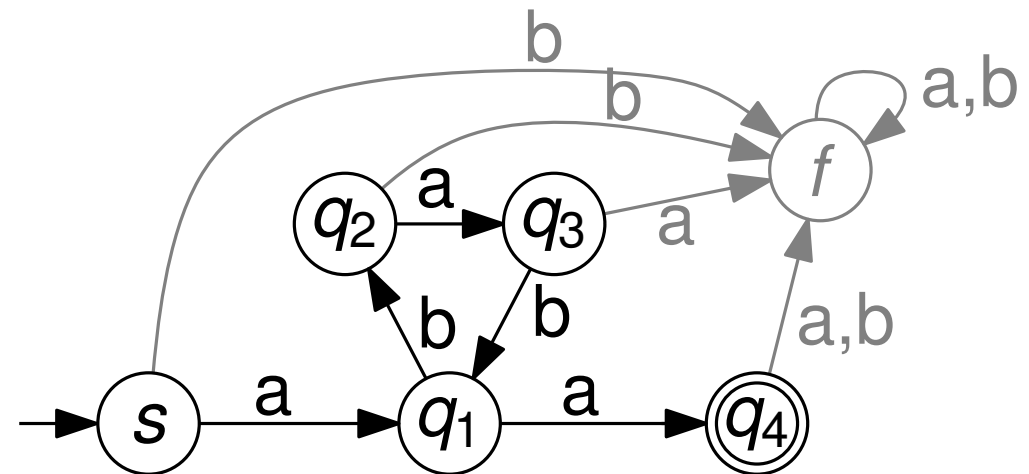
- Pumping Lemma
- Bestimmung eines regulären Ausdrucks
- Nichtdeterministische endliche Automaten
- ε -Abschluss
- Potenzmengenkonstruktion
- Minimierung von Automaten

Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.



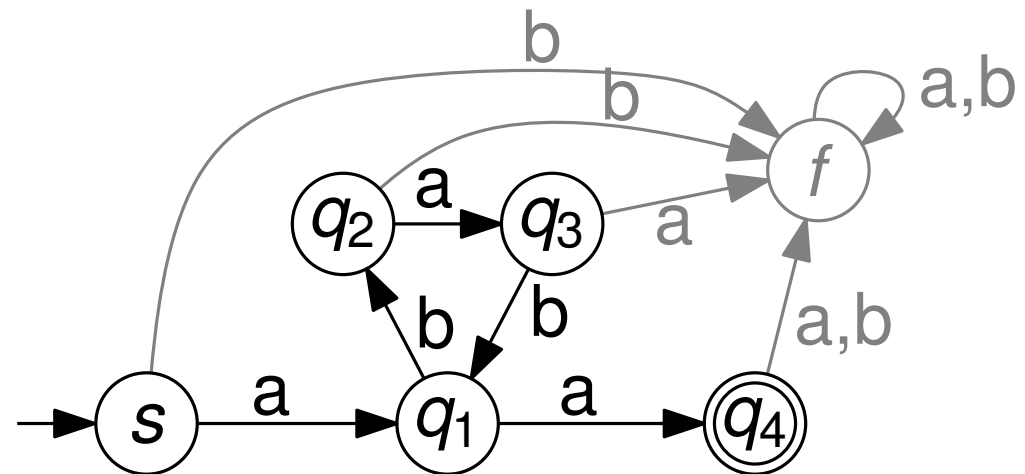
Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und \mathcal{A} entsprechender endlicher Automat.



Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

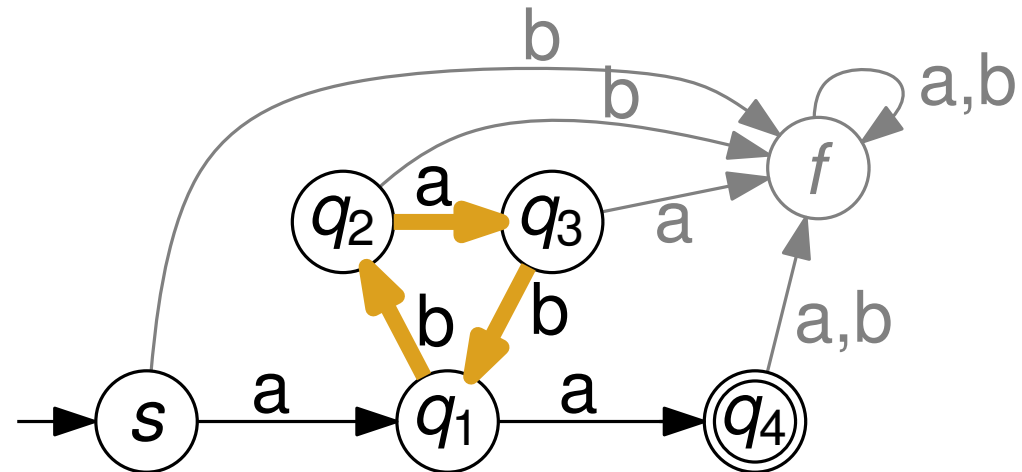
$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und \mathcal{A} entsprechender endlicher Automat.

Egal wie viele Zustände für \mathcal{A} verwendet werden, für jedes Wort $w \in L$, das mehr Zeichen hat als \mathcal{A} Zustände, gilt

während der Abarbeitung von w durchläuft man einen Zyklus \mathcal{Z} in \mathcal{A} .



Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und \mathcal{A} entsprechender endlicher Automat.

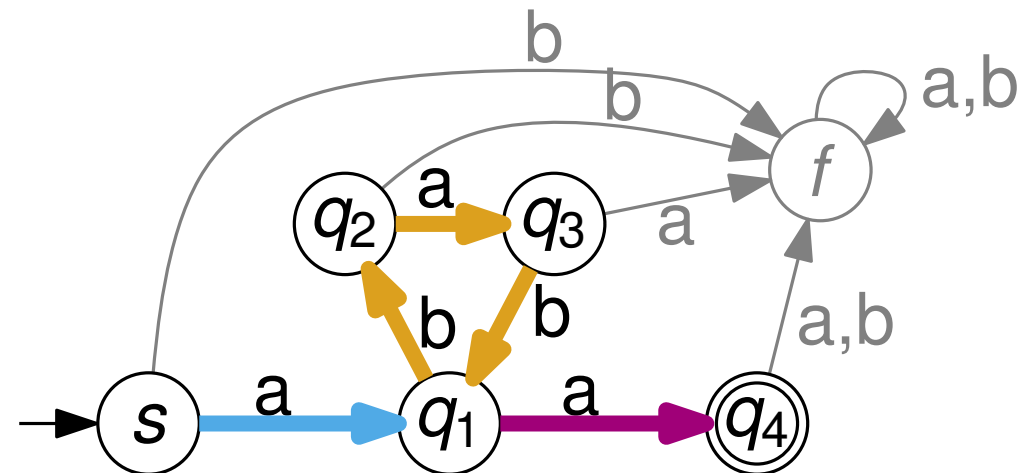
Egal wie viele Zustände für \mathcal{A} verwendet werden, für jedes Wort $w \in L$, das mehr Zeichen hat als \mathcal{A} Zustände, gilt

während der Abarbeitung von w durchläuft man einen Zyklus \mathcal{Z} in \mathcal{A} .

Sei

- u das Teilwort von w , das vor \mathcal{Z} ,
- v das Teilwort von w , das in \mathcal{Z} , und
- x das Teilwort von w , das nach \mathcal{Z}

abgearbeitet wird.



Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Erklärung: Sei L reguläre Sprache und \mathcal{A} entsprechender endlicher Automat.

Egal wie viele Zustände für \mathcal{A} verwendet werden, für jedes Wort $w \in L$, das mehr Zeichen hat als \mathcal{A} Zustände, gilt

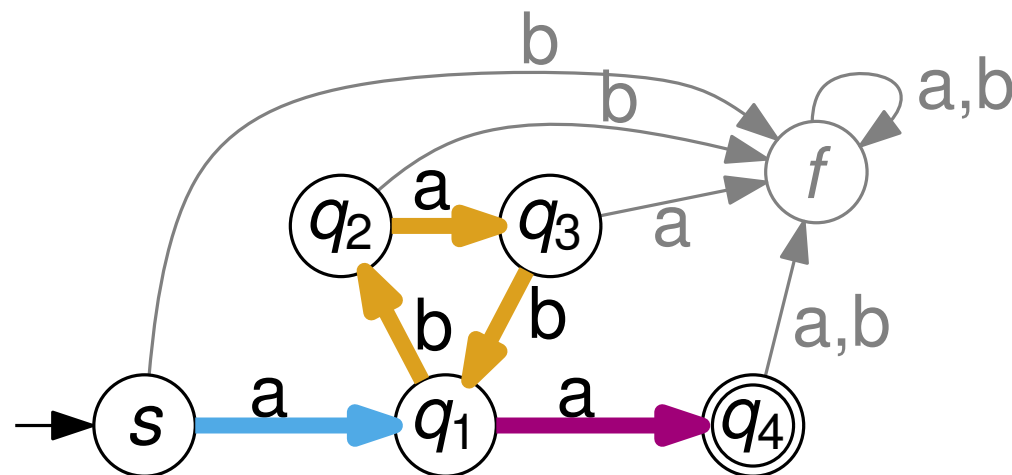
während der Abarbeitung von w durchläuft man einen Zyklus \mathcal{Z} in \mathcal{A} .

Sei

- u das Teilwort von w , das vor \mathcal{Z} ,
- v das Teilwort von w , das in \mathcal{Z} , und
- x das Teilwort von w , das nach \mathcal{Z}

abgearbeitet wird.

→ $uv^i x$ (mit $i \in \mathbb{N}$) ist auch in L enthalten.
Durchlaufe \mathcal{Z} entsprechend häufig.



Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

$$(a) L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$(b) L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$(c) L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 000 \text{ genauso häufig wie das Teilwort } 111\}$$

$$(d) L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{auf jedes Symbol } 0 \text{ in } w \text{ folgt das Symbol } 1 \text{ und nach maximal dreimal } 1 \text{ in } w \text{ folgt das Symbol } 0. \}$$

$$(e) L_5 = \{a\}$$

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

$$(a) L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^* \mid i \in N_0\}$$

- L_1 besteht aus dem leeren Wort und allen Worten, die aus einer geraden Anzahl an a 's bestehen.
- Sprache kann durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ beschrieben werden

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

$$(a) L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$



- L_1 besteht aus dem leeren Wort und allen Worten, die aus einer geraden Anzahl an a 's bestehen.
- Sprache kann durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ beschrieben werden

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

$$(b) L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Annahme L_2 ist regulär \rightarrow Pumping-Lemma gilt. Sei n die *Pumping-Zahl*.

Betrachte das Wort $w = a^{n^2} \in L_2$. Es gilt $|w| > n$

Es gibt Zerlegung $w = uvx \in L_2$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, sodass für alle $uv^i x \in L_2$
($i \in \mathbb{N}_0$)

Beobachtung:

Beschreibe alle so möglichen Zerlegungen als: $\begin{matrix} a^p & a^q & a^r \\ u & v & x \end{matrix}$

mit $p + q + r = n^2$, $p + q \leq n$ und $1 \leq q \leq n$.

Nach Pumping-Lemma: $uv^2x \in L$

Also:

$$|a^{n^2}| < |uv^2x| = |a^p a^{2q} a^r| = |a^{n^2} a^q| \leq |a^{n^2} a^n| < |a^{n^2} a^{2n} a| = |a^{(n+1)^2}|$$

Es gibt kein $i \in \mathbb{N}$: $|uv^2x| = i^2$



Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 000 \text{ genauso häufig wie das Teilwort } 111\}$

Annahme L_3 ist regulär \rightarrow Pumping-Lemma gilt. Sei n die *Pumping-Zahl*.

Betrachte das Wort $w = (000)^n(111)^n \in L_3$. Es gilt $|w| > n$

Es gibt Zerlegung $w = uvx \in L_3$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, sodass für alle $uv^i x \in L_3$ ($i \in \mathbb{N}_0$)

Beobachtung:

Beschreibe alle so möglichen Zerlegungen als: $u^p \quad v^q \quad 0^{3n-p-q} (111)^n$
 x mit $|x| = r$

mit $p + q + r = 6n$, $p + q \leq n$ und $1 \leq q \leq n$.

Nach Pumping-Lemma: $u v^2 x \in L_3$

Also:

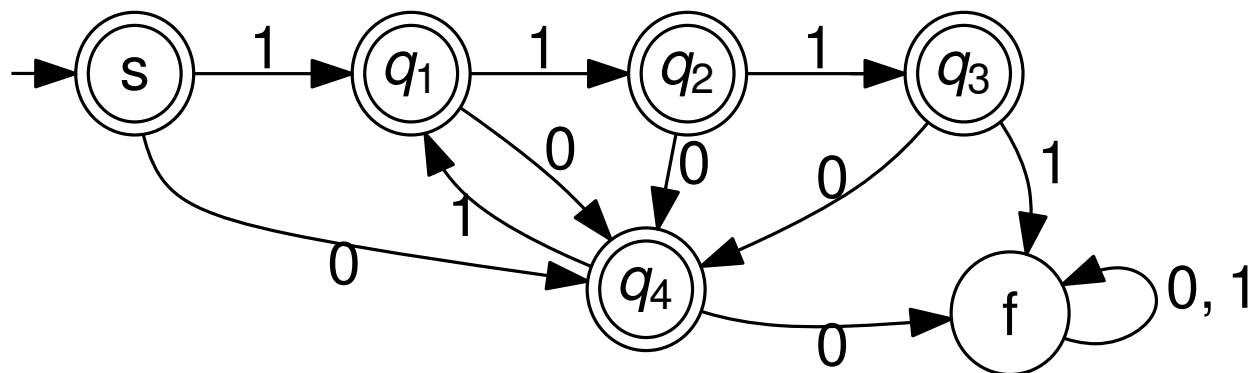
$$u^p v^{2q} 0^{3n-p-q} (111)^n = 0^{3n+q} (111)^n \notin L_3$$



Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

- (d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{auf jedes Symbol } 0 \text{ in } w \text{ folgt das Symbol } 1 \text{ und nach maximal dreimal } 1 \text{ in } w \text{ folgt das Symbol } 0. \}$



Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

$$(e) L_5 = \{a\}$$

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

- L_5 ist regulär
- $L_5 \cap \left(\bigcup_{j>1} \{a\}^j \right) = \emptyset$
- Pumping-Lemma ist auch erfüllt, z.B. mit $n = 1$

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen regulär sind.

(a) $L_1 = \{a^{2i} \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}_0\}$



(b) $L_2 = \{a^{i^2} \in \{a, b\}^* \mid i \in \mathbb{N}_0\}$



(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 000 \text{ genauso häufig wie das Teilwort } 111\}$



(d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{auf jedes Symbol } 0 \text{ in } w \text{ folgt das Symbol } 1 \text{ und nach maximal dreimal } 1 \text{ in } w \text{ folgt das Symbol } 0. \}$

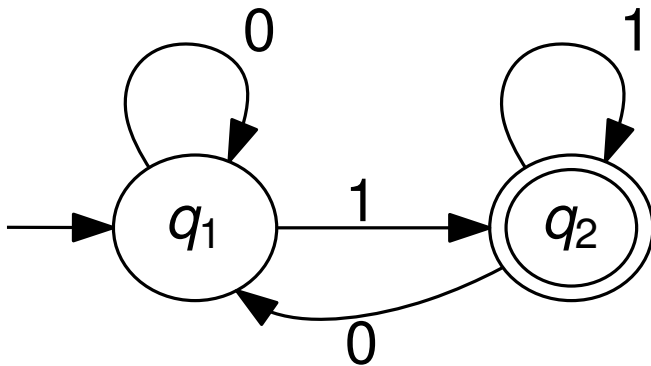


(e) $L_5 = \{a\}$



Bestimmung eines regulären Ausdrucks

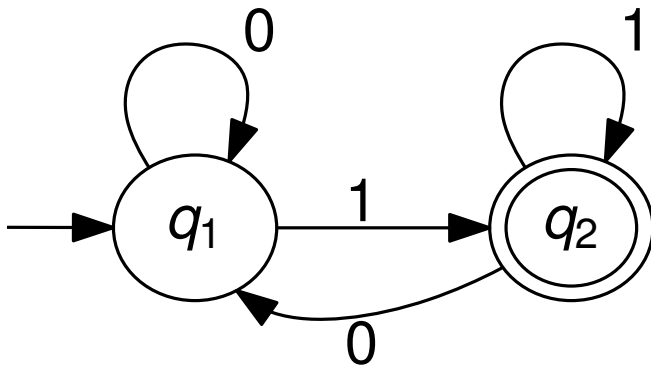
Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache

$L_{1,2,2}$

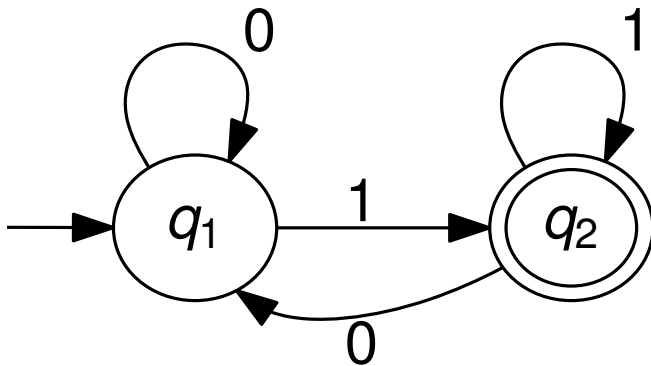


$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup \left(L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t} \right)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache

$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$



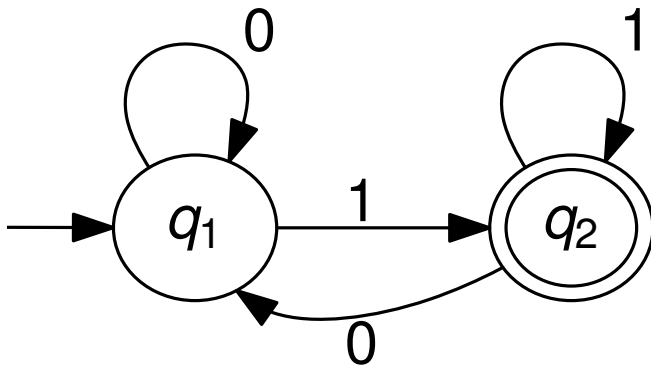
$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache

$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

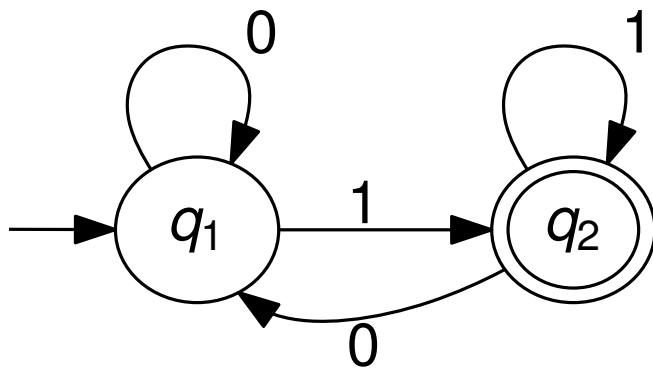
$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$



$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

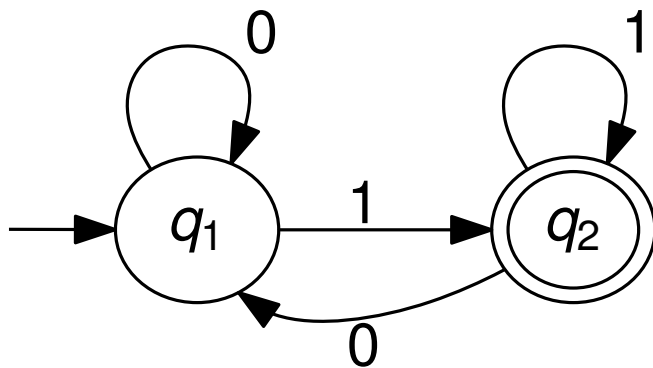
$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

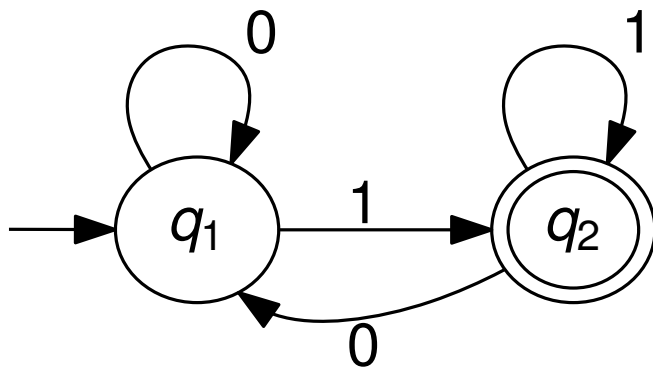
$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

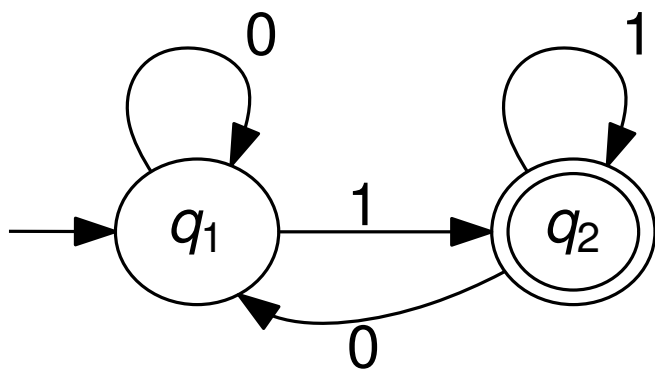
$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

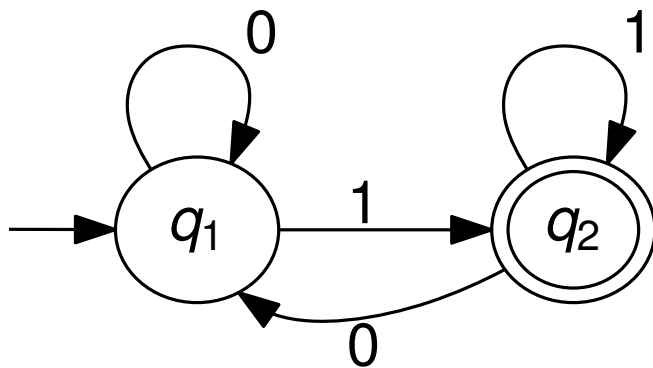
$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

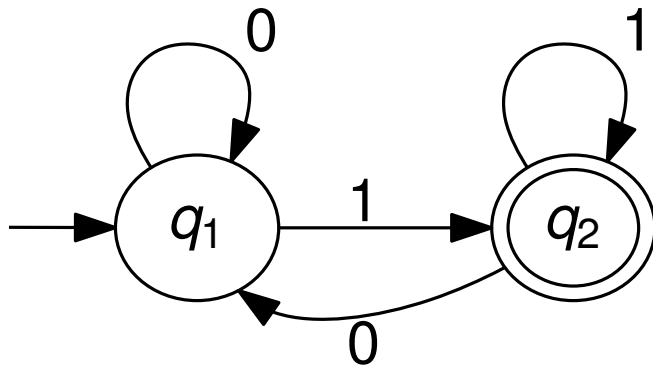
$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

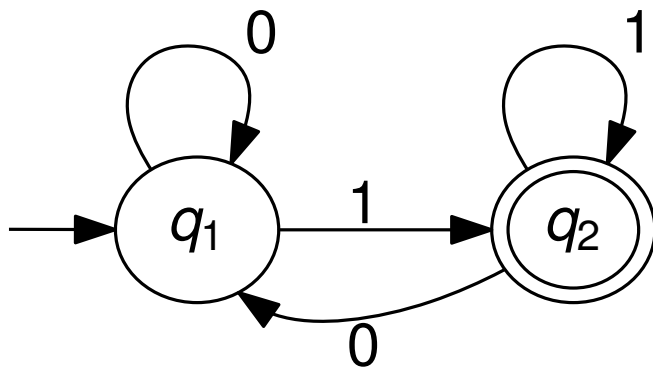
$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2}$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

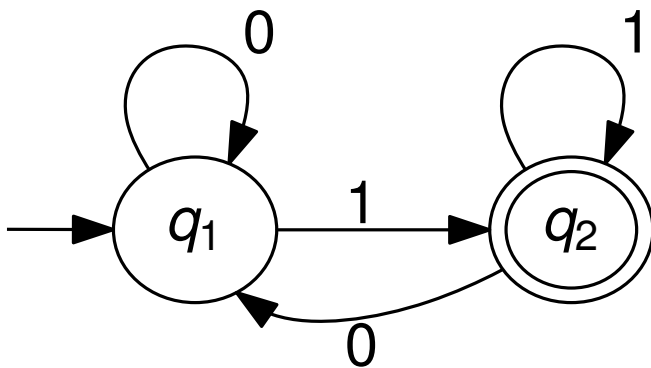
$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2} = 1$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

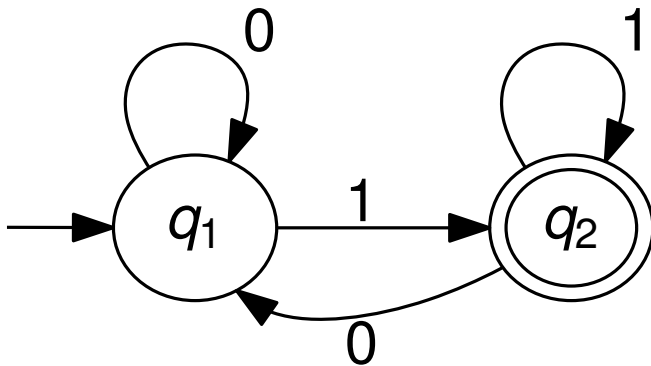
$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1)$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

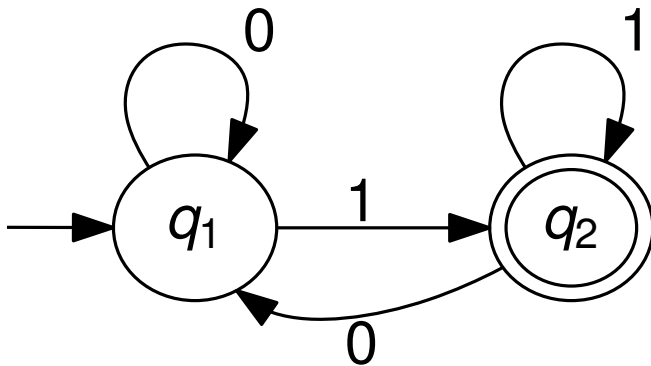
$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1)$$

$$= 1 \cup (0^* 1)$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

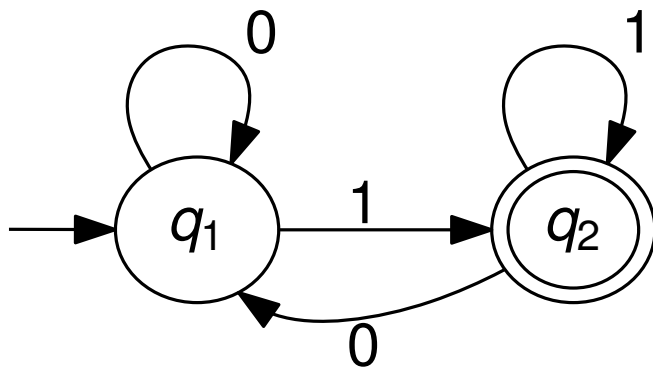
$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1)$$

$$= 1 \cup (0^* 1) = 0^* 1$$

$$L_{q_r, i+1, q_t} = L_{q_r, i, q_t} \cup (L_{q_r, i, q_{i+1}} (L_{q_{i+1}, i, q_{i+1}})^* L_{q_{i+1}, i, q_t})$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

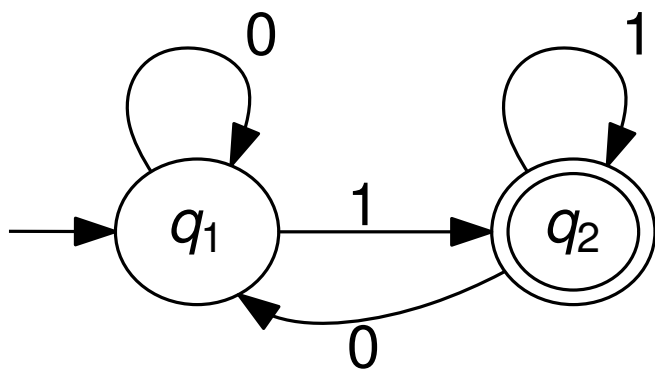
$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (0(\varepsilon \cup 0)^* 1)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

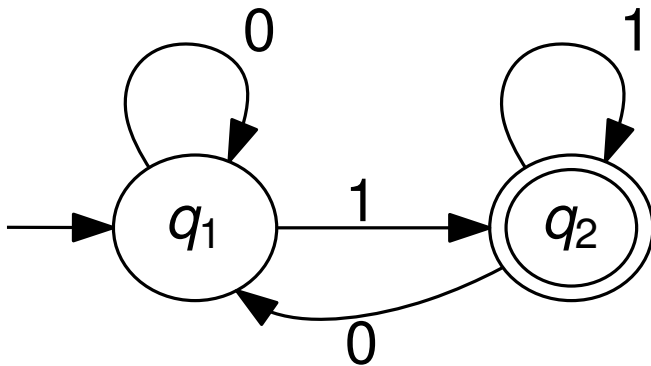
$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (0(\varepsilon \cup 0)^* 1)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

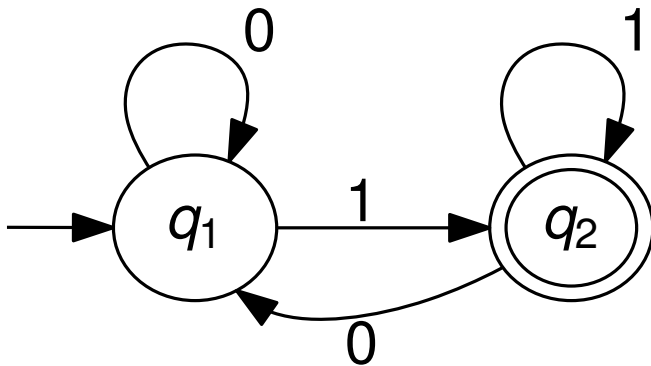
$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (0(\varepsilon \cup 0)^* 1)$$

$$= (\varepsilon \cup 1) \cup (0 0^* 1)$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

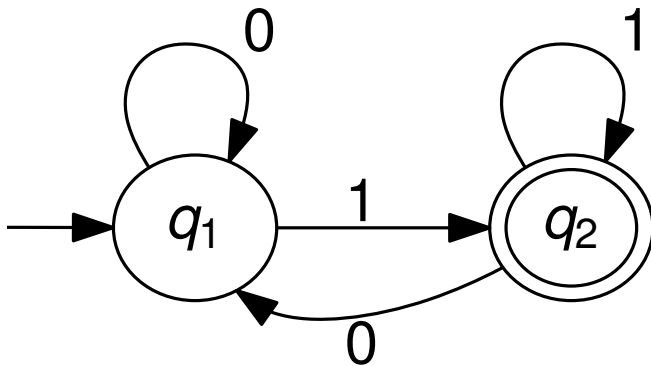
$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1)$$

$$L_{1,2,2} = (0^* 1) \cup ((0^* 1)((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))^*((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1)))$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

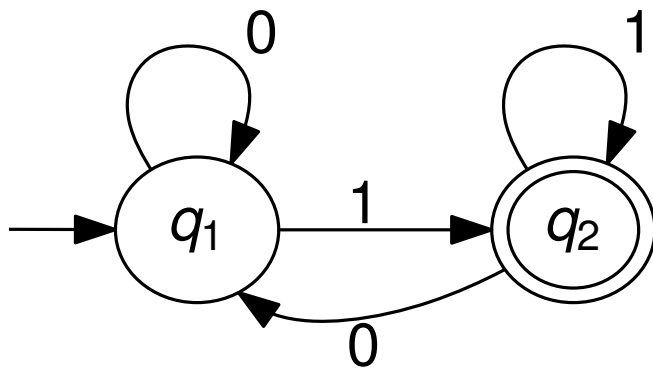
$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1)$$

$$\begin{aligned}
 L_{1,2,2} &= (0^* 1) \cup ((0^* 1) ((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))^* ((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))) \\
 &= (0^* 1) \cup (0^* 1) ((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))^+
 \end{aligned}$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

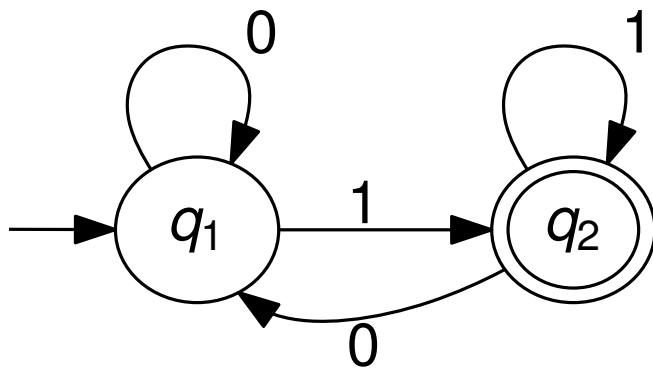
$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1)$$

$$L_{1,2,2} = (0^* 1) \cup (0^* 1) ((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))^+$$

$$= (0^* 1) ((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))^*$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^* L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^* L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^* 1) = 0^* 1$$

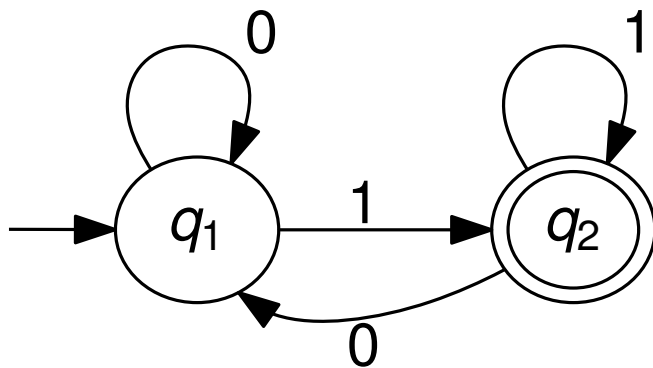
$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1)$$

$$L_{1,2,2} = (0^* 1) ((\varepsilon \cup 1) \cup (00^* 1))^*$$

$$= (0^* 1) (1 \cup (00^* 1))^*$$

Bestimmung eines regulären Ausdrucks

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache



$$L_{1,2,2} = L_{1,1,2} \cup (L_{1,1,2}L_{2,1,2}^*L_{2,1,2})$$

$$L_{1,1,2} = L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1}L_{1,0,1}^*L_{1,0,2})$$

$$L_{2,1,2} = L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1}L_{1,0,1}^*L_{1,0,2})$$

$$L_{1,0,1} = \varepsilon \cup 0$$

$$L_{1,0,2} = 1$$

$$L_{2,0,2} = \varepsilon \cup 1$$

$$L_{2,0,1} = 0$$

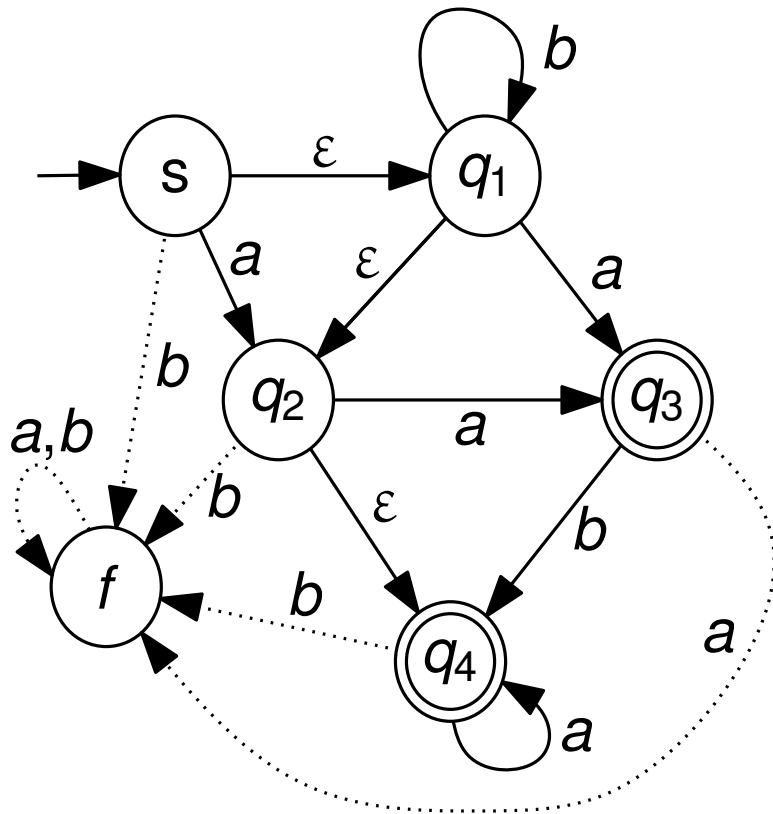
$$L_{1,1,2} = 1 \cup ((\varepsilon \cup 0)(\varepsilon \cup 0)^*1) = 0^*1$$

$$L_{2,1,2} = (\varepsilon \cup 1) \cup (00^*1)$$

$$L_{1,2,2} = (0^*1)(1 \cup (00^*1))^*$$

NEA

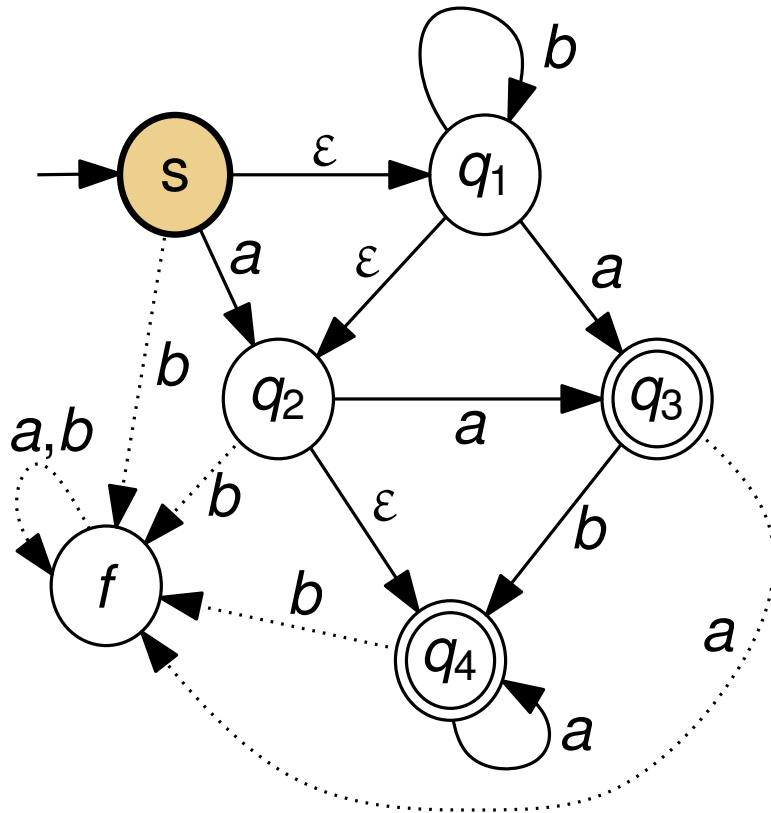
Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:



NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

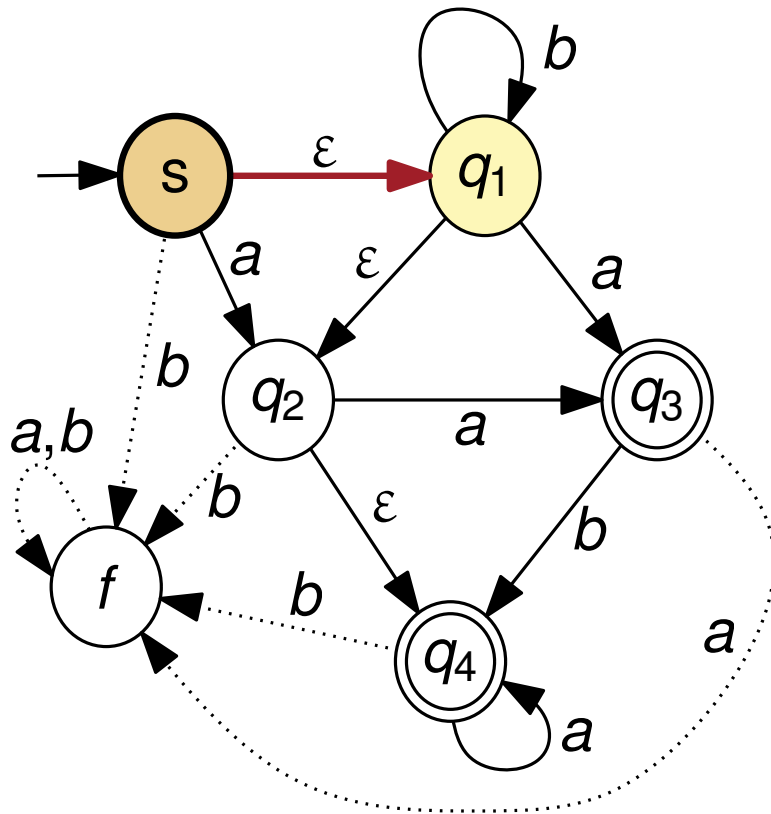
(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

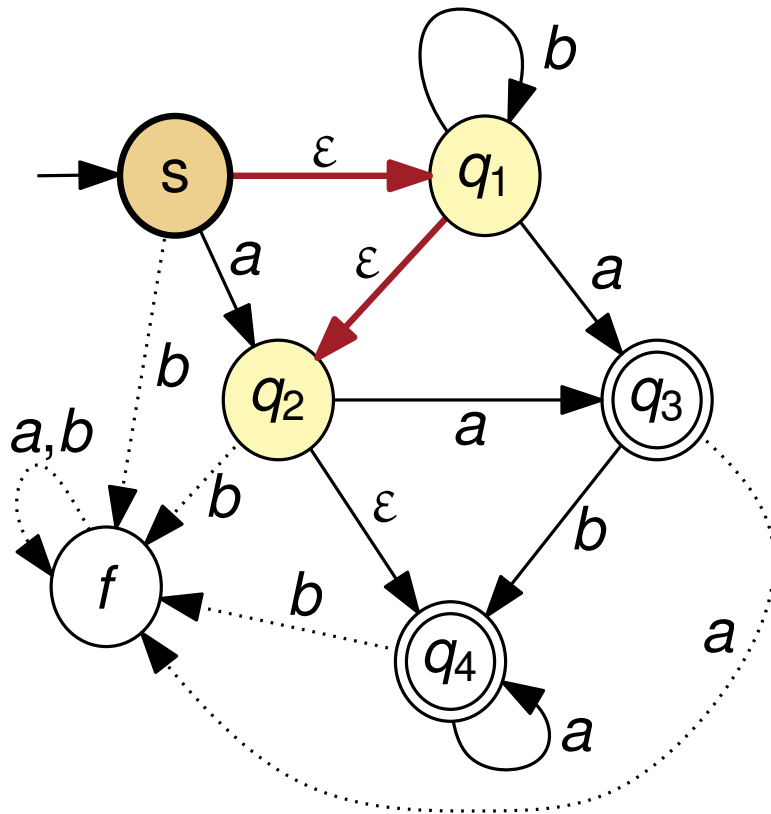
(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

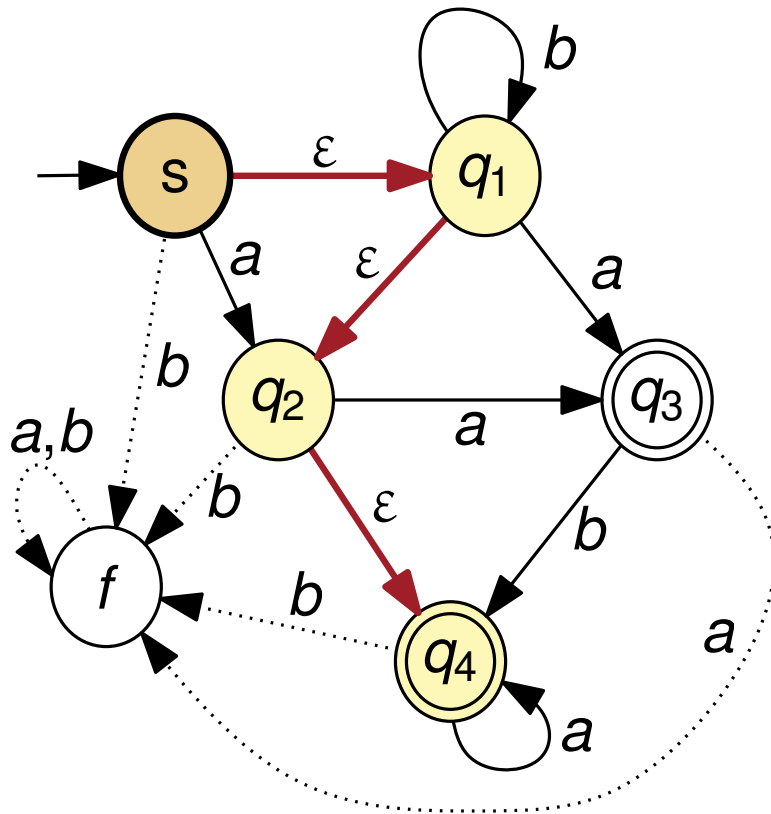
(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

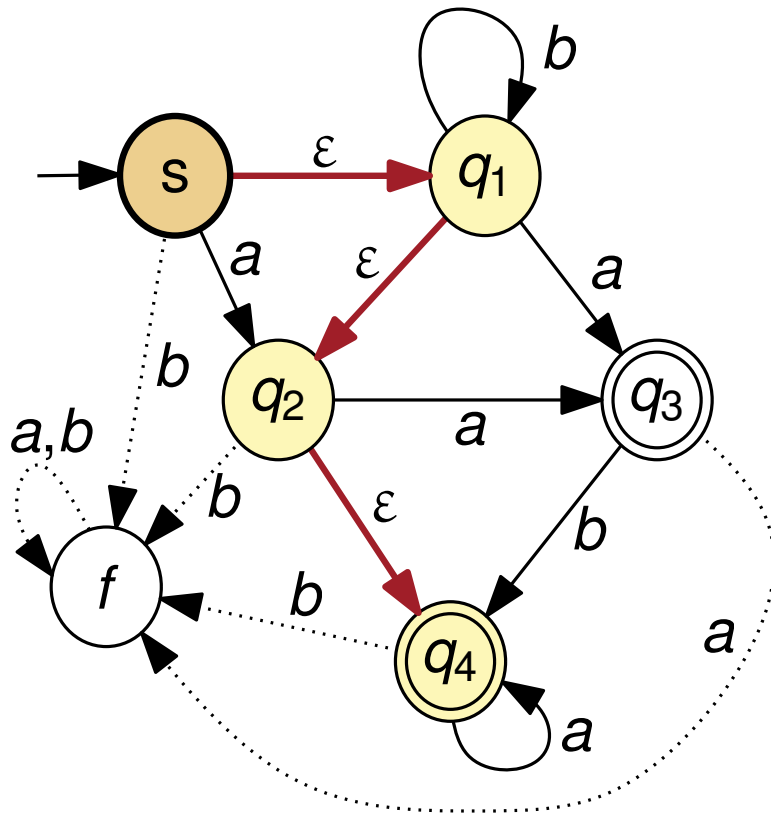
(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.

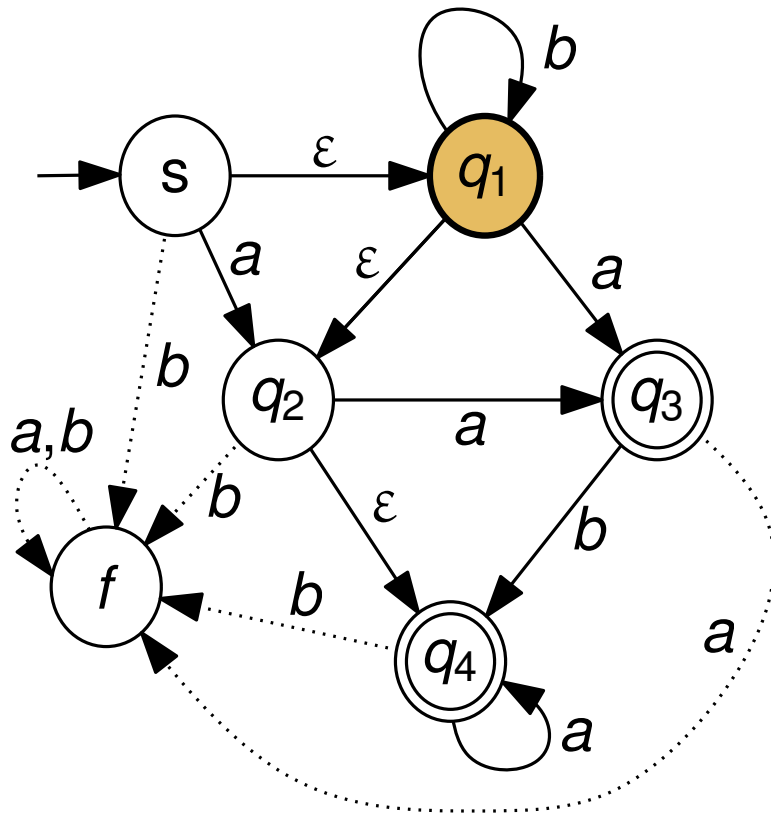


$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.

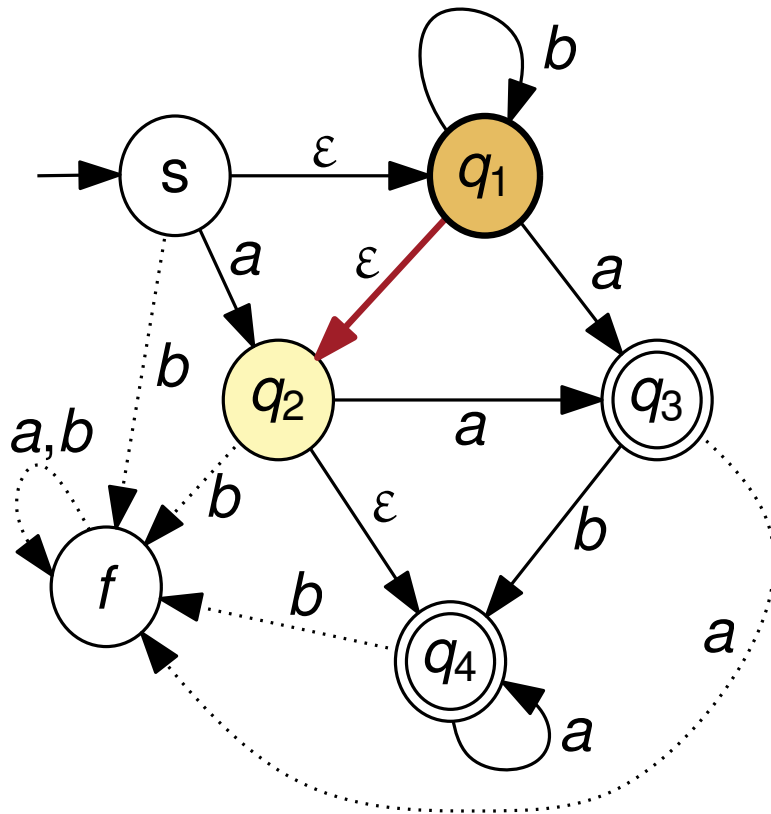


$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.

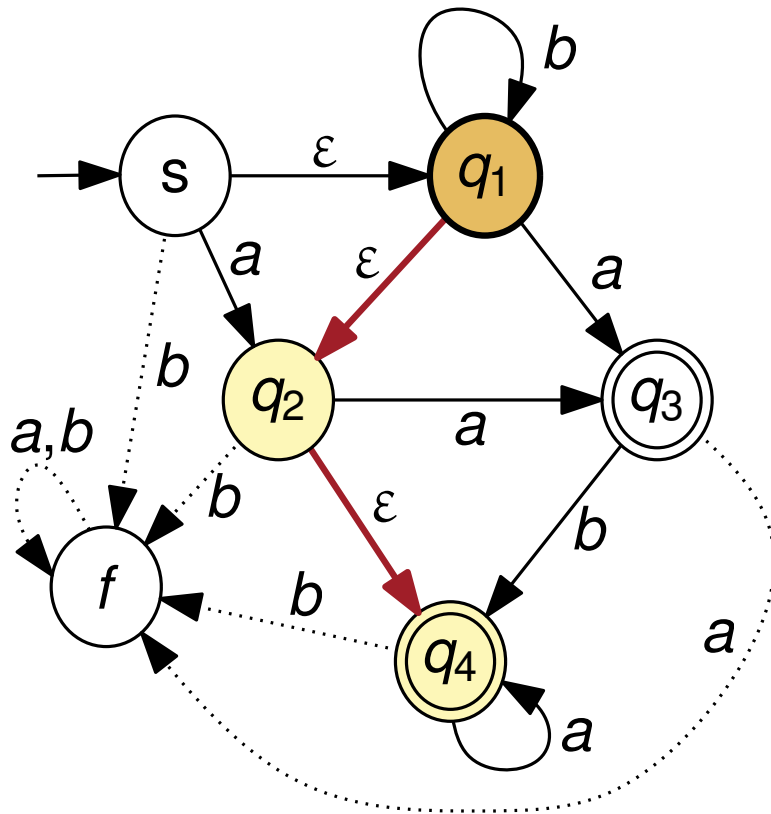


$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.

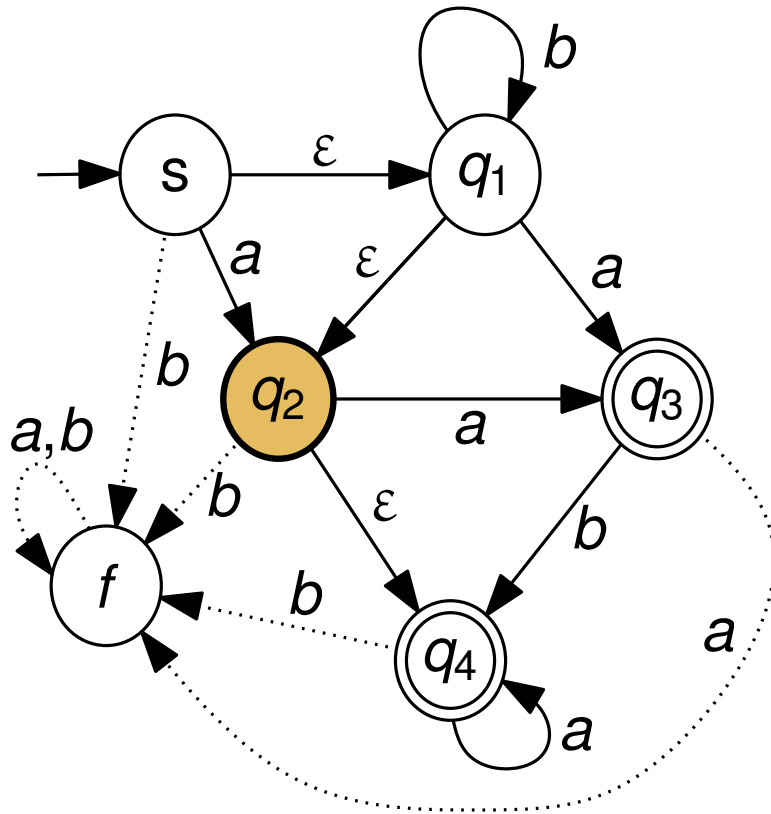


$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



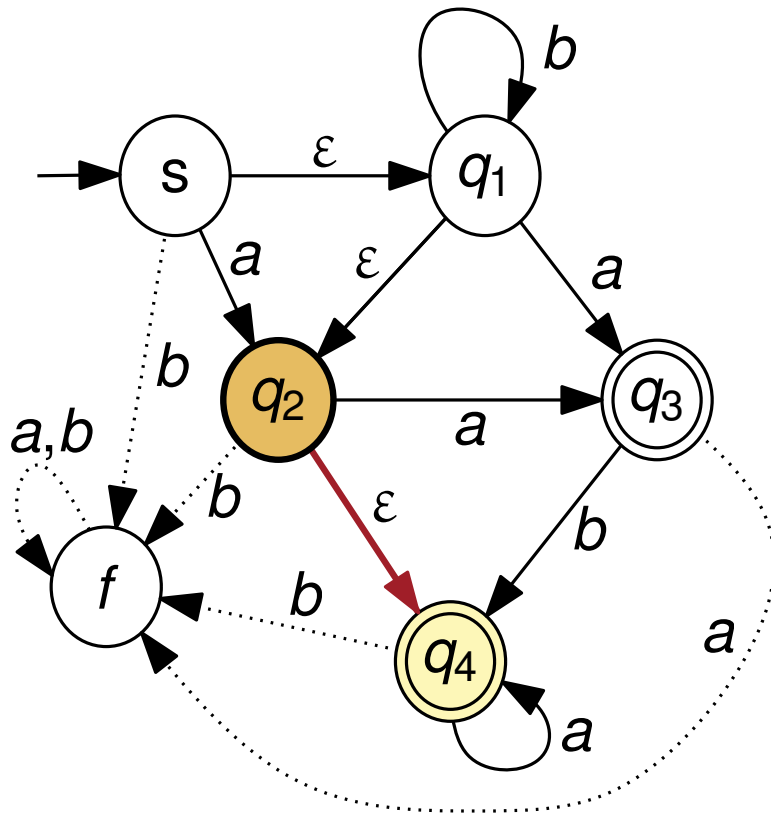
$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



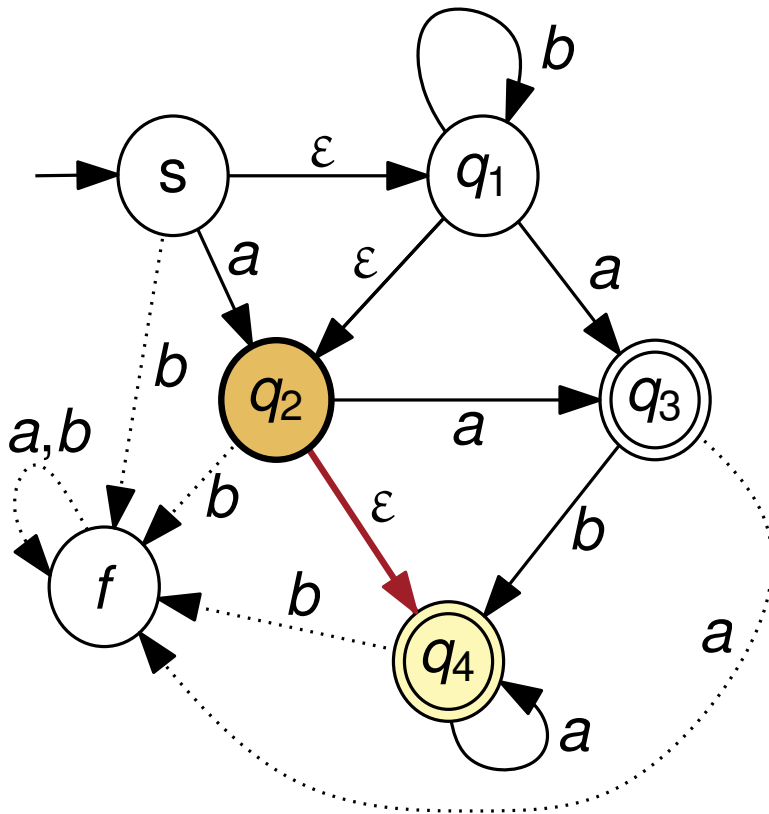
$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

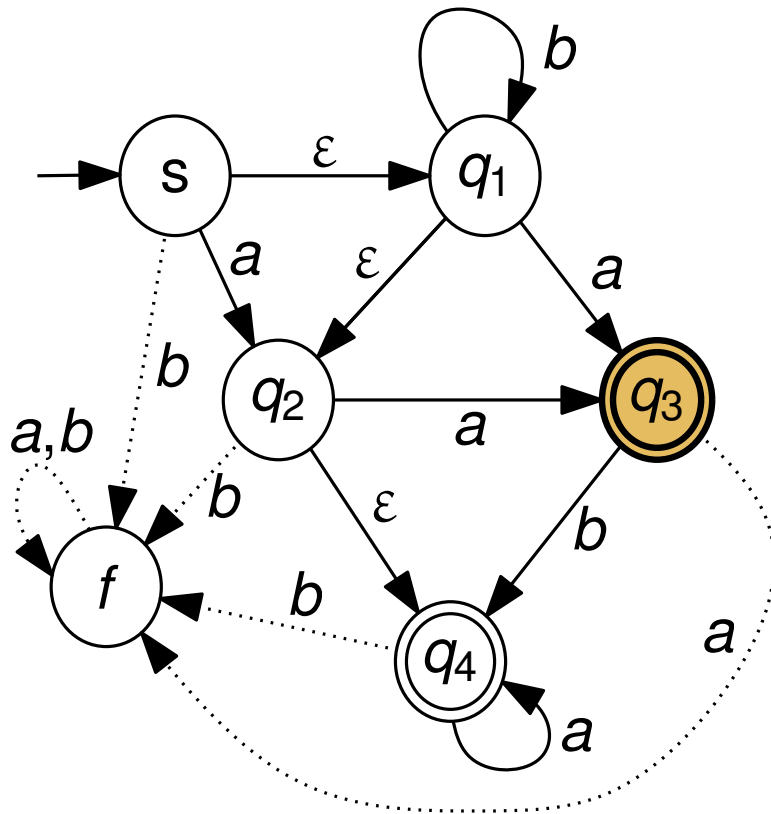
$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

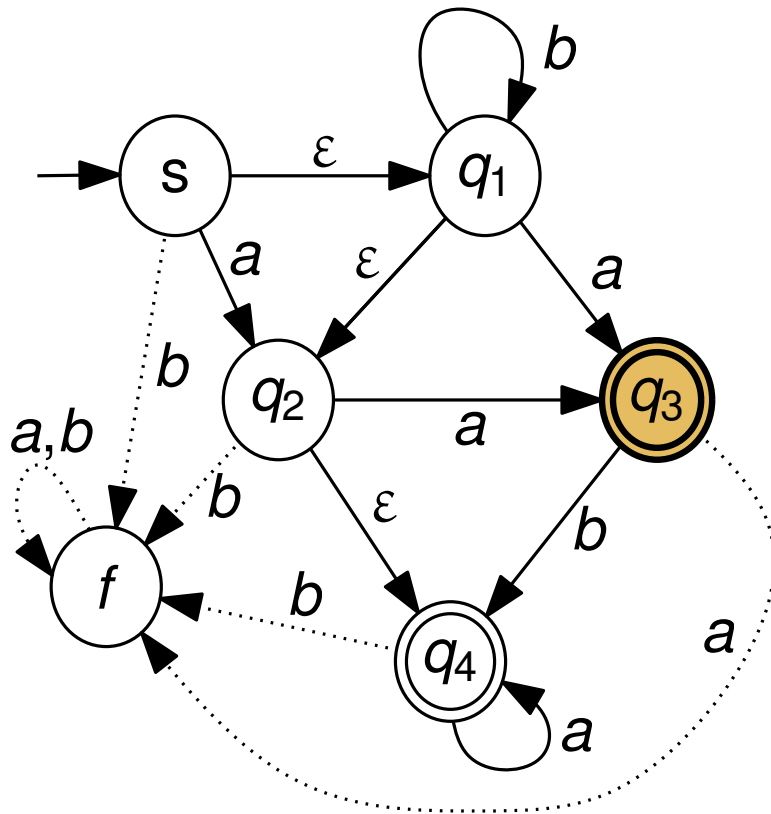
$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

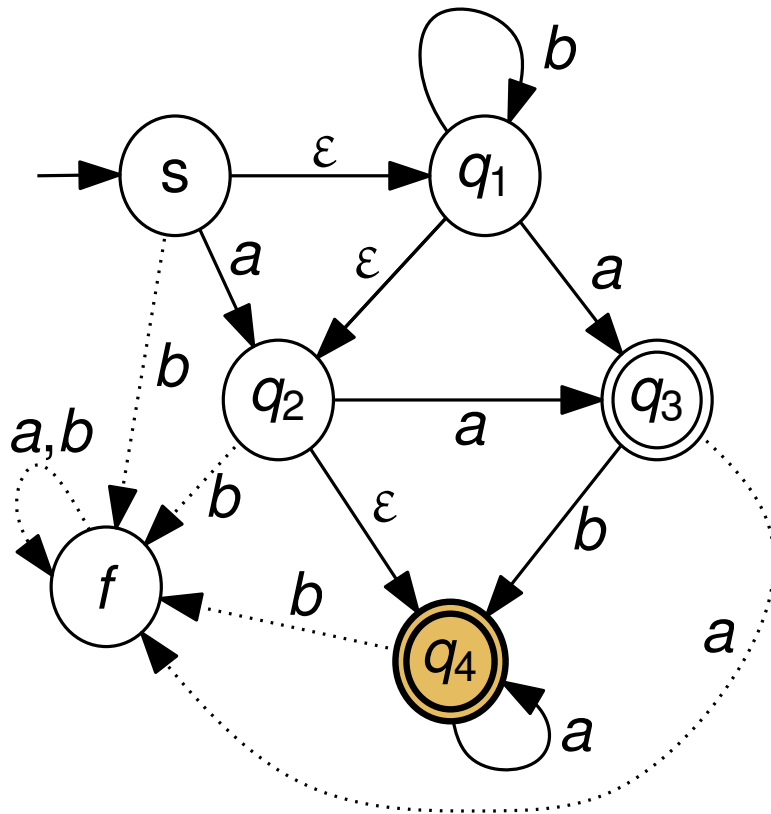
$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

$$E(q_3) = \{q_3\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

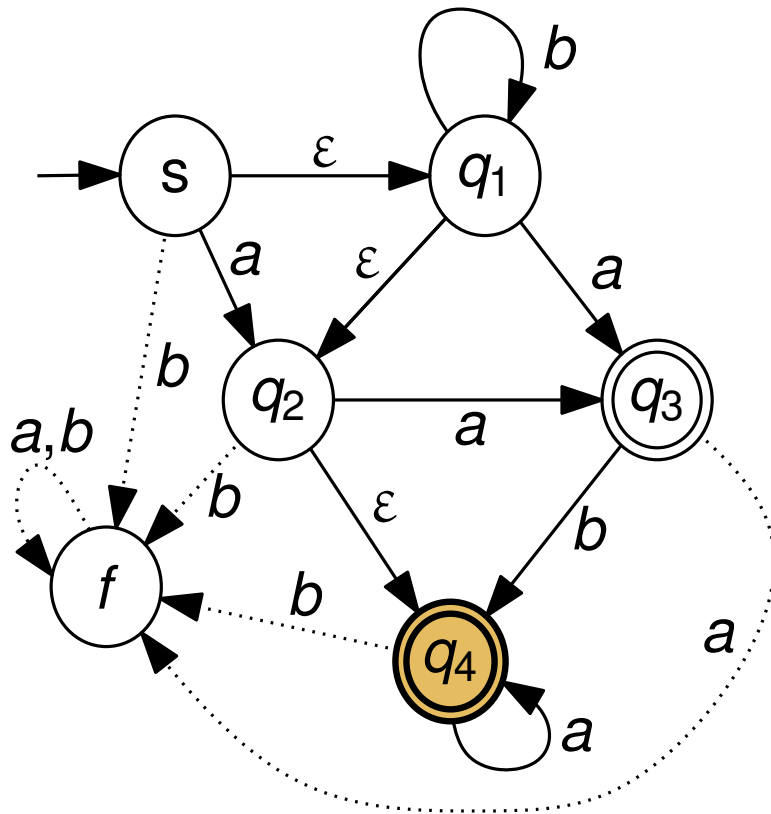
$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

$$E(q_3) = \{q_3\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

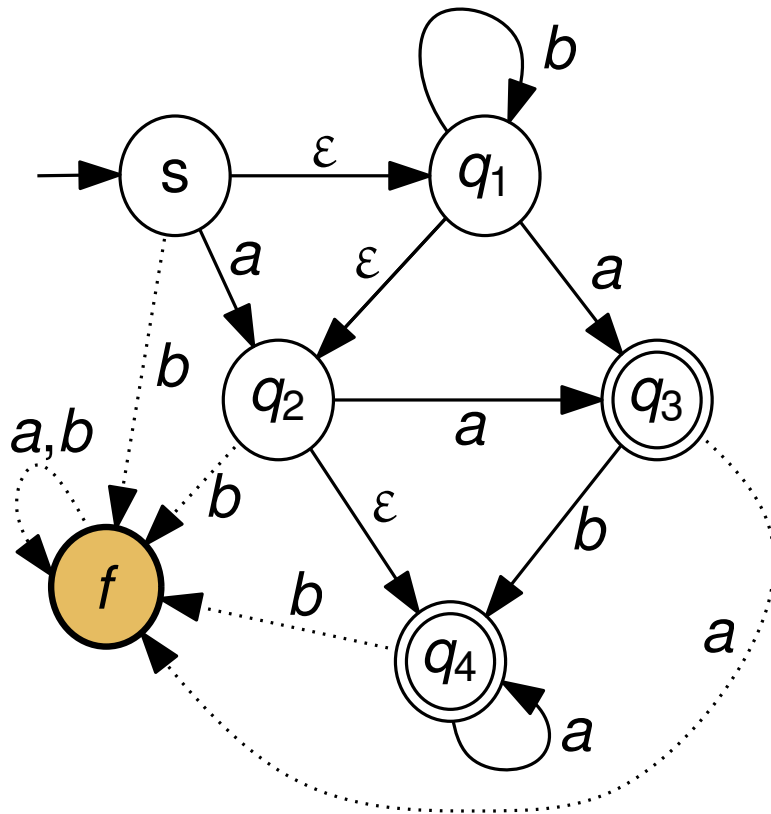
$$E(q_3) = \{q_3\},$$

$$E(q_4) = \{q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

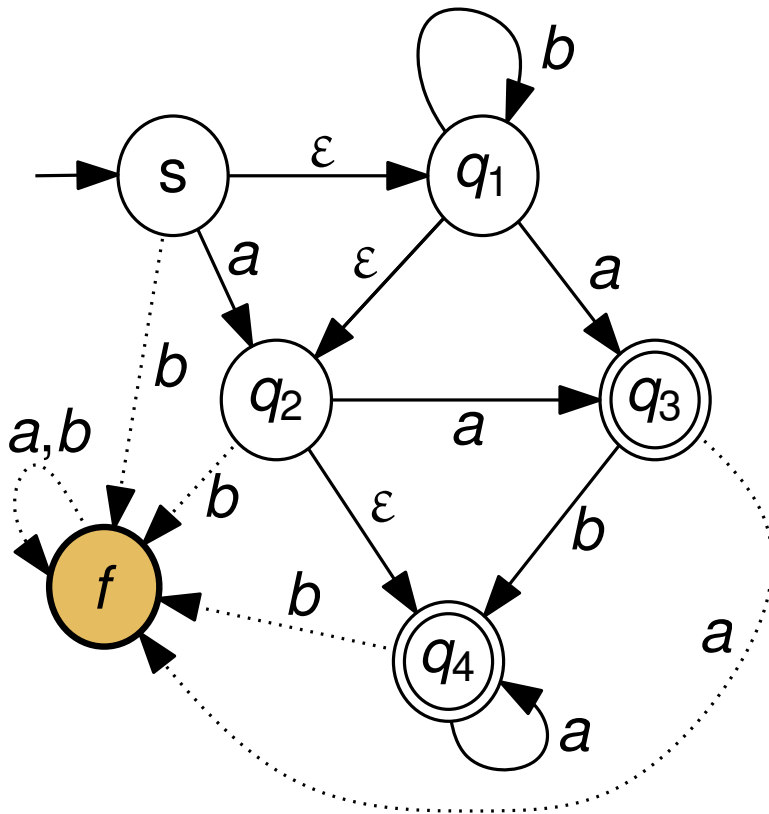
$$E(q_3) = \{q_3\},$$

$$E(q_4) = \{q_4\},$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(a) Geben Sie für jeden Zustand dessen ε -Abschluss an.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

$$E(q_3) = \{q_3\},$$

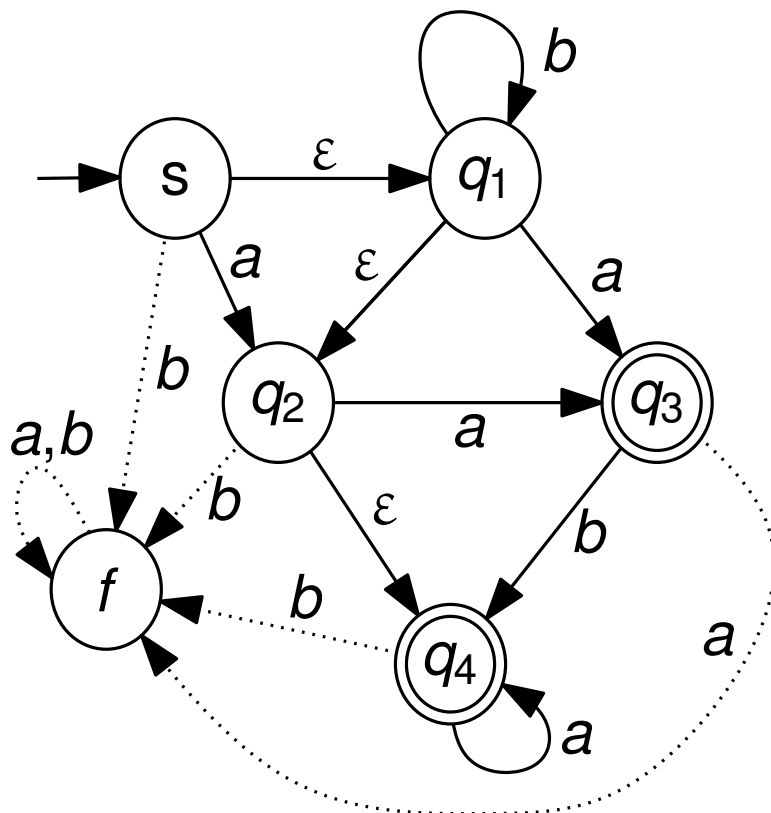
$$E(q_4) = \{q_4\},$$

$$E(f) = \{f\}.$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(b) Geben Sie für \mathcal{A} einen äquivalenten NEA an, der keine ε -Übergänge enthält.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

$$E(q_3) = \{q_3\},$$

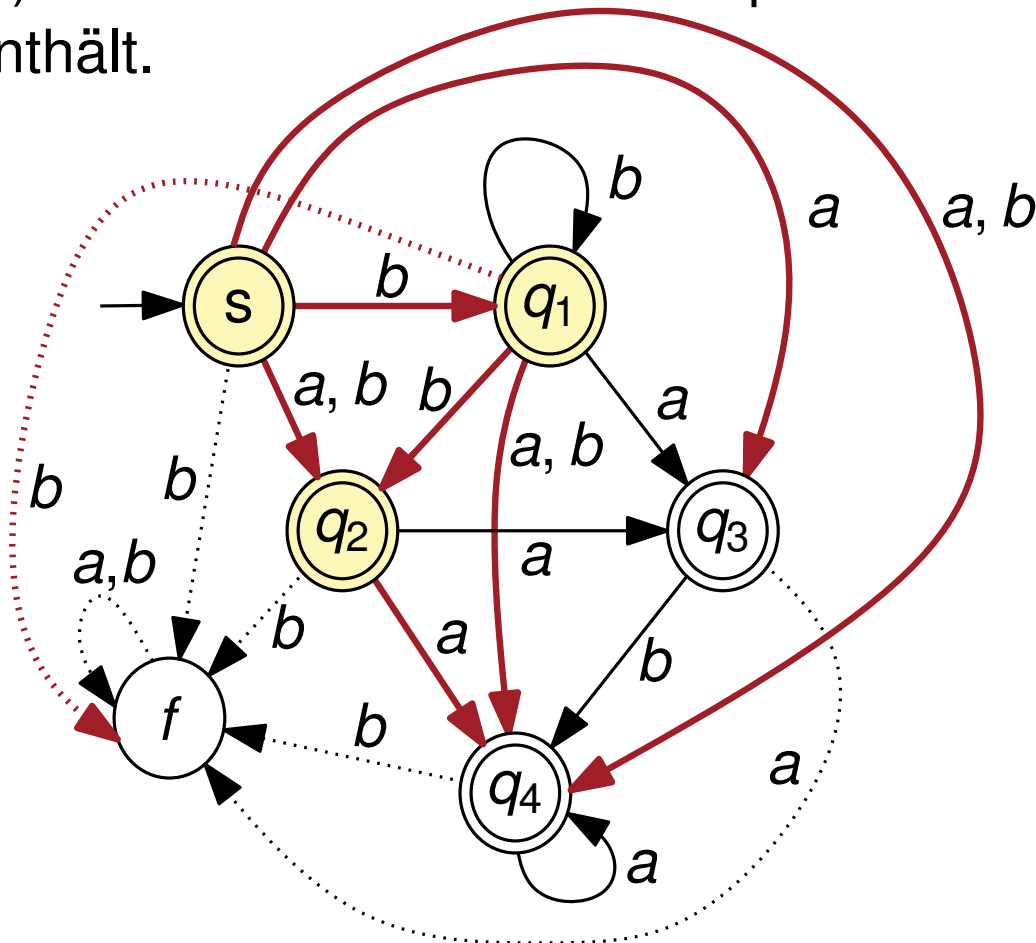
$$E(q_4) = \{q_4\},$$

$$E(f) = \{f\}.$$

NEA

Sei \mathcal{A} der nichtdeterministische endliche Automat, der durch folgenden Zustandsgraphen gegeben ist:

(b) Geben Sie für \mathcal{A} einen äquivalenten NEA an, der keine ε -Übergänge enthält.



$$E(s) = \{s, q_1, q_2, q_4\},$$

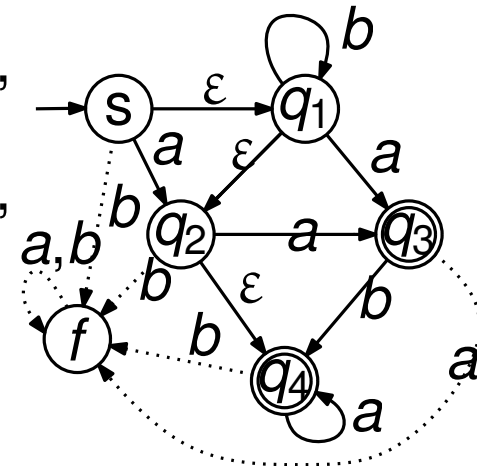
$$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_4\},$$

$$E(q_2) = \{q_2, q_4\},$$

$$E(q_3) = \{q_3\},$$

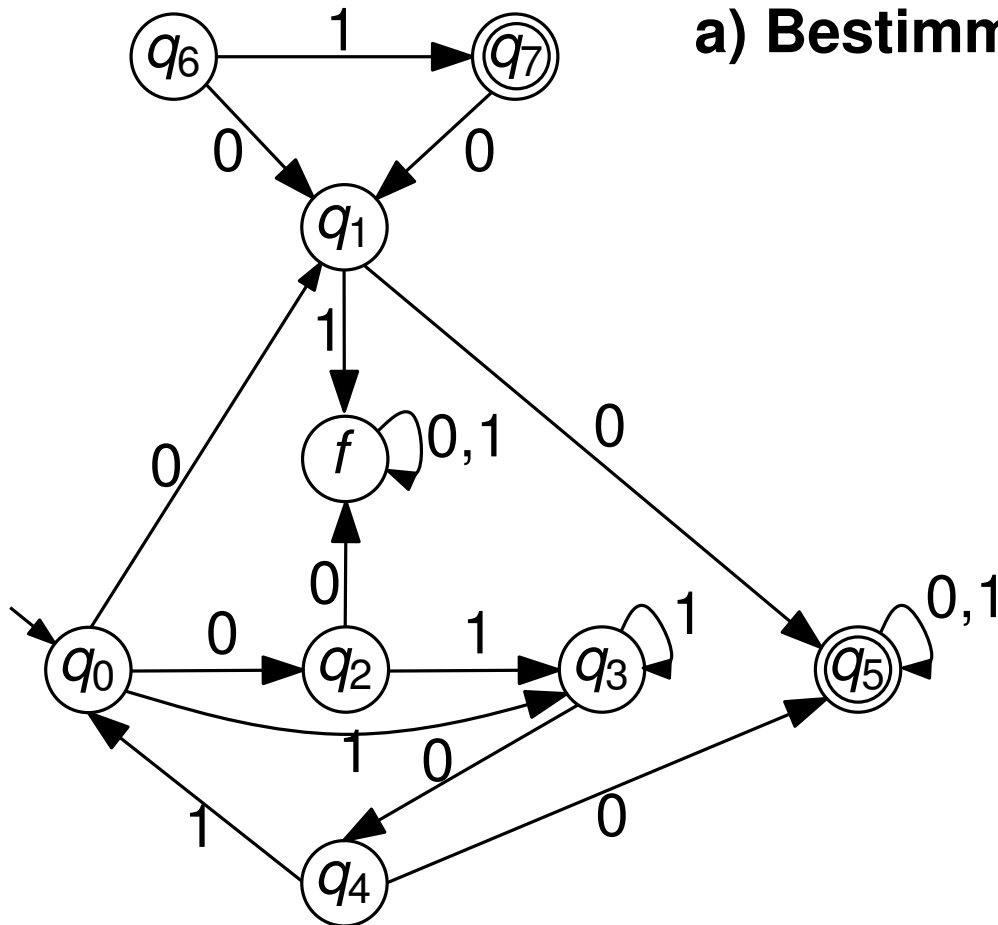
$$E(q_4) = \{q_4\},$$

$$E(f) = \{f\}.$$

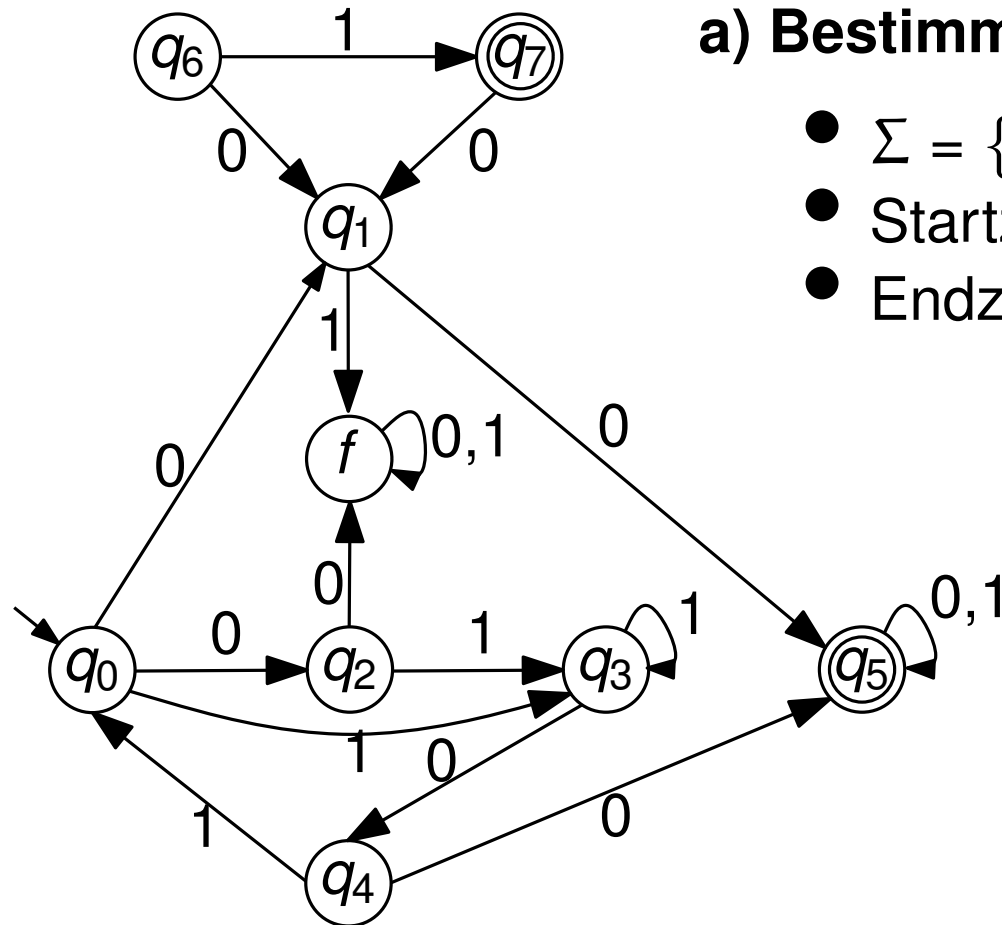


Entfernen überflüssiger Zustände

a) Bestimme Σ , Start- und Endzustände.



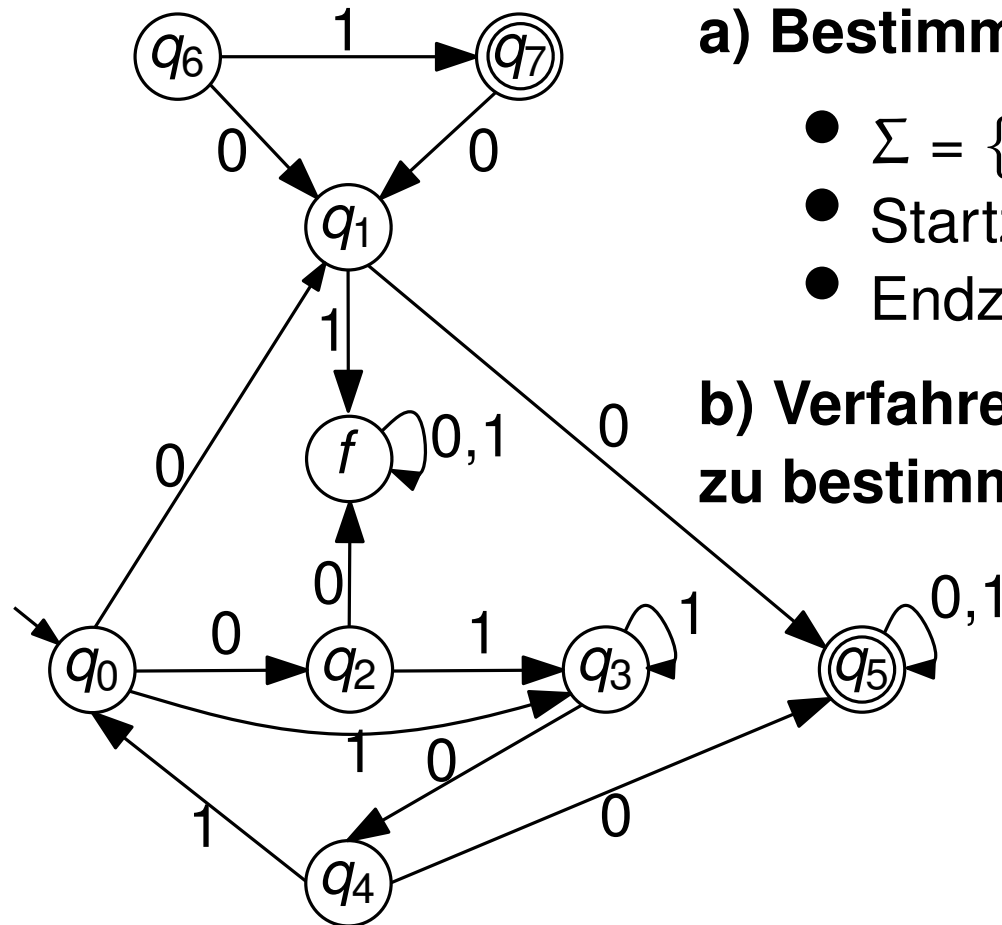
Entfernen überflüssiger Zustände



a) Bestimme Σ , Start- und Endzustände.

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- Startzustand q_0
- Endzustände $F = \{q_5, q_7\}$

Entfernen überflüssiger Zustände

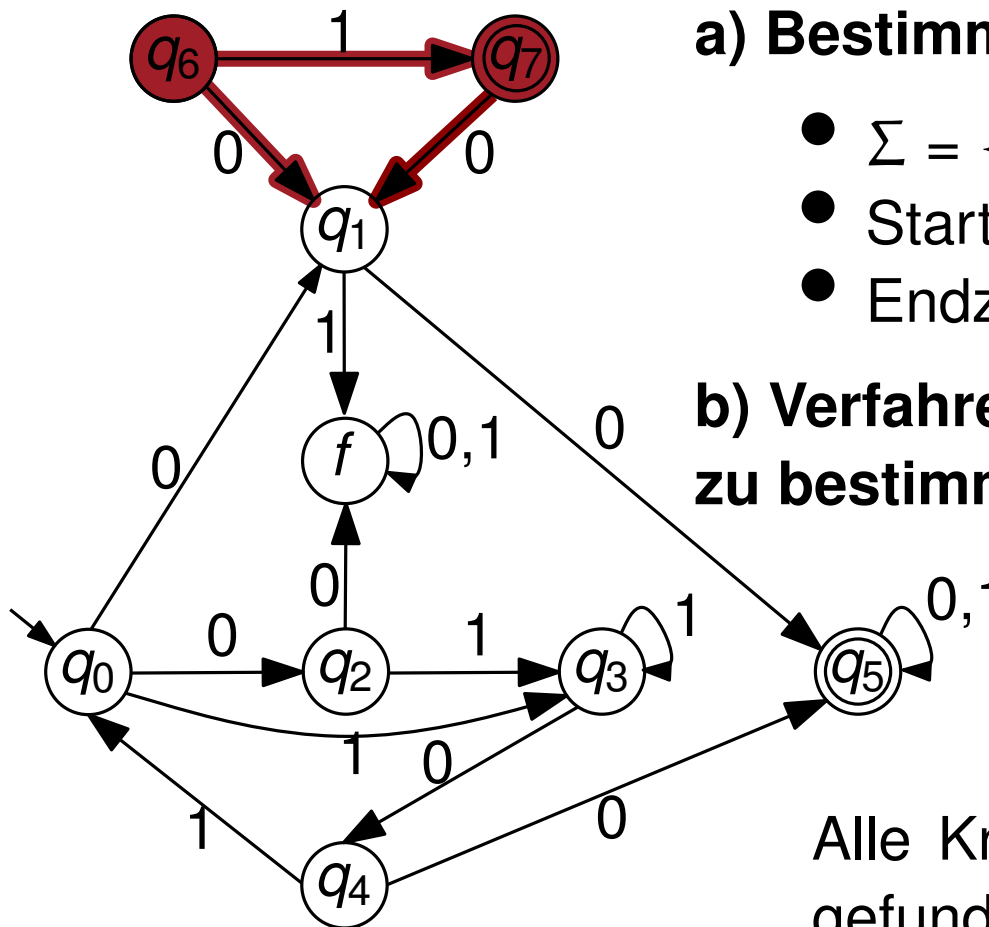


a) Bestimme Σ , Start- und Endzustände.

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- Startzustand q_0
- Endzustände $F = \{q_5, q_7\}$

b) Verfahren um nicht erreichbare Zustände zu bestimmen?

Entfernen überflüssiger Zustände



a) Bestimme Σ , Start- und Endzustände.

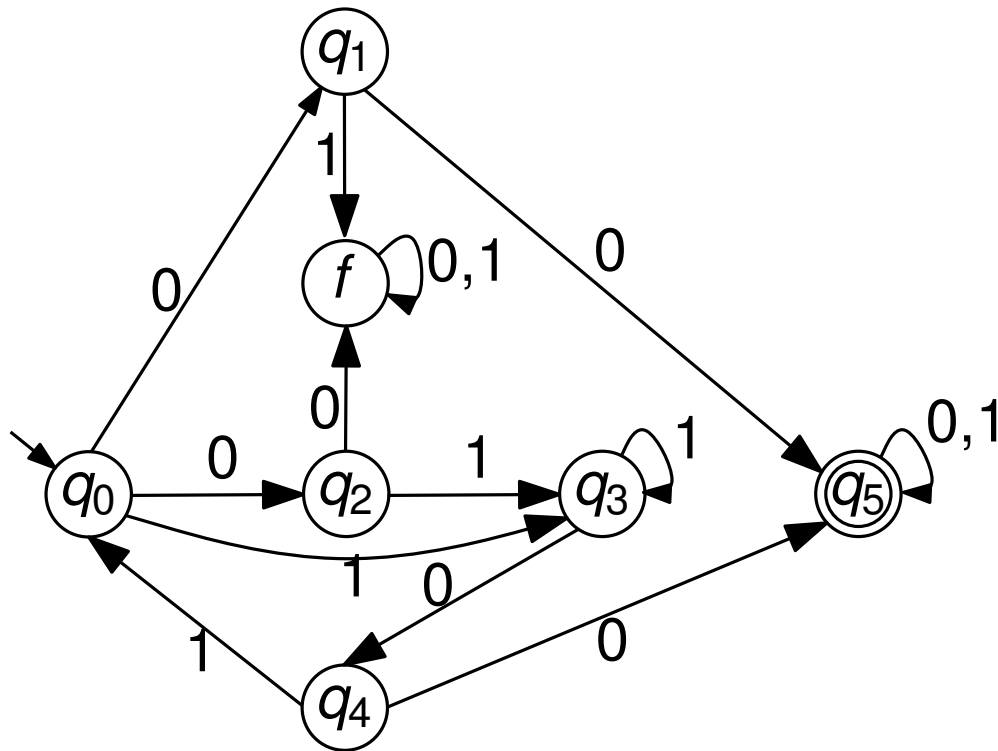
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- Startzustand q_0
- Endzustände $F = \{q_5, q_7\}$

b) Verfahren um nicht erreichbare Zustände zu bestimmen?

Betrachte Zustandsgraph $G = (V, E)$
Wende Tiefen- oder Breitensuche von q_0 aus an.

Alle Knoten, die während der Suche nicht gefunden werden, sind unerreichbar.

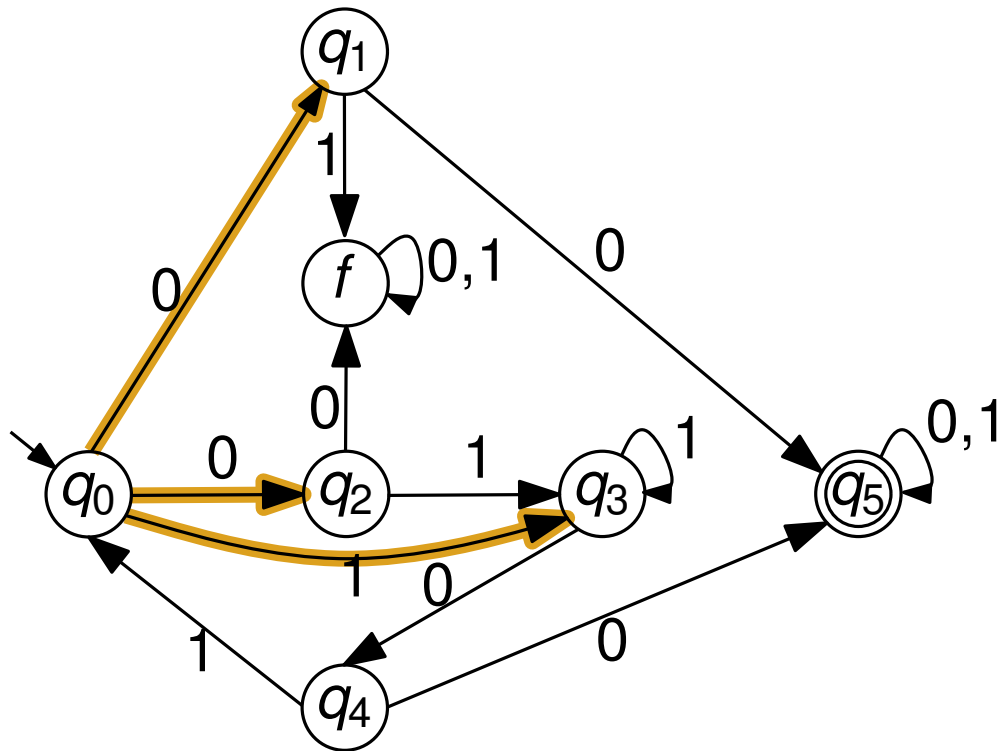
Potenzmengenkonstruktion



1. Schritt: NEA \rightarrow DEA

Zustand	Übergänge	
	0	1
$\{q_0\}$		

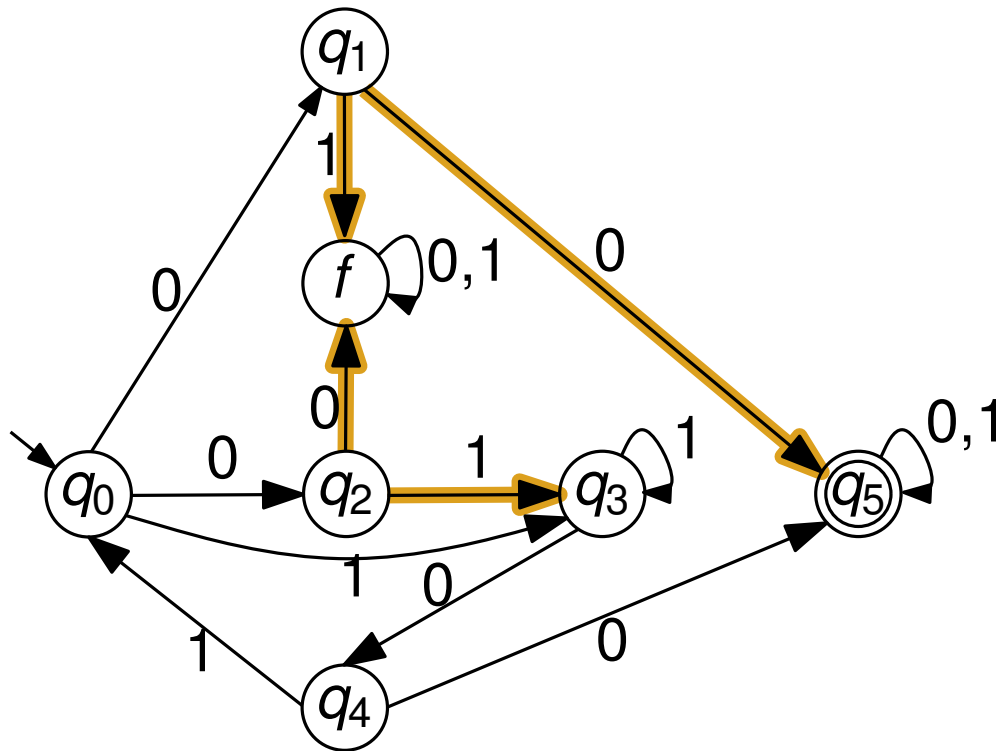
Potenzmengenkonstruktion



1. Schritt: NEA \rightarrow DEA

Zustand	Übergänge	
	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$		
$\{q_3\}$		

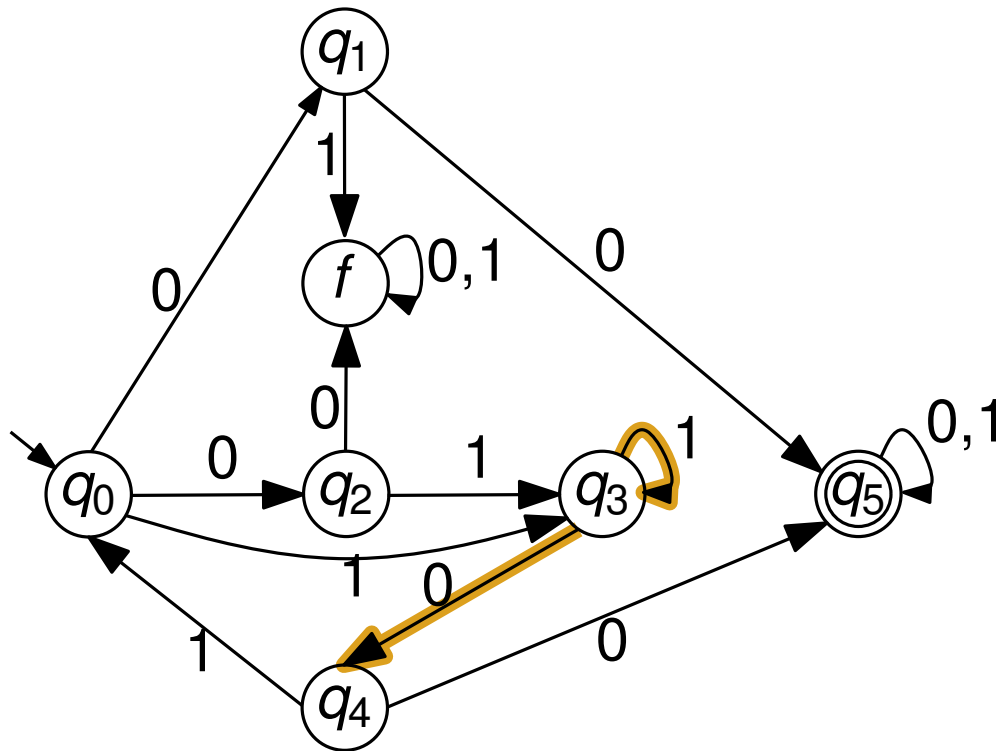
Potenzmengenkonstruktion



1. Schritt: NEA \rightarrow DEA

Zustand	Übergänge	
	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_3\}$		
$\{q_5, f\}$		
$\{q_3, f\}$		

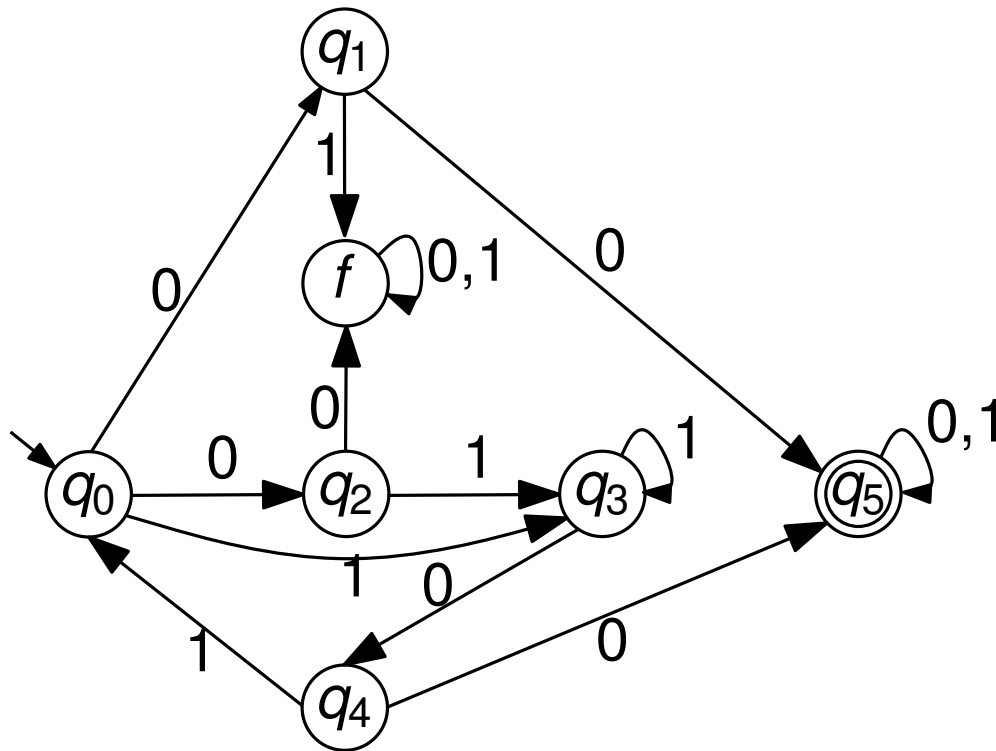
Potenzmengenkonstruktion



1. Schritt: NEA \rightarrow DEA

Zustand	Übergänge	
	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_5, f\}$		
$\{q_3, f\}$		
$\{q_4\}$		

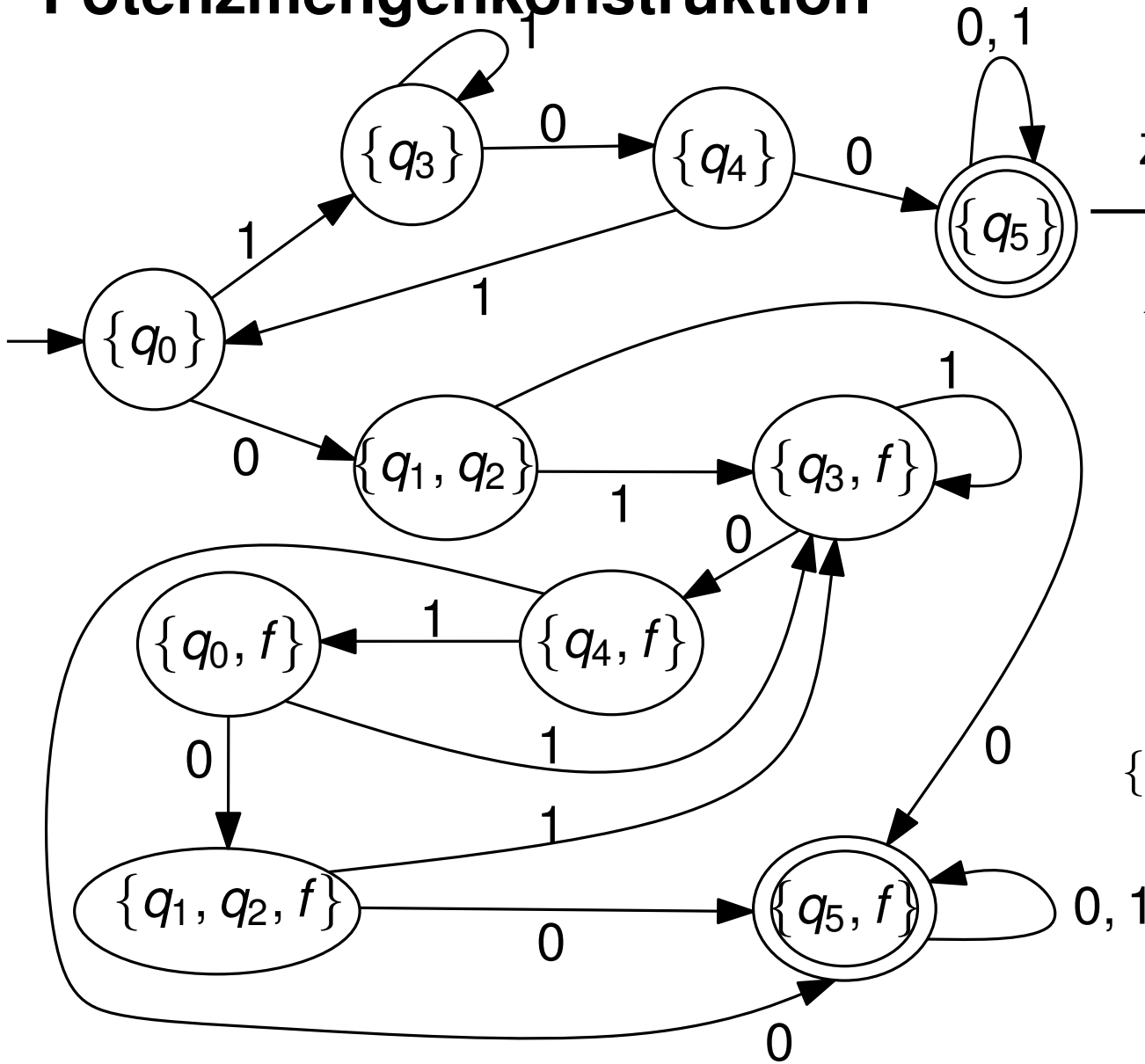
Potenzmengenkonstruktion



1. Schritt: NEA \rightarrow DEA

Zustand	Übergänge	
	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_5, f\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_5, f\}$
$\{q_3, f\}$	$\{q_4, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_4\}$	$\{q_5\}$	$\{q_0\}$
$\{q_4, f\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_0, f\}$
$\{q_5\}$	$\{q_5\}$	$\{q_5\}$
$\{q_0, f\}$	$\{q_1, q_2, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_1, q_2, f\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_3, f\}$

Potenzmengenkonstruktion



Zustand	Übergänge	
	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_4\}$	$\{q_5\}$	$\{q_0\}$
$\{q_5\}$	$\{q_5\}$	$\{q_5\}$
$\{q_0, f\}$	$\{q_1, q_2, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_3, f\}$	$\{q_4, f\}$	$\{q_3, f\}$
$\{q_4, f\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_0, f\}$
$\{q_1, q_2, f\}$	$\{q_5, f\}$	$\{q_3, f\}$

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

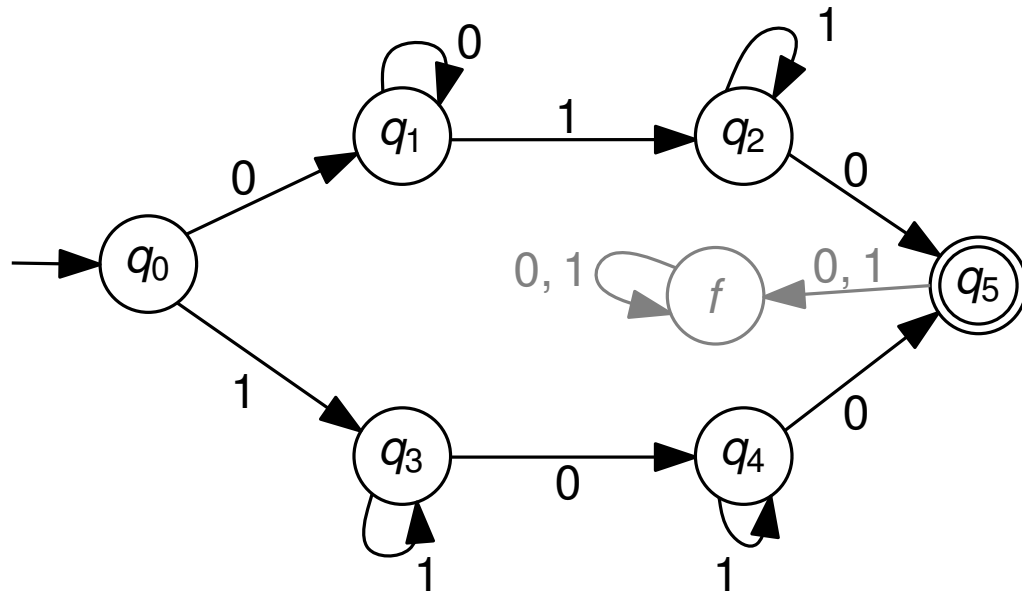
- Zwei Zustände haben dasselbe Akzeptanzverhalten, wenn es für das Erreichen eines Endzustandes durch Abarbeiten eines Wortes w unerheblich ist, aus welchem der beiden Zustände wir starten.
- Reduktion der Anzahl der Zustände durch Zusammenlegen der Zustände mit gleichem Akzeptanzverhalten.

Minimierung von Automaten

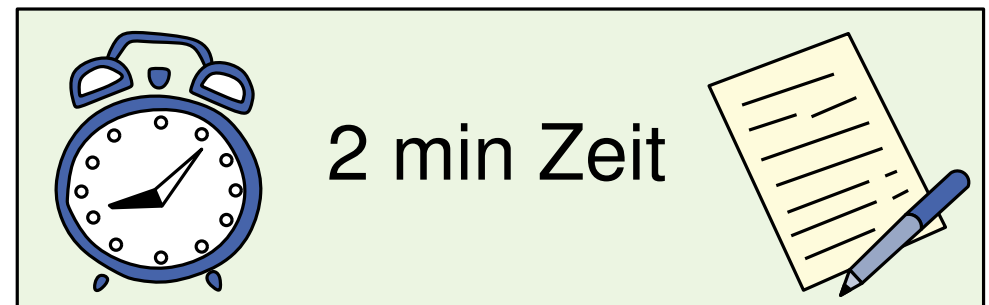
Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.



Welche Zustände sind äquivalent?

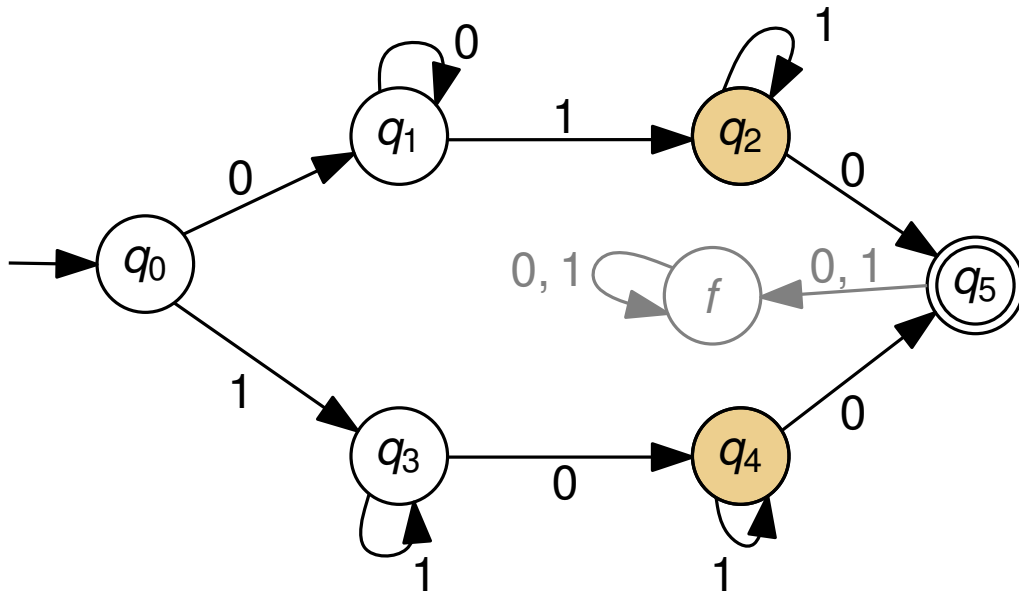


Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.



Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch:

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

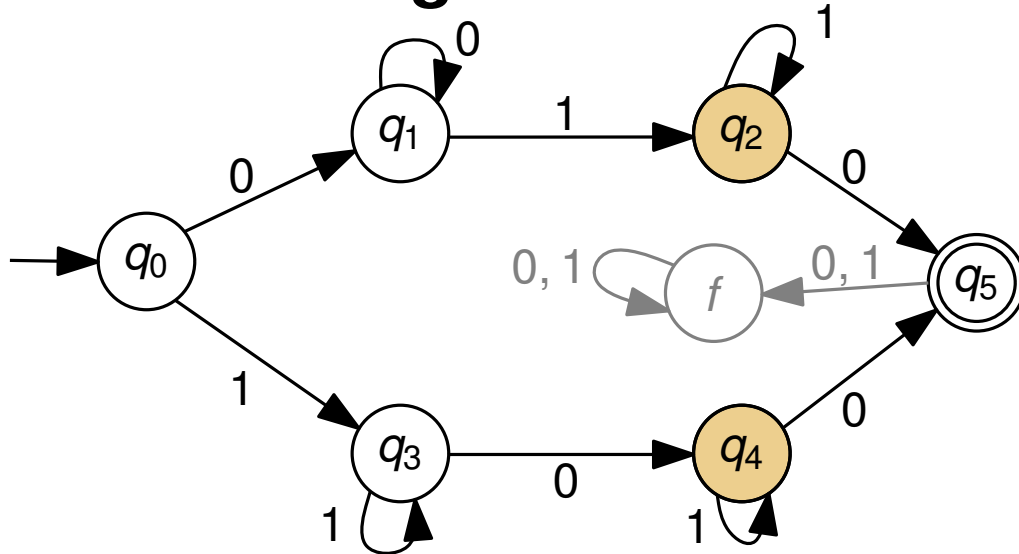
Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

In der Vorlesung:

- \mathcal{A}^{\equiv} akzeptiert dieselbe Sprache wie \mathcal{A} .
- \mathcal{A}^{\equiv} ist minimal (nächste VL).

Minimierung von Automaten



Wie sieht der Äquivalenzklassenautomat aus?



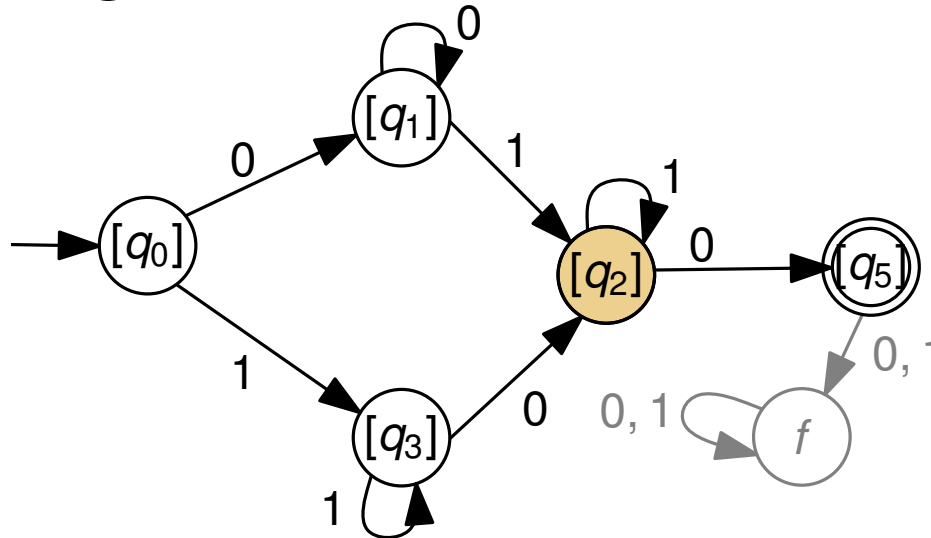
Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

In der Vorlesung:

- \mathcal{A}^{\equiv} akzeptiert dieselbe Sprache wie \mathcal{A} .
- \mathcal{A}^{\equiv} ist minimal (nächste VL).

Minimierung von Automaten



Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

In der Vorlesung:

- \mathcal{A}^{\equiv} akzeptiert dieselbe Sprache wie \mathcal{A} .
- \mathcal{A}^{\equiv} ist minimal (nächste VL).

Minimierung von Automaten

Zwei Zustände p und q eines deterministischen endlichen Automaten heißen *äquivalent* ($p \equiv q$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\delta(p, w) \in F \iff \delta(q, w) \in F.$$

Mit $[p]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der zu p äquivalenten Zustände.

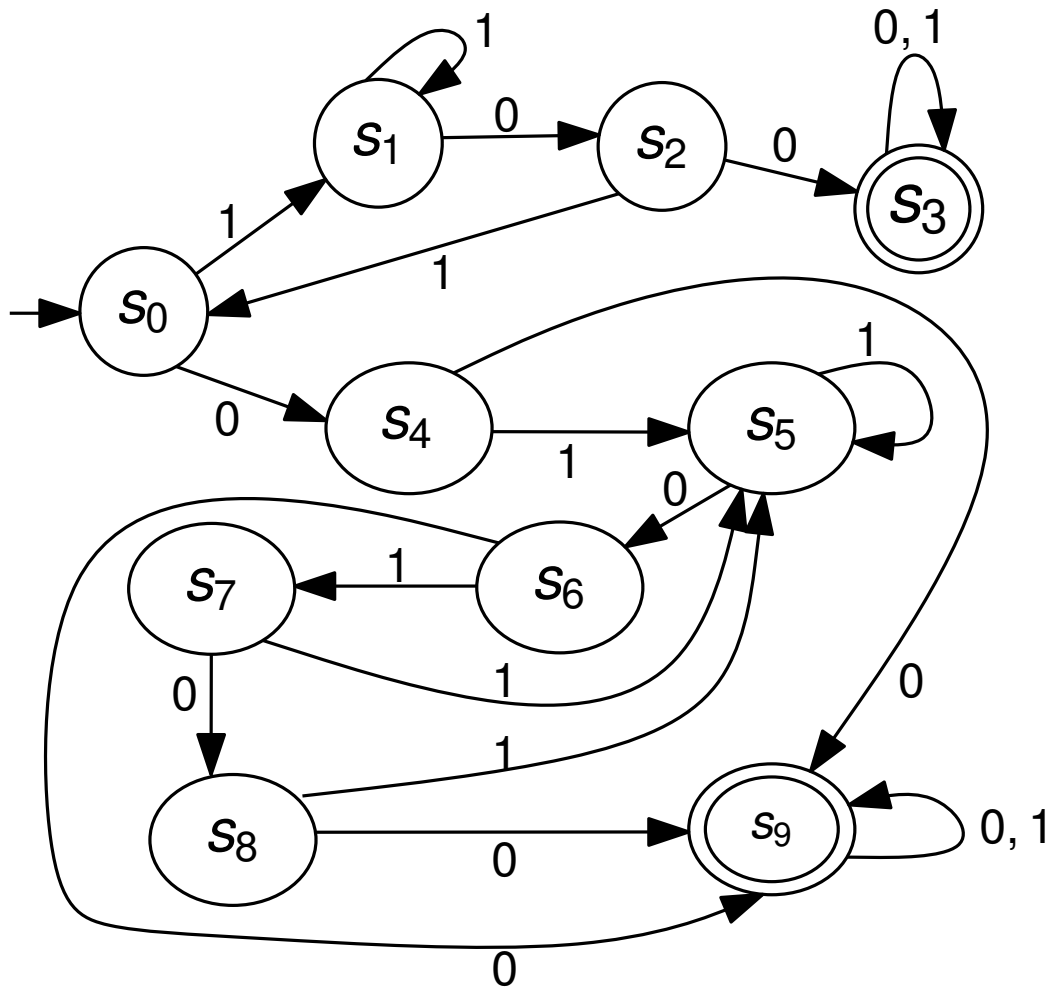
Zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ definieren wir den Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}^{\equiv} = (Q^{\equiv}, \Sigma^{\equiv}, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ durch

- $Q^{\equiv} := \{[q]\} \quad q \in Q$
- $\Sigma^{\equiv} := \Sigma$
- $\delta^{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$
- $s^{\equiv} := [s]$
- $F^{\equiv} := \{[f]\} \quad f \in F$

Verfahren:

Finde systematisch **Zeugen** w für Zustände p und q , die nicht äquivalent sind:

$$|\{\delta(p, w), \delta(q, w)\} \cap F| = 1$$

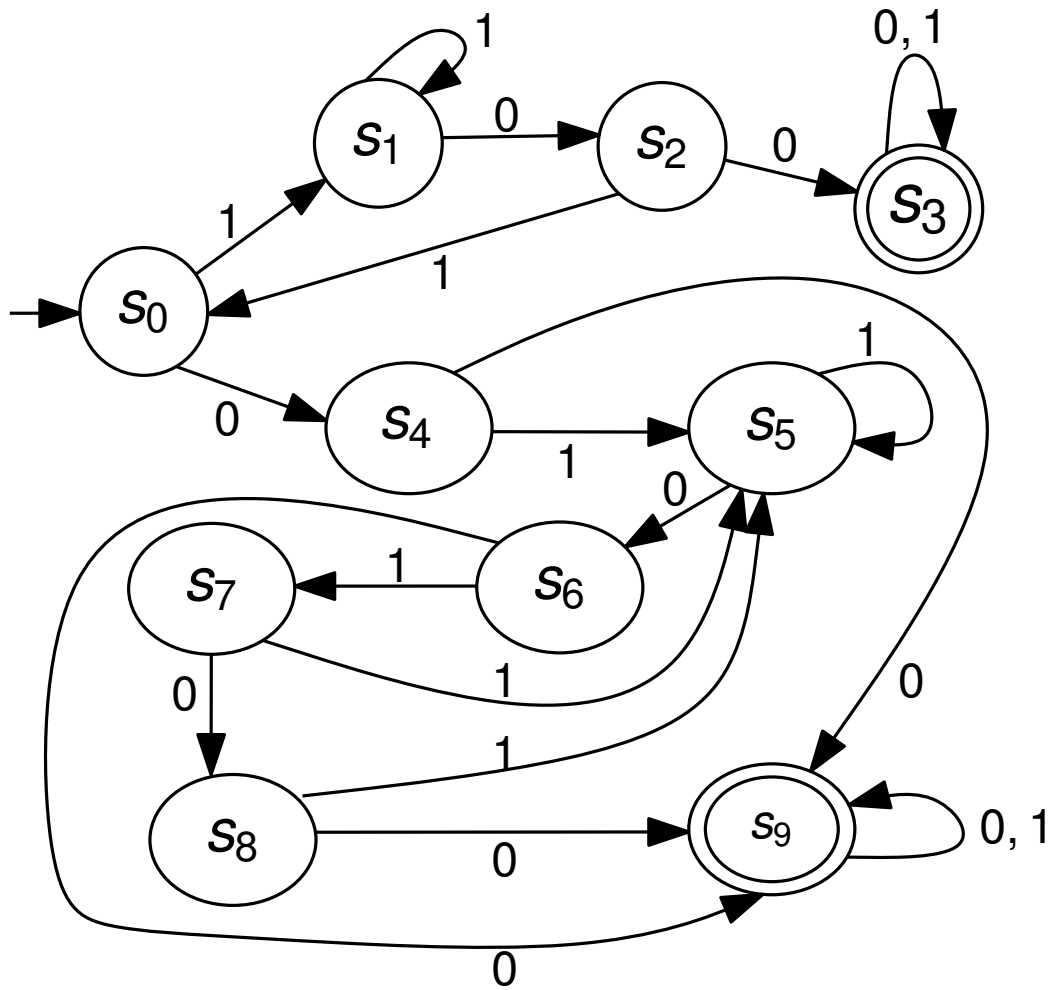


$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$

Betrachte Wort $w =$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



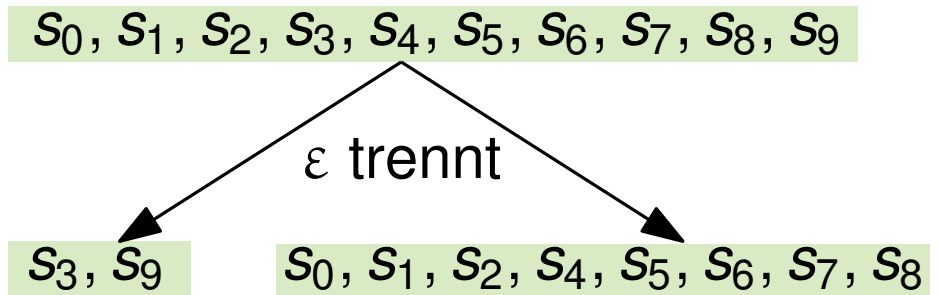
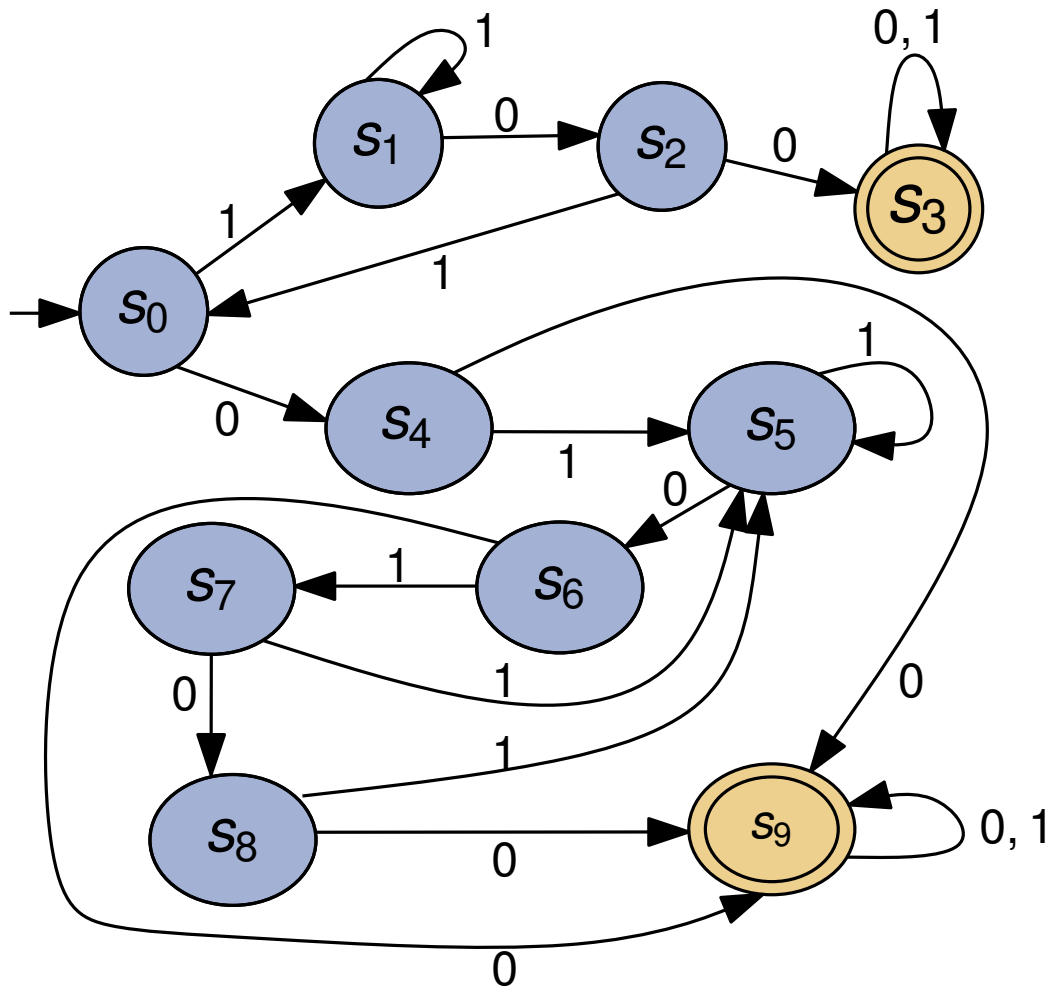
$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$



Betrachte Wort $w = \varepsilon$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

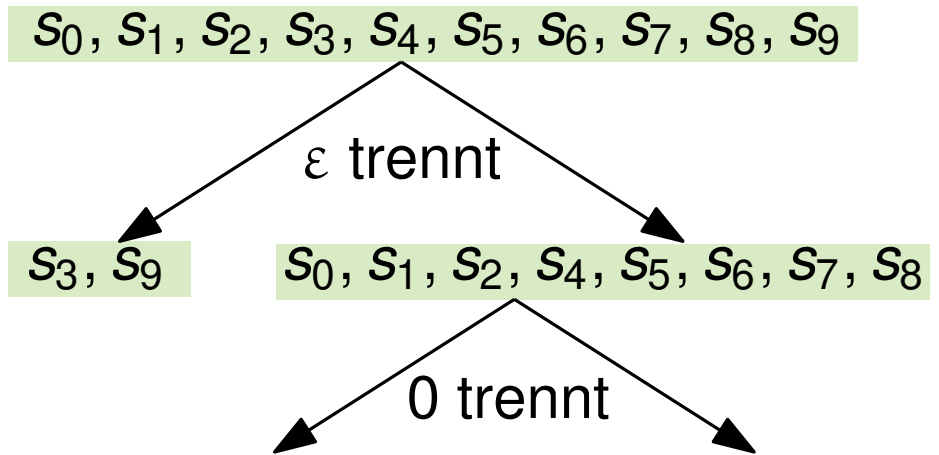
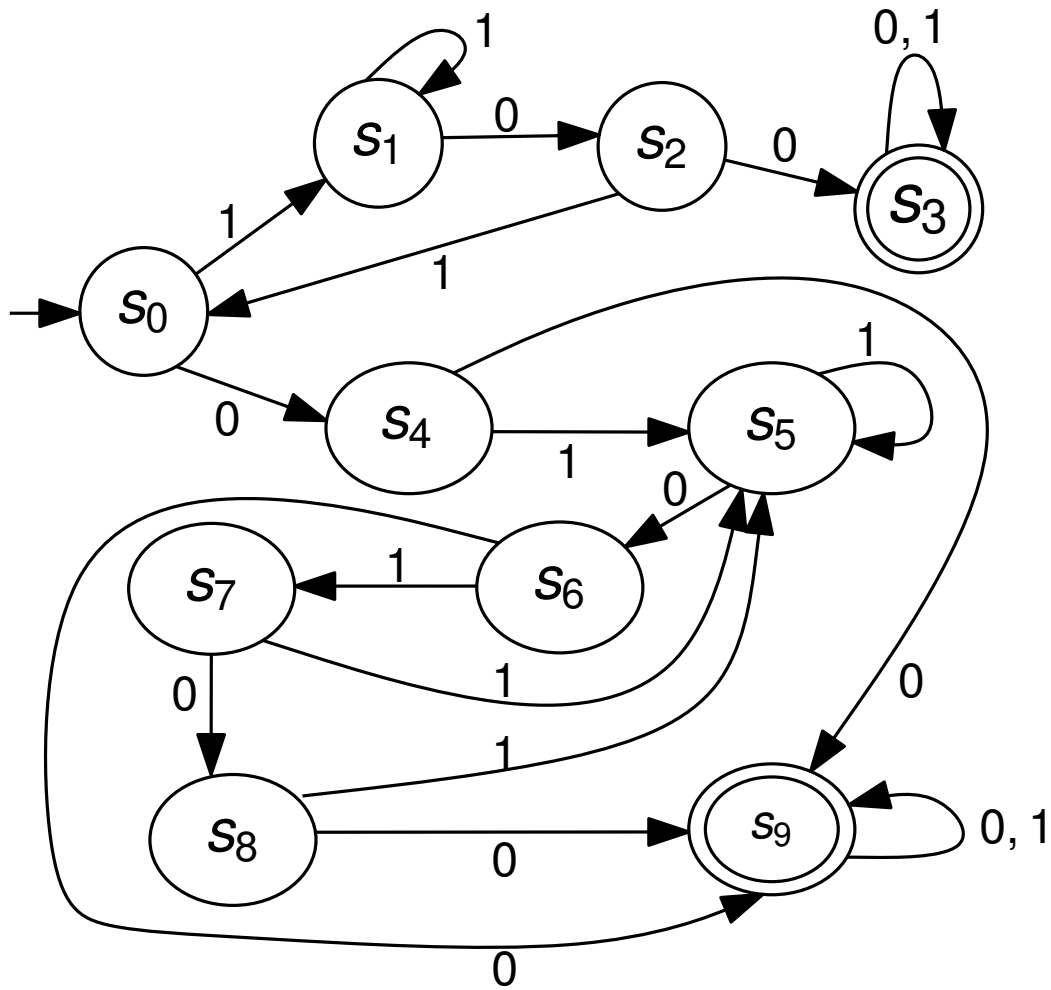
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



Betrachte Wort $w = \varepsilon$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

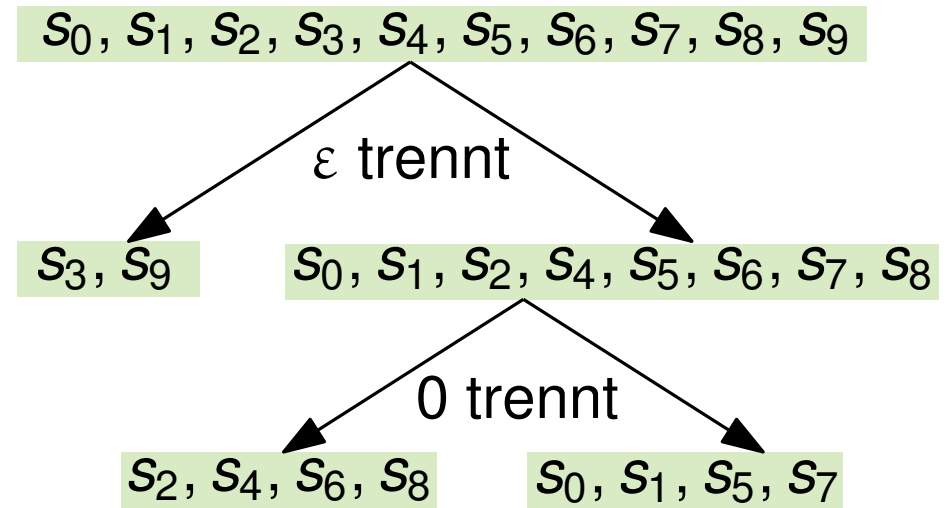
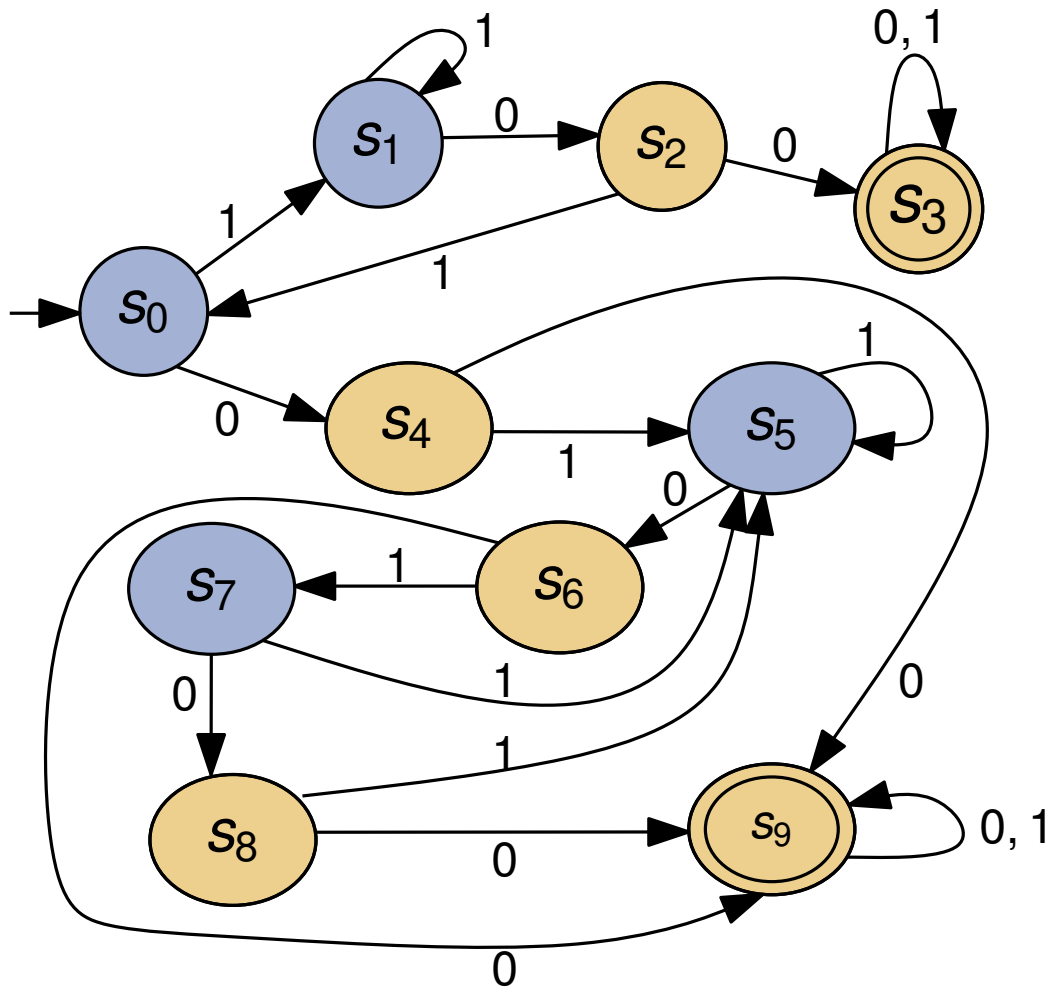
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



Betrachte Wort $w = 0$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

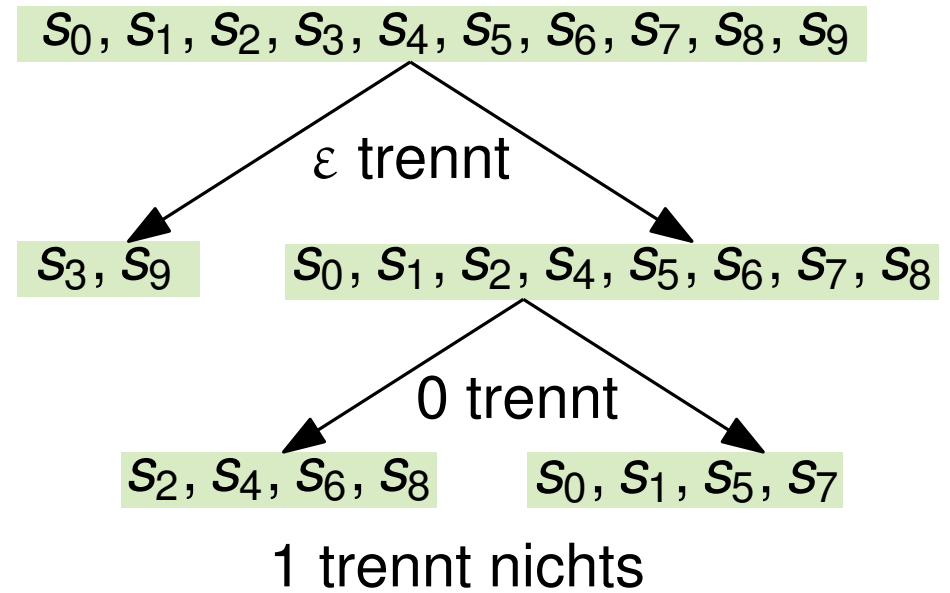
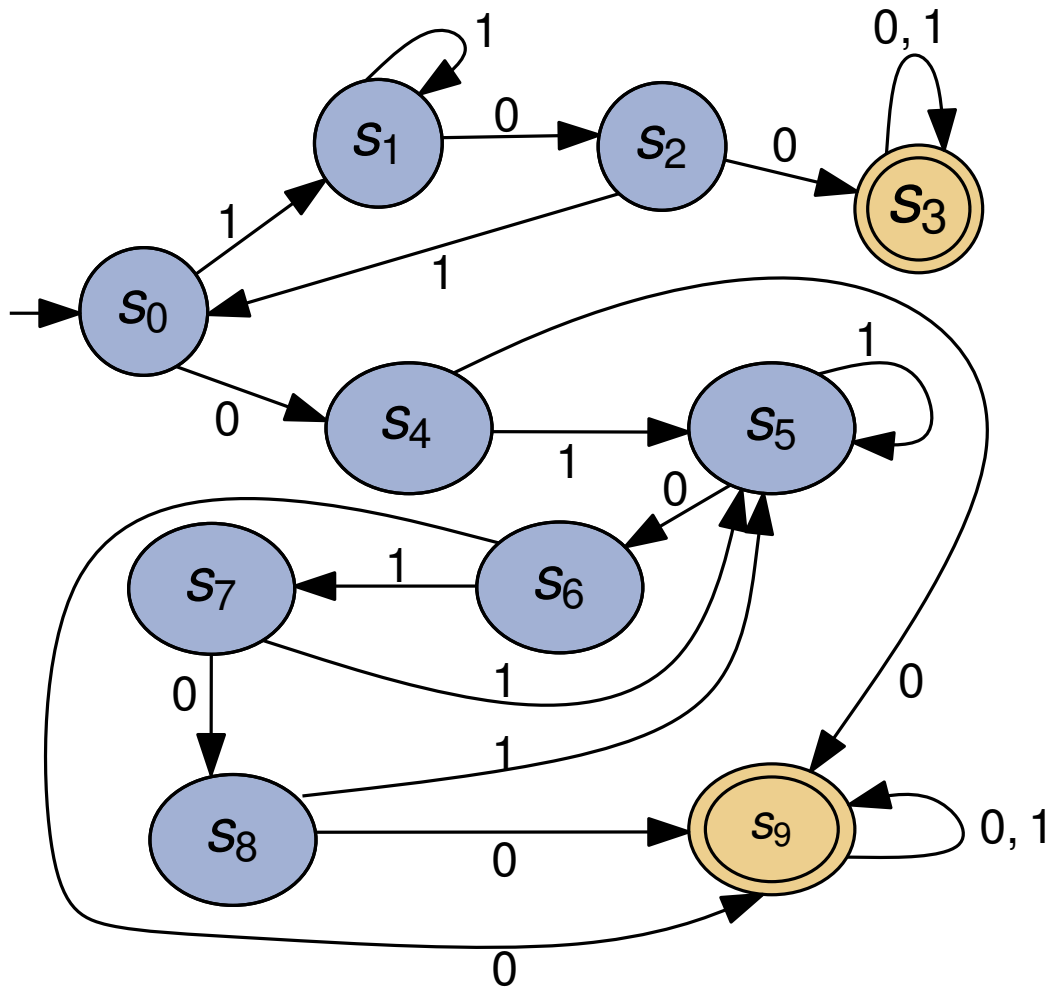
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



Betrachte Wort $w = 0$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

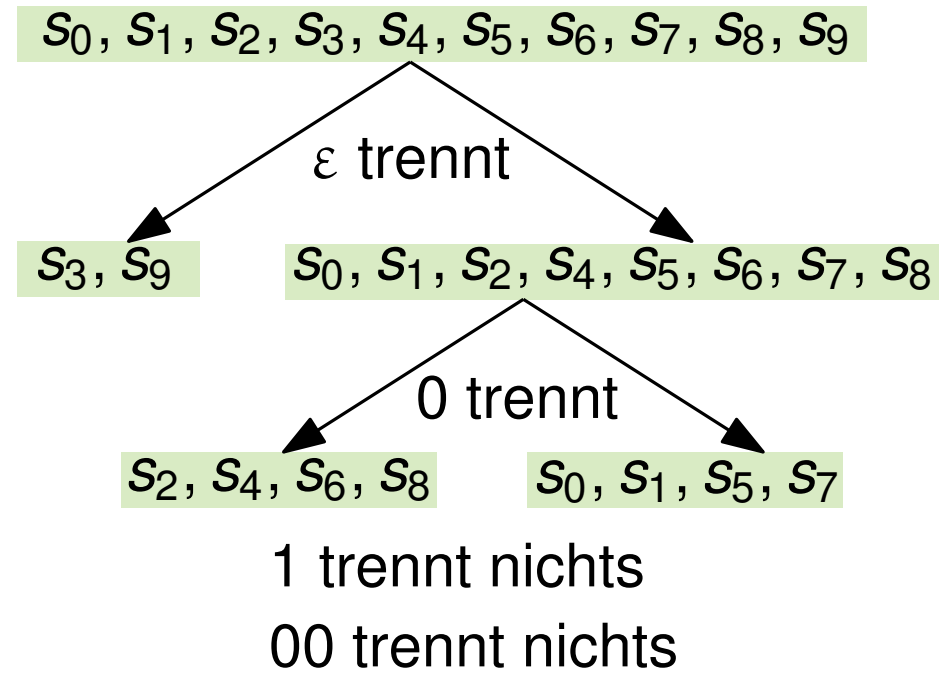
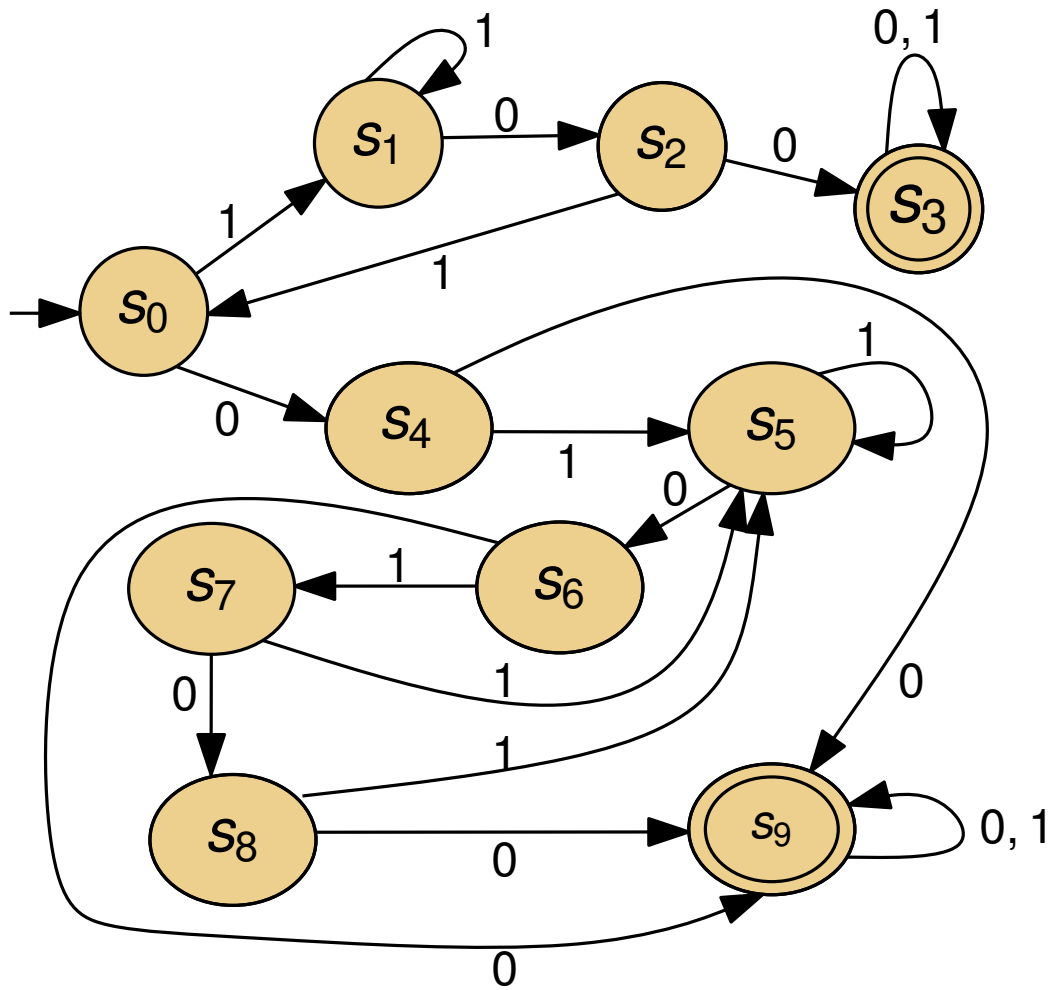
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



Betrachte Wort $w = 1$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

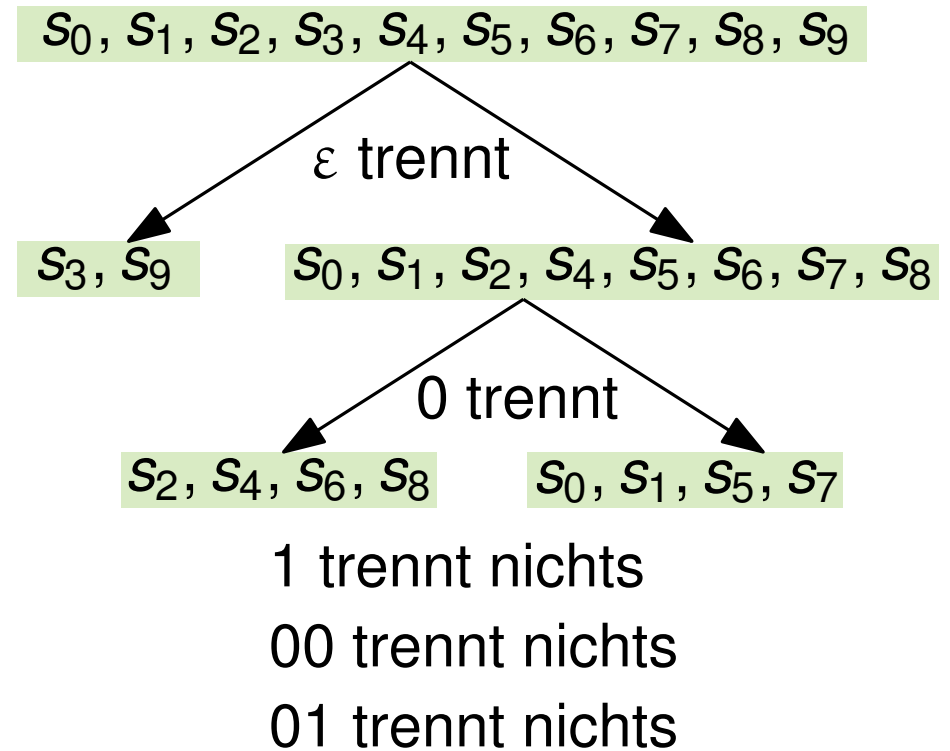
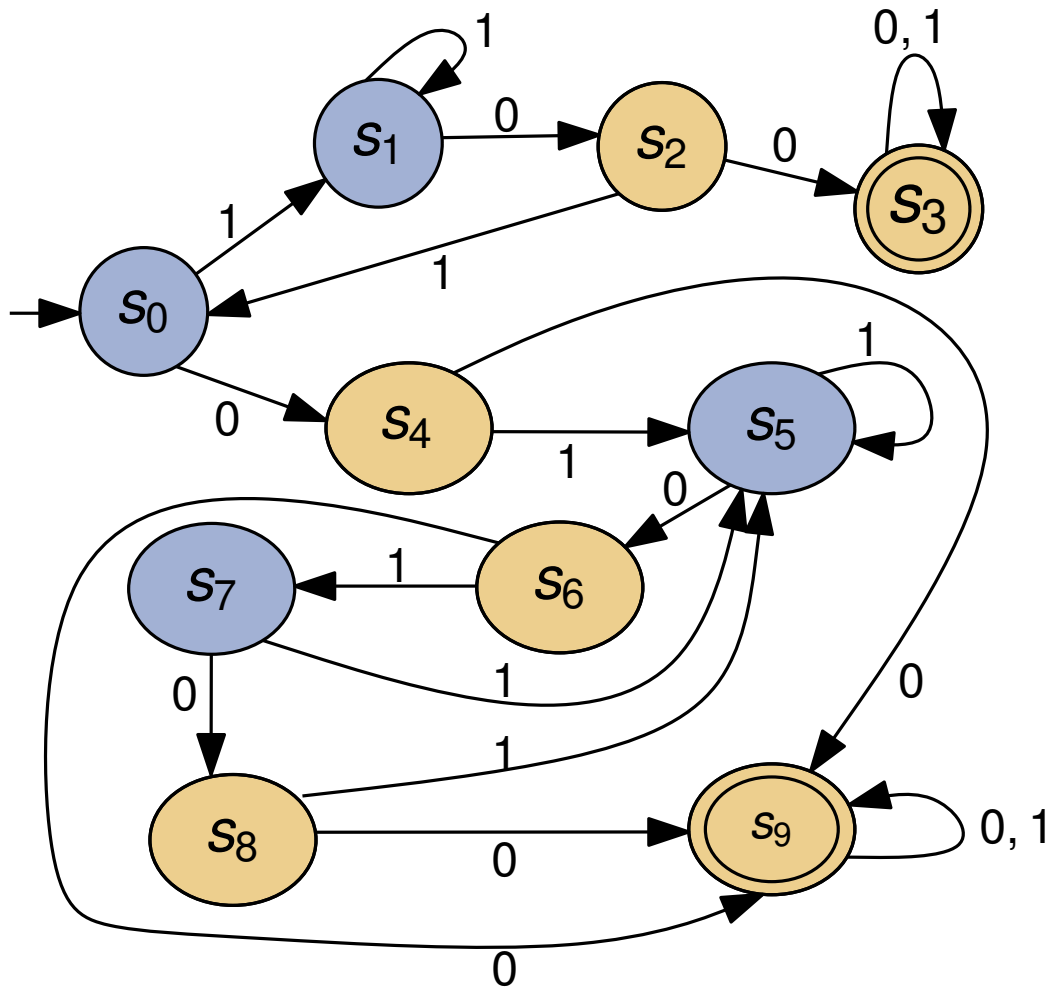
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



Betrachte Wort $w = 00$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

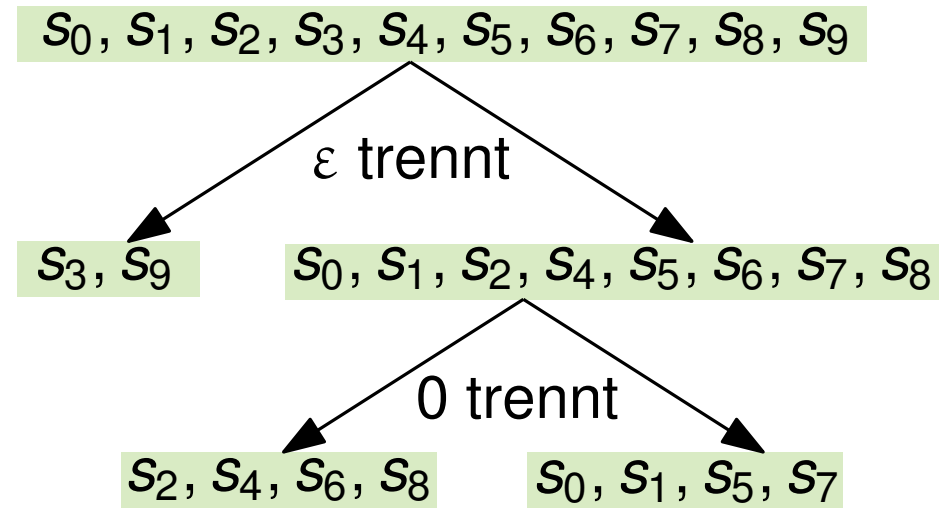
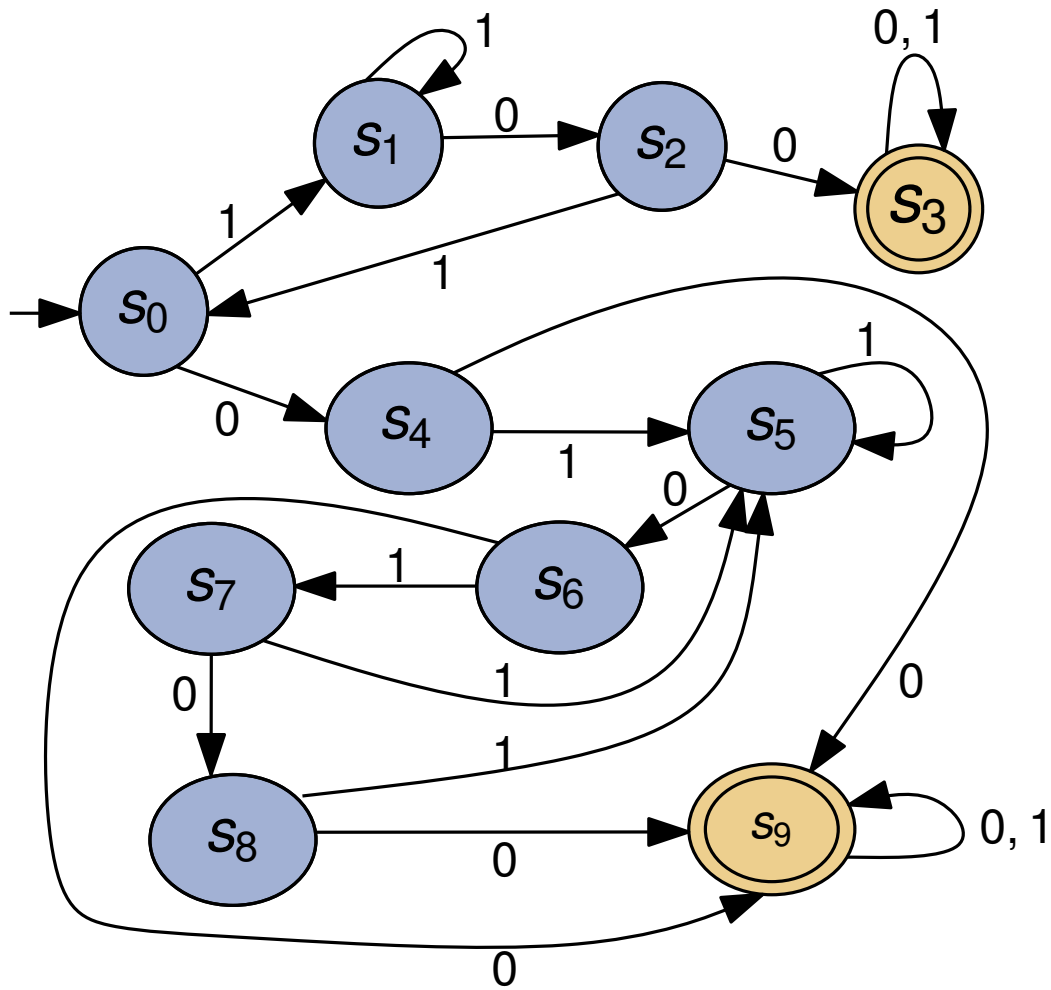
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



Betrachte Wort $w = 01$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

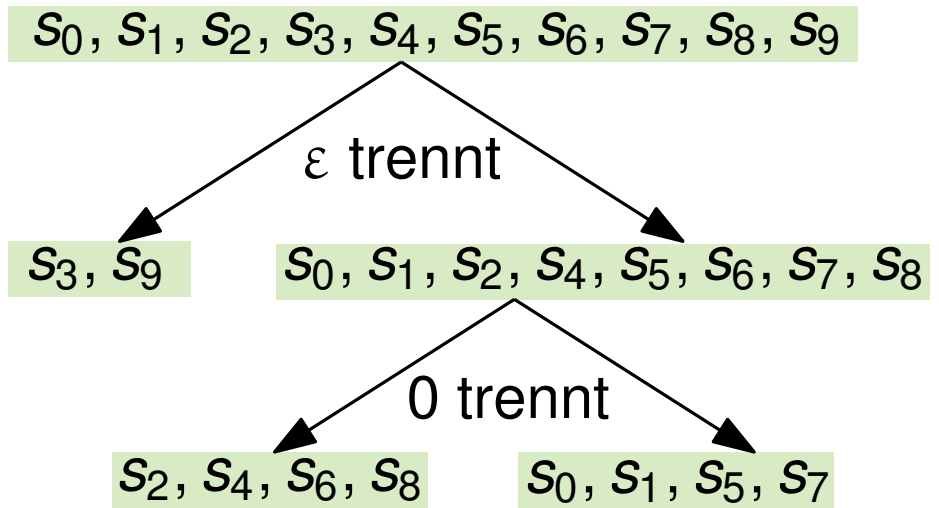
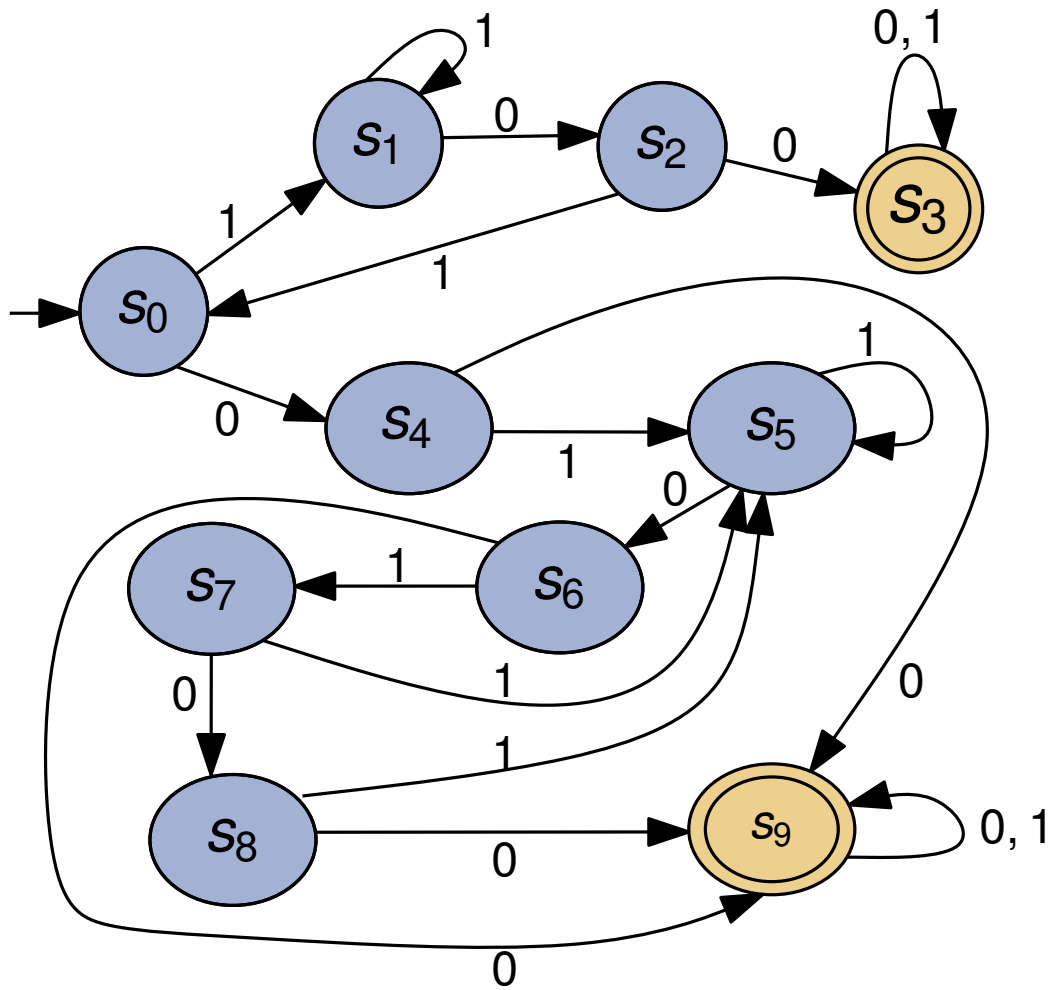


- 1 trennt nichts
- 00 trennt nichts
- 01 trennt nichts
- 10 trennt nichts

Betrachte Wort $w = 10$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

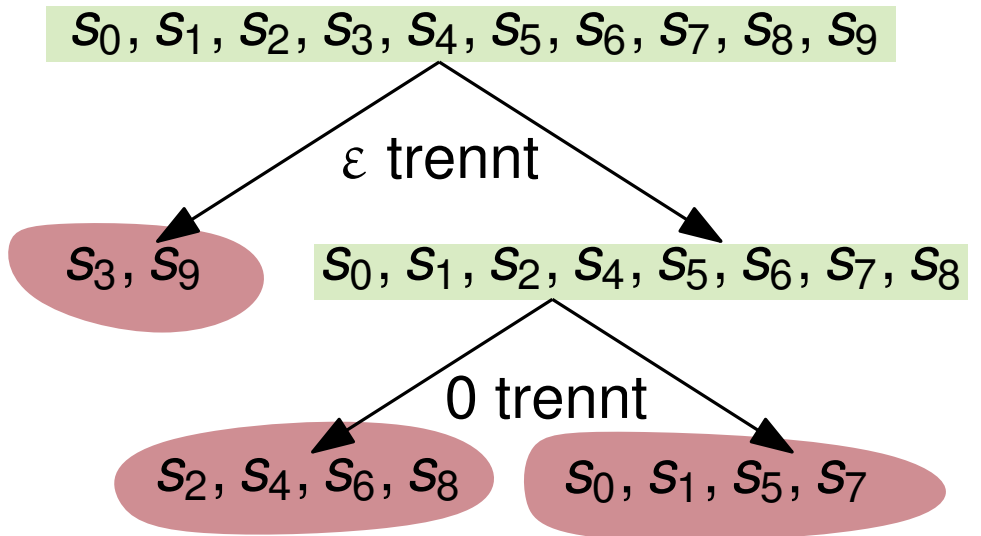
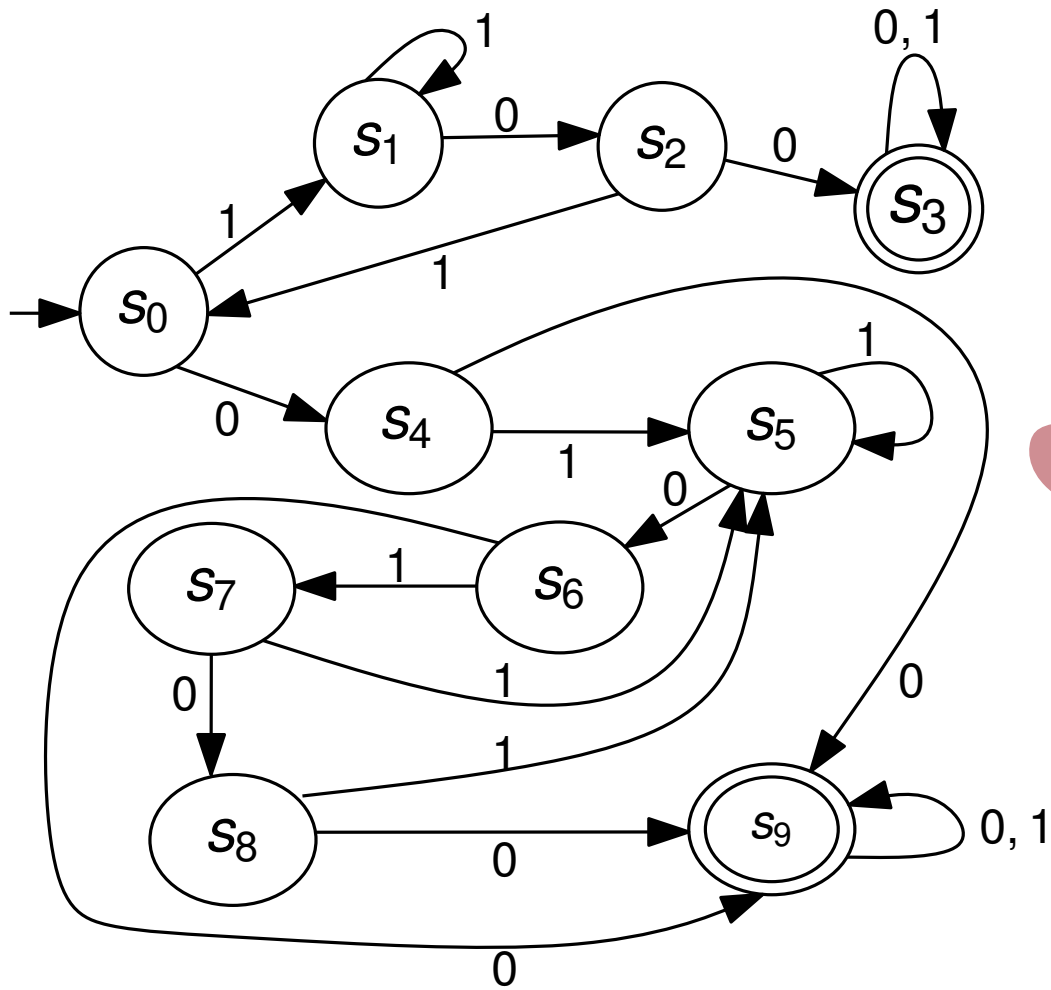


- 1 trennt nichts
- 00 trennt nichts
- 01 trennt nichts
- 10 trennt nichts
- 11 trennt nichts

Betrachte Wort $w = 11$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

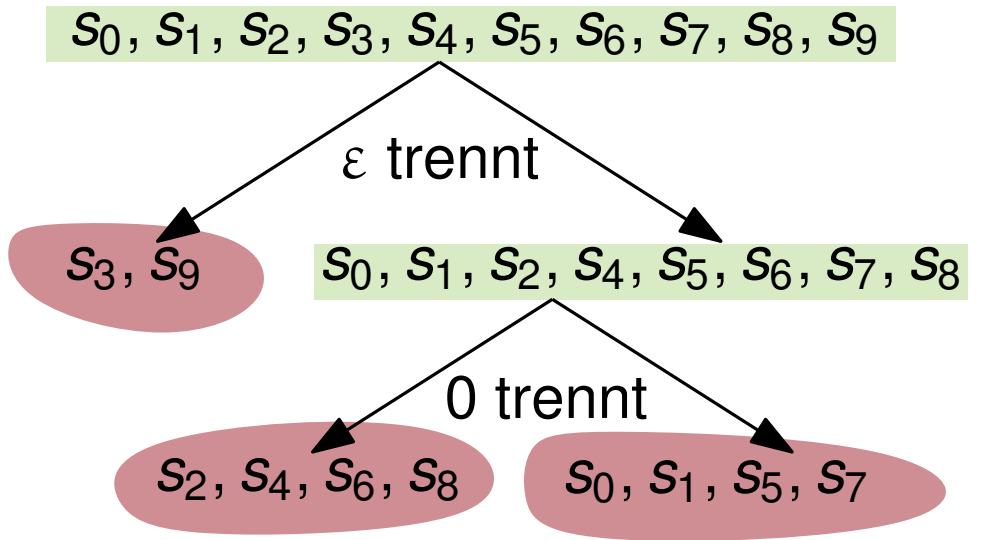
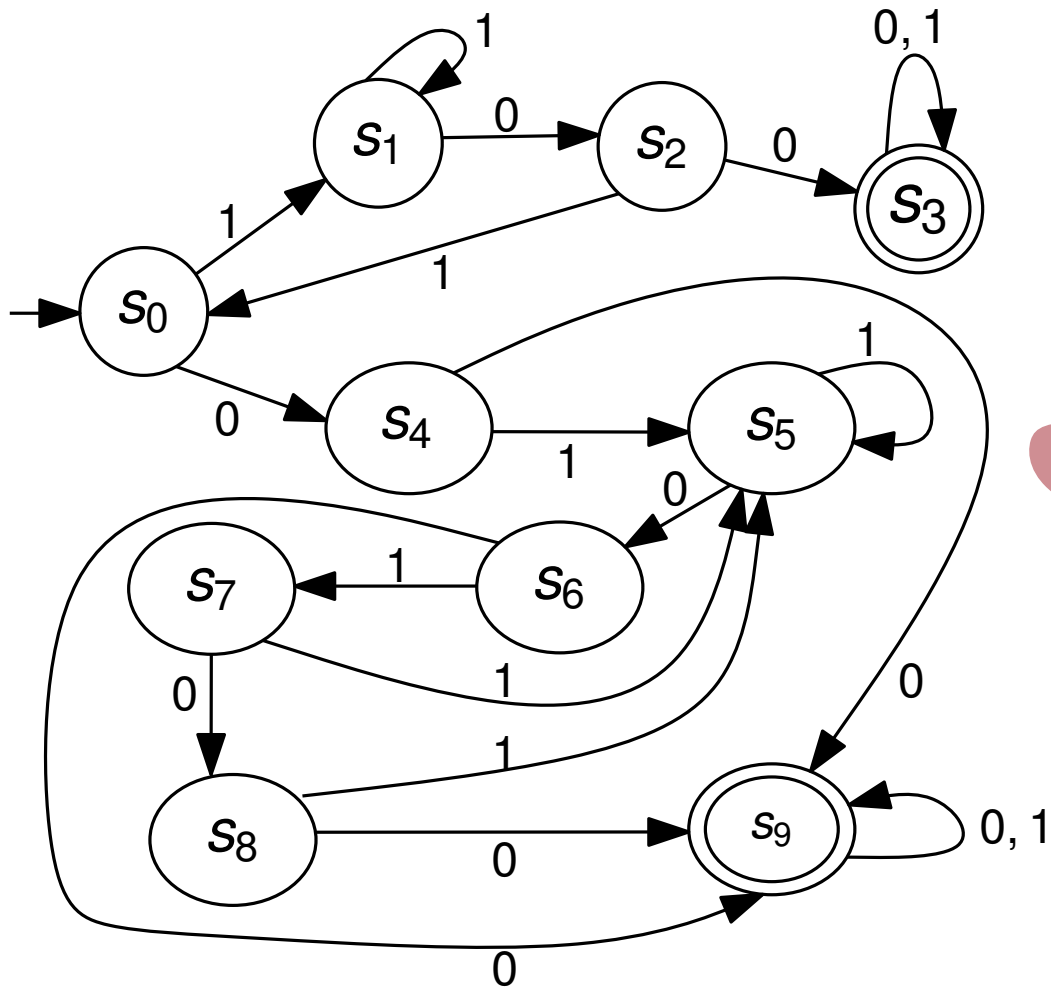


3 Äquivalenzklassen!

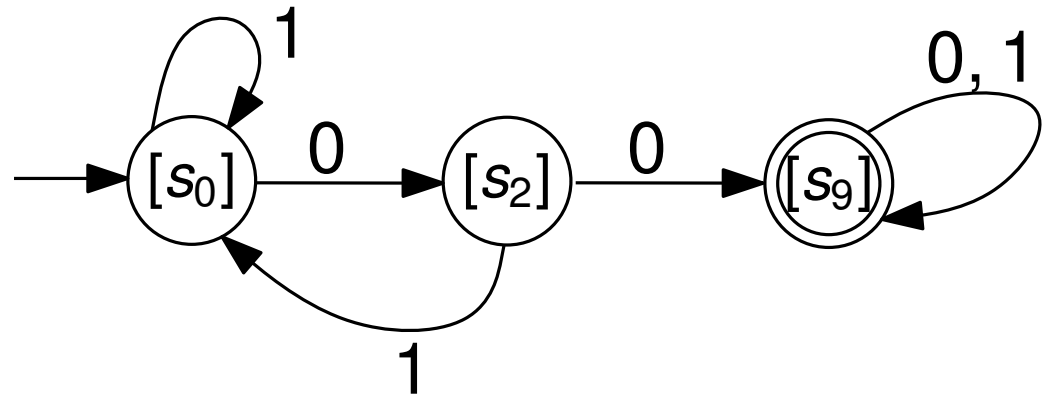
Betrachte Wort $w = 11$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.



3 Äquivalenzklassen!

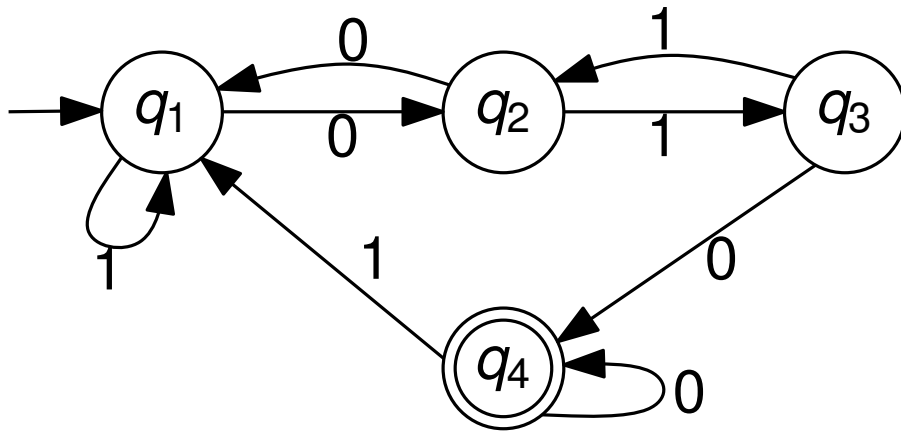


Betrachte Wort $w = 11$

$\delta(s_i, w)$ endet in Endzustand.

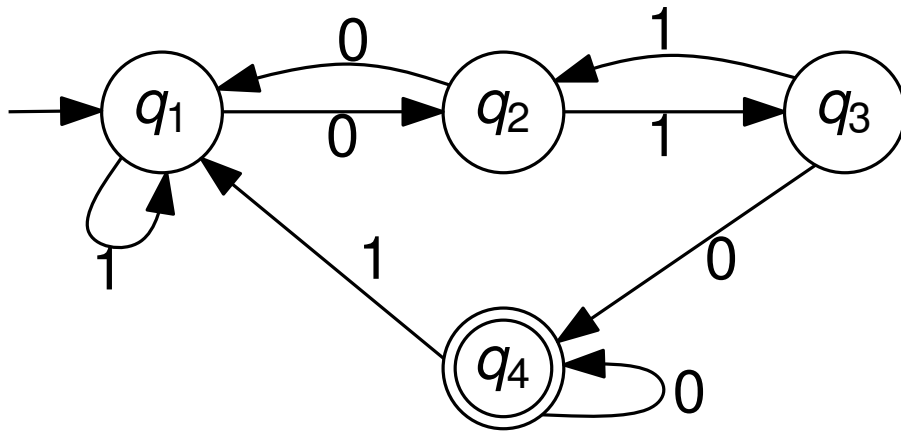
$\delta(s_i, w)$ endet nicht in Endzustand.

Minimierung von Automaten



Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

Minimierung von Automaten

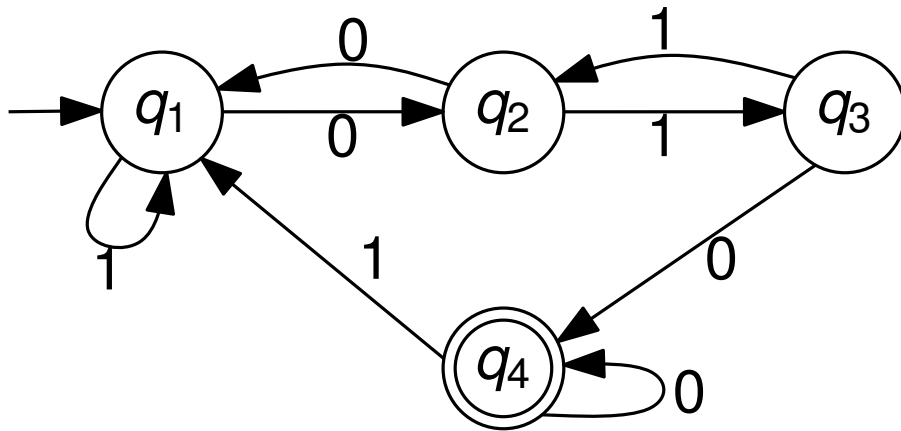


Betrachte: $\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, \dots$

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

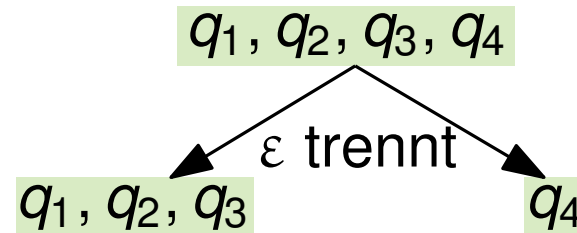
q_1, q_2, q_3, q_4

Minimierung von Automaten

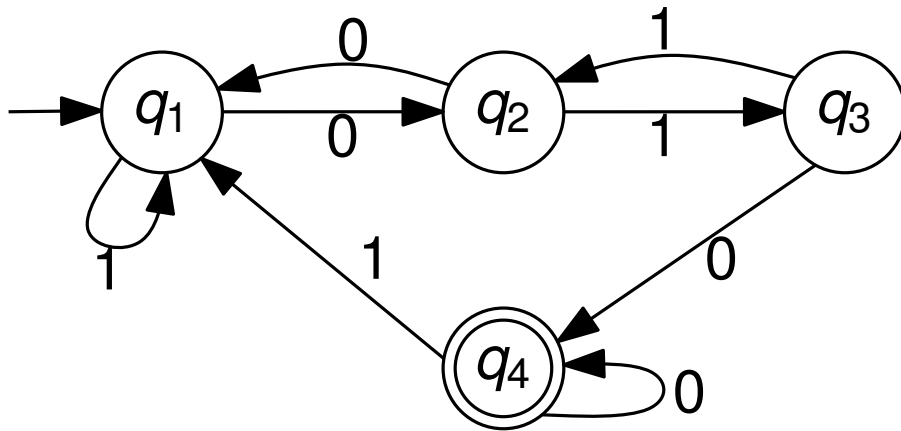


Betrachte: $\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, \dots$

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.

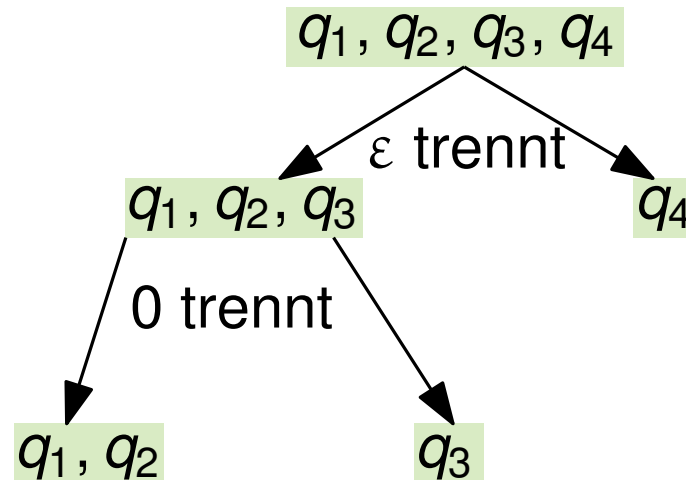


Minimierung von Automaten

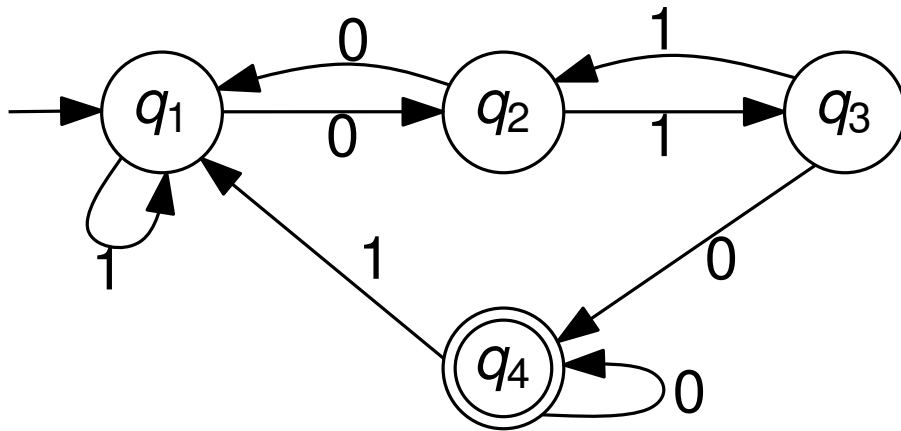


Betrachte: $\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, \dots$

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.



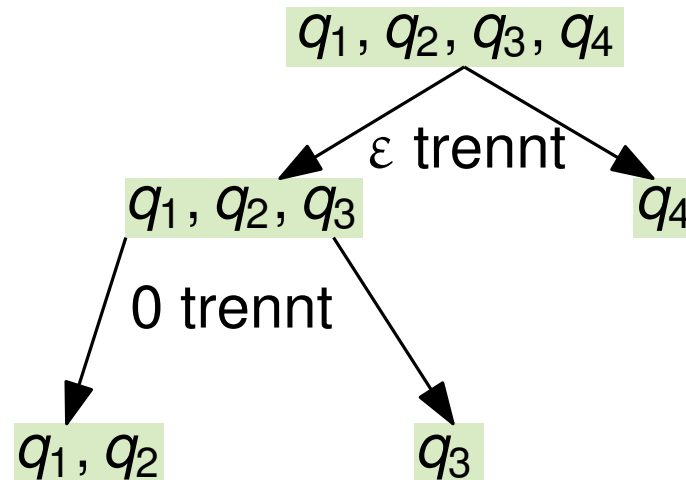
Minimierung von Automaten



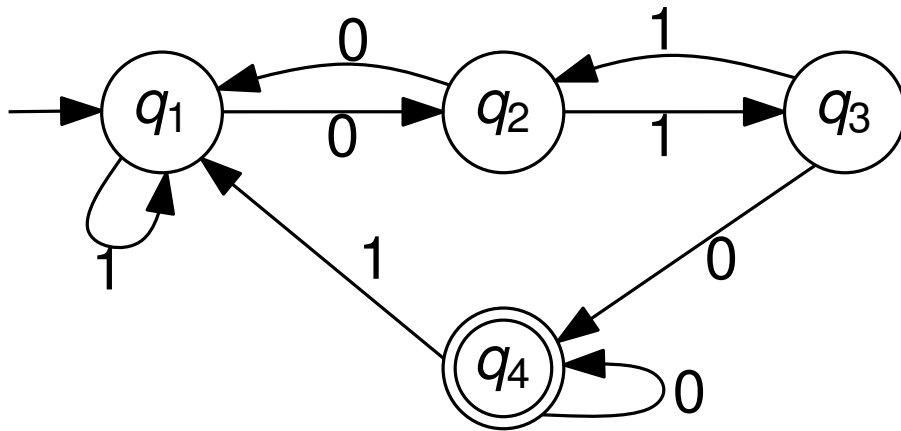
Betrachte: $\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, \dots$

1 trennt nichts

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.



Minimierung von Automaten

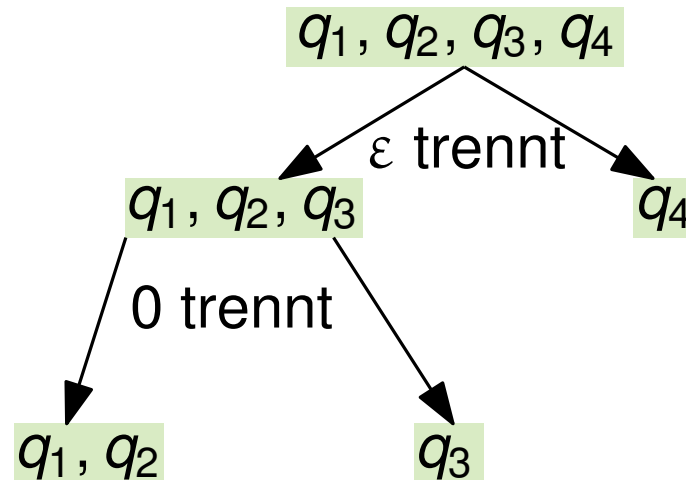


Betrachte: $\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, \dots$

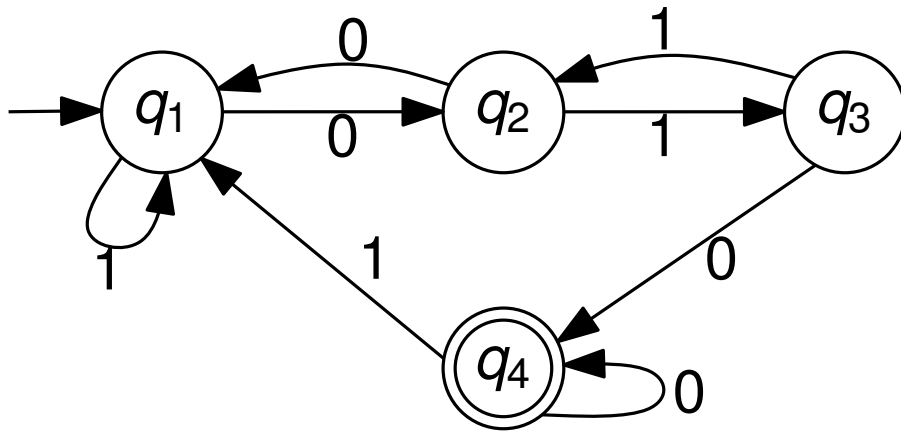
1 trennt nichts

01 trennt nichts

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.



Minimierung von Automaten

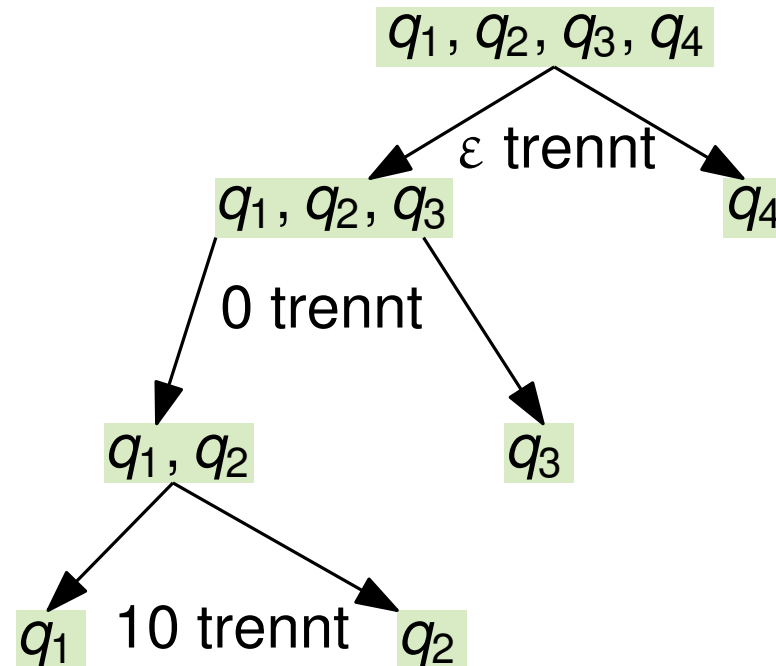


Betrachte: $\varepsilon, 0, 1, 01, 10, 11, \dots$

1 trennt nichts

01 trennt nichts

Zeigen Sie, dass dieser Automat bezüglich der Äquivalenzklassenkonstruktion minimal ist.



4 Äquivalenzklassen!