Fünftes Übungsblatt

Ausgabe: 18. Januar 2017
Besprechung: 25. Januar 2017

1 Beschreibungen Planarer Einbettungen

Sei G ein planarer Graph mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Für $1 \leq i \leq f$ sei a_i die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G, wobei die Facetten so numeriert seien, daß die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.
Kann es zu einem planaren Graphen G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so daß die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

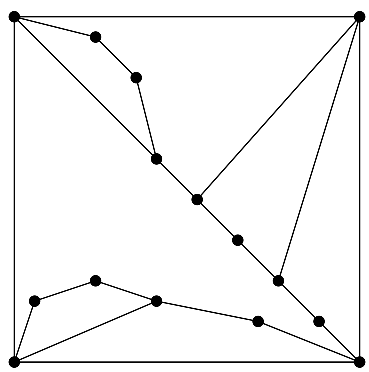
2 Winkelsumme in Facetten

Gegeben sei eine orthogonale Einbettung $\mathcal{E}$ eines planaren Graphen. Zeigen Sie: Falls f eine innere Facette von $\mathcal{E}$ ist, dann ist die Summe aller innerhalb von f auftretenden Winkel gleich $\pi(p-2)$, wobei p die Anzahl der auftretenden Winkel ist. Ist f die äußere Facette, so ist die entsprechende Summe gleich $\pi(p+2)$.

3 Knickminimierung im Flussnetzwerk

(a) Geben Sie für nebenstehenden Graphen ein einbettungserhaltendes orthogonales Layout an. Bestimmen Sie dazu analog zur Vorlesung das entsprechende Flussnetzwerk, finden Sie einen zulässigen Fluss darin und übersetzen Sie diesen in die zugehörige orthogonale Einbettung. Wieviele Knicke erzeugt Ihre Einbettung?

(b) Überlegen Sie sich eine planare Einbettung des Graphen, in der die Anzahl der Knicke einer orthogonalen Einbettung minimal ist (bzgl. aller möglichen planaren Einbettungen).



4 Knicke bei Oktaedern

Zeigen Sie, dass es in *jeder* kreuzungsfreien orthogonalen Zeichnung eines Oktaeders (vollständig triangulierter, planarer, 4-regulärer Graph mit 6 Knoten) mindestens eine Kante gibt, die mehr als zwei Knicke hat. Bestimmen Sie dazu, wieviele Knicke die Kanten, die zur äußeren Facette inzident sind, insgesamt mindestens haben.

bitte umblättern

5 Knickminimierung mit zusätzlichen Forderungen

Gegeben sei ein zweifach-zusammenhängender planarer Graph mit Maximalgrad 4. Modifizieren Sie das Flussmodell zur Knickminimierung in orthogonalen Layouts, so dass

(a) keine Kante e mehr als $k(e)$ Knicke hat;
(b) keine innere Facette f mehr als $k(f)$ konkave Ecken (Innenwinkel von $3\pi/2$) auf ihrem Rand hat;
(c) statt der Anzahl der Knicke die Anzahl der konkaven Ecken in den inneren Facetten der Zeichnung minimiert wird.

6 Gitterzeichnungen ohne Hohlräume

Orthogonale Gitterzeichnungen, in denen es Gitterspalten oder Gitterzeilen gibt, die keinen Knoten oder Knick enthalten, lassen sich an dieser Stelle problemlos zusammenstauchen, ohne dass die zugehörige orthogonale Beschreibung dadurch verändert wird. Man fordert daher oft, dass in einer Gitterzeichnung Γ innerhalb der *bounding box*[1] $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ jede Gitterspalte $x_i \in [x_{\min}, x_{\max}] \cap \mathbb{Z}$ und jede Gitterzeile $y_i \in [y_{\min}, y_{\max}] \cap \mathbb{Z}$ mindestens einen Knick oder Knoten enthält, also nicht unbenutzt ist.

In diesem Fall kann der Flächenbedarf einer Zeichnung für einen Graphen G mit orthogonaler Beschreibung H nicht beliebig groß werden.

Zeigen Sie:

(a) Für eine Zeichnung Γ eines Graphen G mit n Knoten, Minimalgrad 2 und einer orthogonalen Beschreibung H mit b Knicken ist die Zeichenfläche höchstens $\lfloor (n+b)/2 \rfloor \cdot \lceil (n+b)/2 \rceil$.
(b) Geben Sie eine Familie von Graphen an, die einerseits zeigt, dass die obige Schranke scharf ist, die aber andererseits auch jeweils eine Zeichnung mit linear beschränkter Fläche von $O(n+b)$ erlaubt.

Hinweis zu (a): Ersetzen Sie zunächst alle Knicke durch Dummyknoten und entfernen Sie anschließend vorübergehend alle Zeilen und Spalten, in denen nur ein einziger Knoten liegt.

[1] das kleinste achsenparallele Rechteck R mit $\Gamma \subseteq R$