Komplexgewichtetes Rucksackproblem und Anreize in Wechselstromnetzen

13. Dezember 2016

Sebastian Graf

Institut für Theoretische Informatik · Lehrstuhl Algorithmik

Motivation

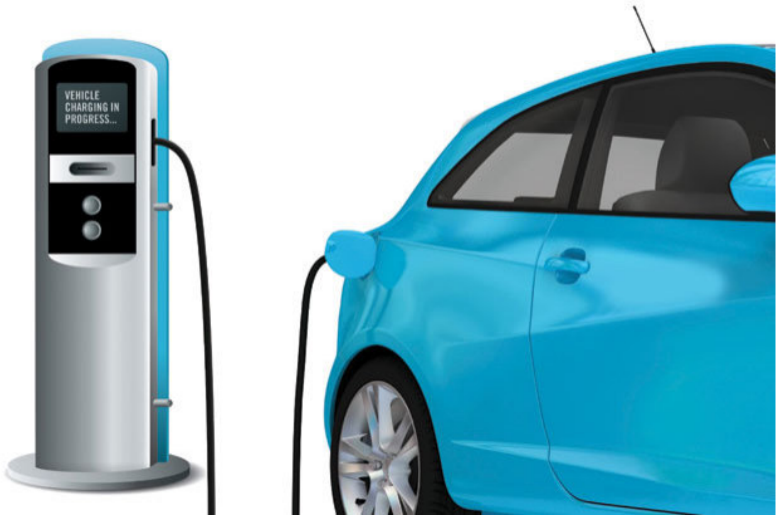
- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem

http://www.clipartpal.com/_thumbs/pd/computer/computer/workstation.png



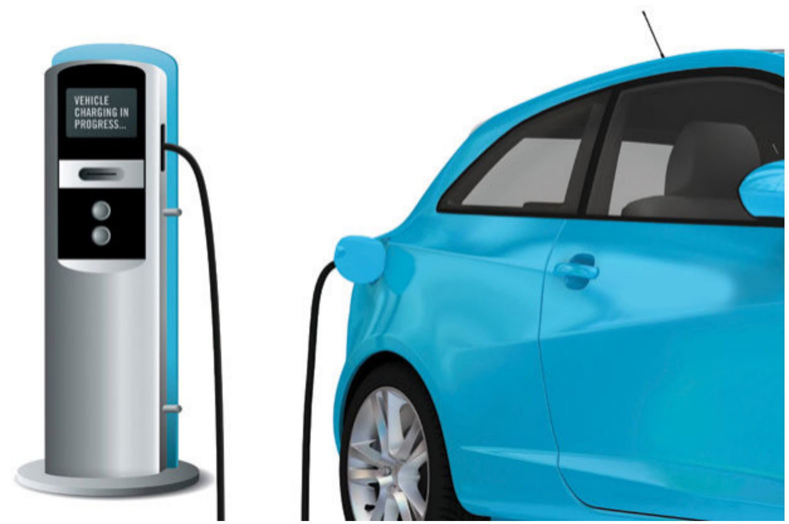
http://www.spiritsolar.co.uk/wp-content/uploads/2016/06/640_ev-cop.jpg

Motivation

Karlsruher Institut für Technologie

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem

http://www.clipartpal.com/_thumbs/pd/computer/computer/workstation.png



http://www.spiritsolar.co.uk/wp-content/uploads/2016/06/640_ev-cop.jpg

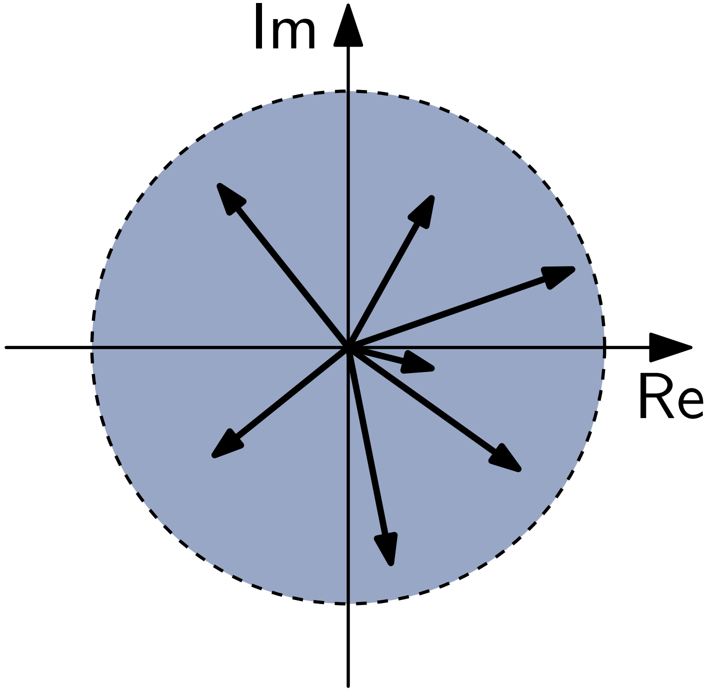
Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Motivation

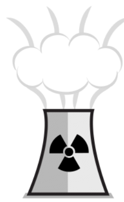
- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem

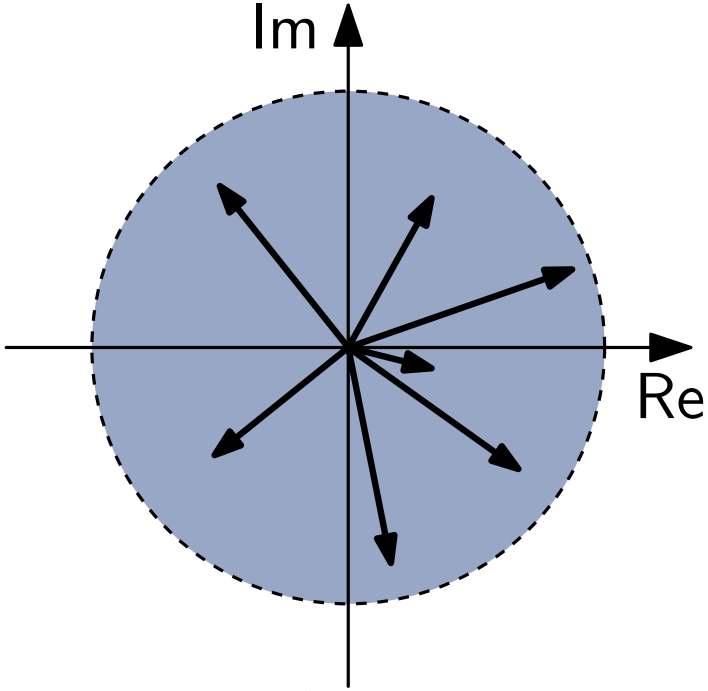


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem

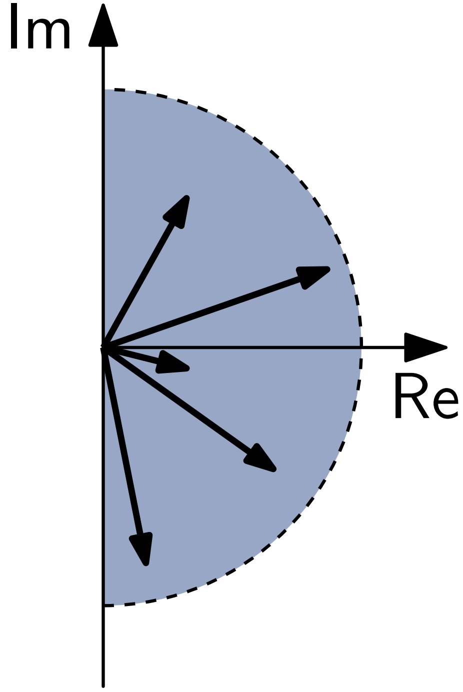




http://www.clipartkid.com/nuclear-power-plant-clipart-panda-free-clipart-images-64Bmb2-clipart/

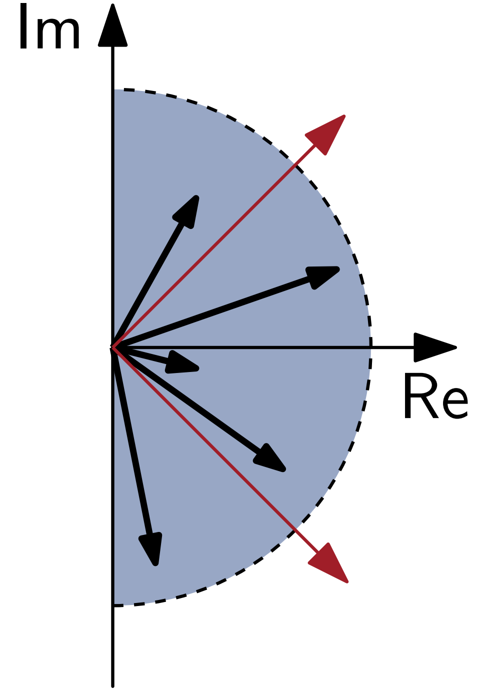
Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem



Motivation

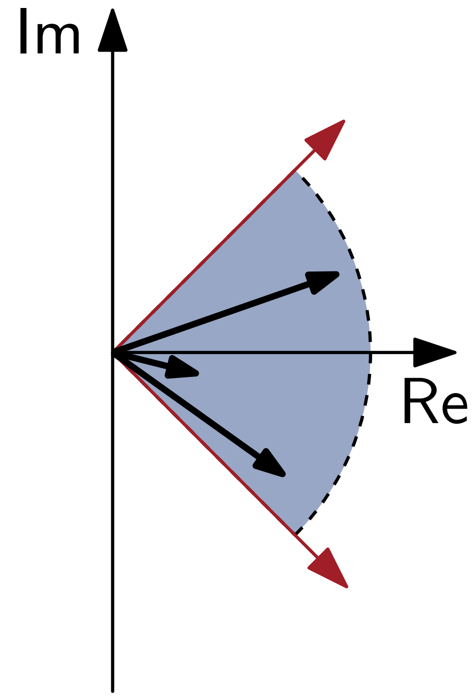
- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

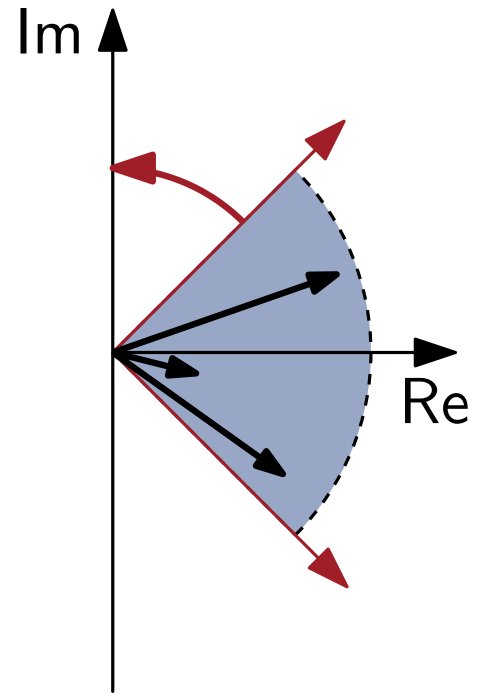
Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem



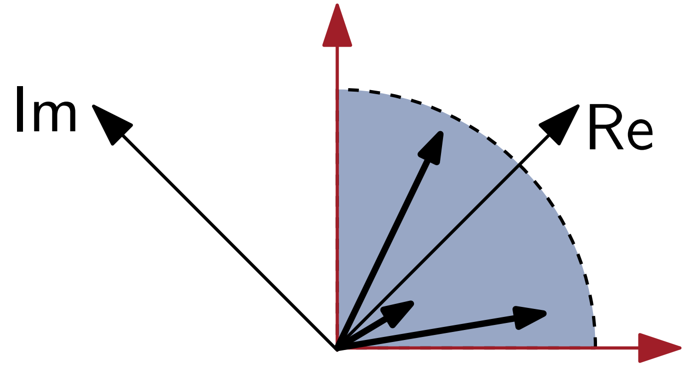
Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem



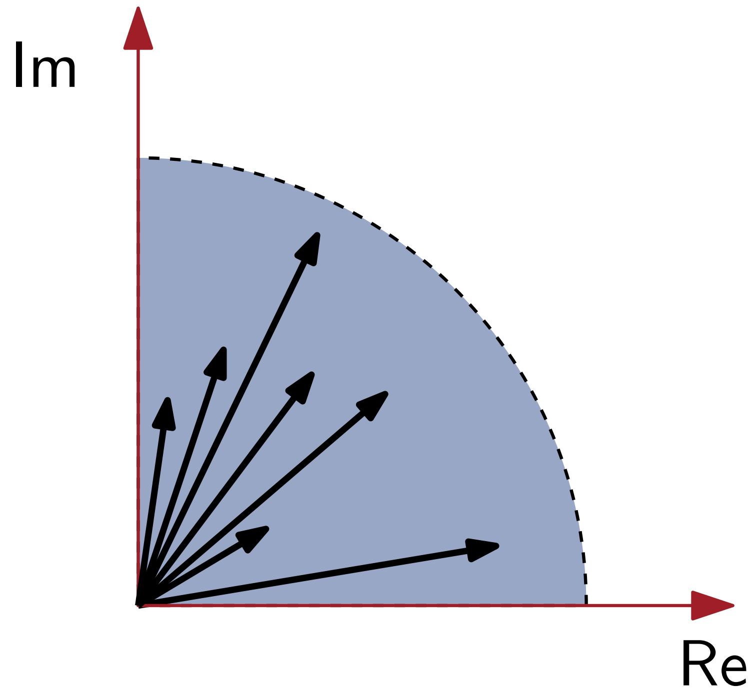
Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem



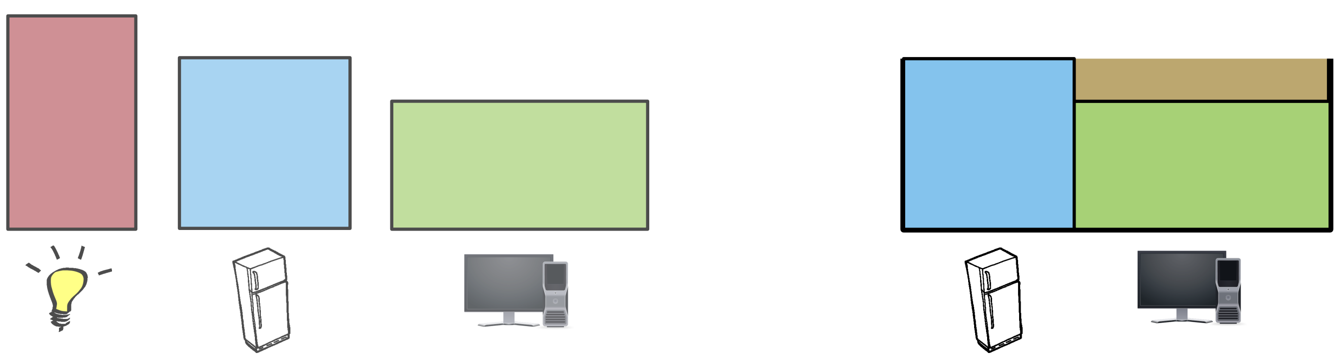
Motivation

- Wechselstromnetze
- Algorithmen zur inelastischen Stromallokation rar
- Spieltheoretische Aspekte
- Grundlagenproblem



Related Work

- Weitestgehend grüne Wiese
- [Sianaki et al., 2010]:
  - 0-1 Rucksackproblem für Gleichstromallokation
- [Kellerer et al., 2004]: Buch „Knapsack Problems“
  - Referenz
  - Quadratisches Rucksackproblem

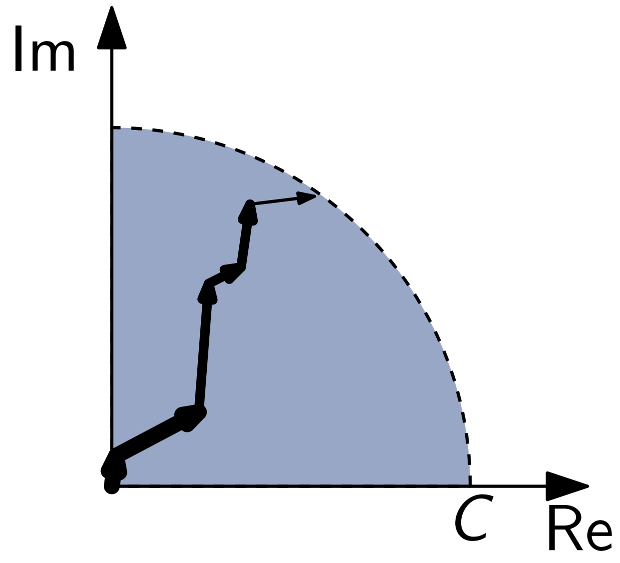


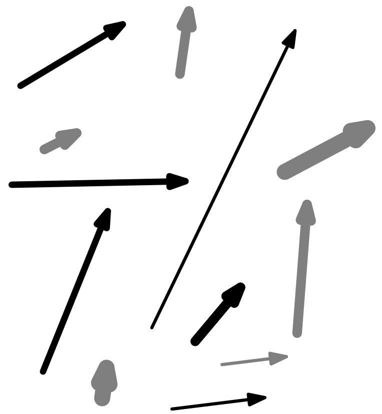
http://de.clipartlogo.com/image/light-bulb-clip-art_379876.html
http://de.clipartlogo.com/image/fridge-outline-clip-art_433435.html
http://www.clipartpal.com/_thumbs/pd/computer/computer/workstation.png

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Heute

- Hauptsächlich [Yu und Chau, 2012]
- Problemdefinition
- Approximationsalgorithmus
- Einbettung in anreizkompatiblen Mechanismus
- Nichtapproximierbarkeit durch ein FPTAS

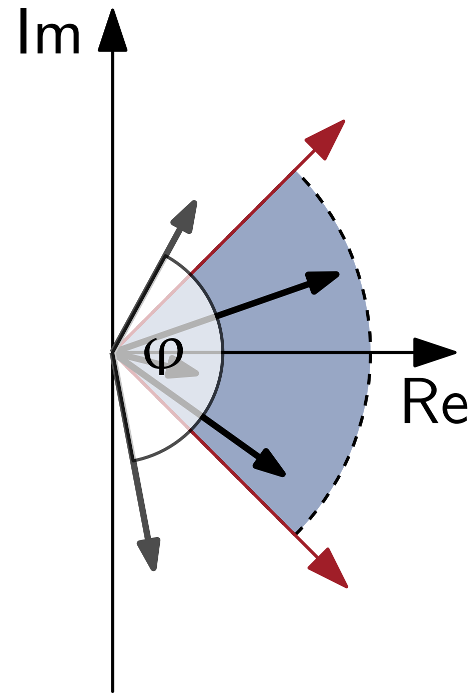




Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

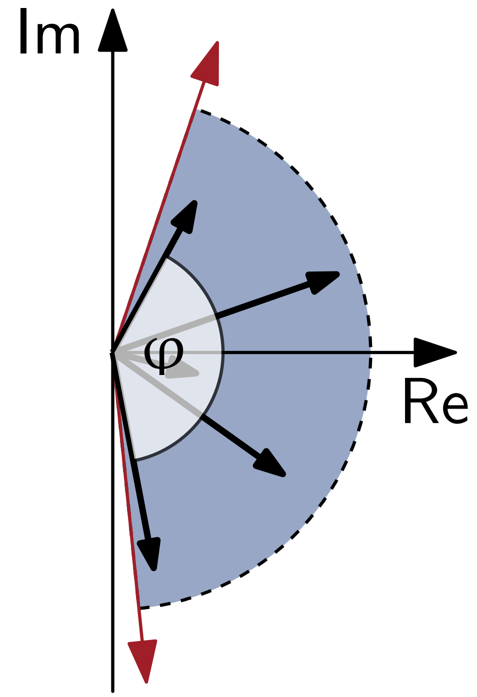
Related Work

- [Chau et al., 2014], behandelt im Vortrag am 7.2.17
  - PTAS
  - Erlaubt größere maximale Phasendifferenzen $< \pi$



Related Work

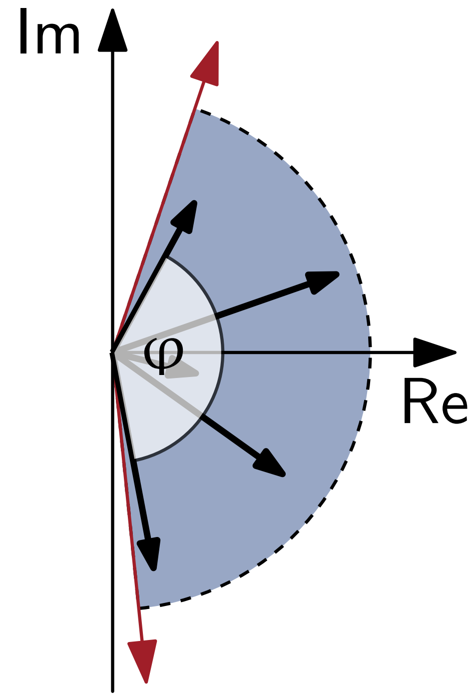
- [Chau et al., 2014], behandelt im Vortrag am 7.2.17
  - PTAS
  - Erlaubt größere maximale Phasendifferenzen $< \pi$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

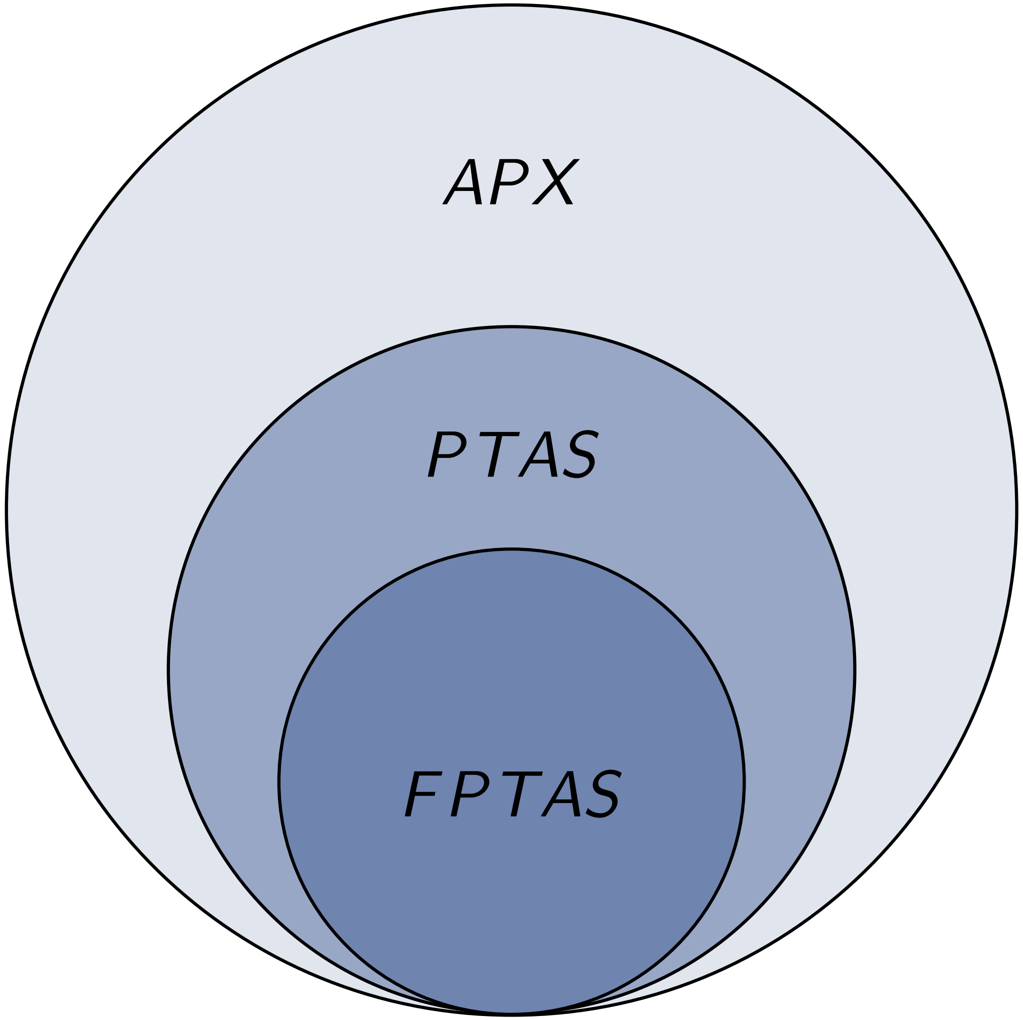
Related Work

- [Khonji et al., 2014], behandelt im Vortrag am 6.12.16
  - [Chau et al., 2014] liefert bestmögliche Approximation

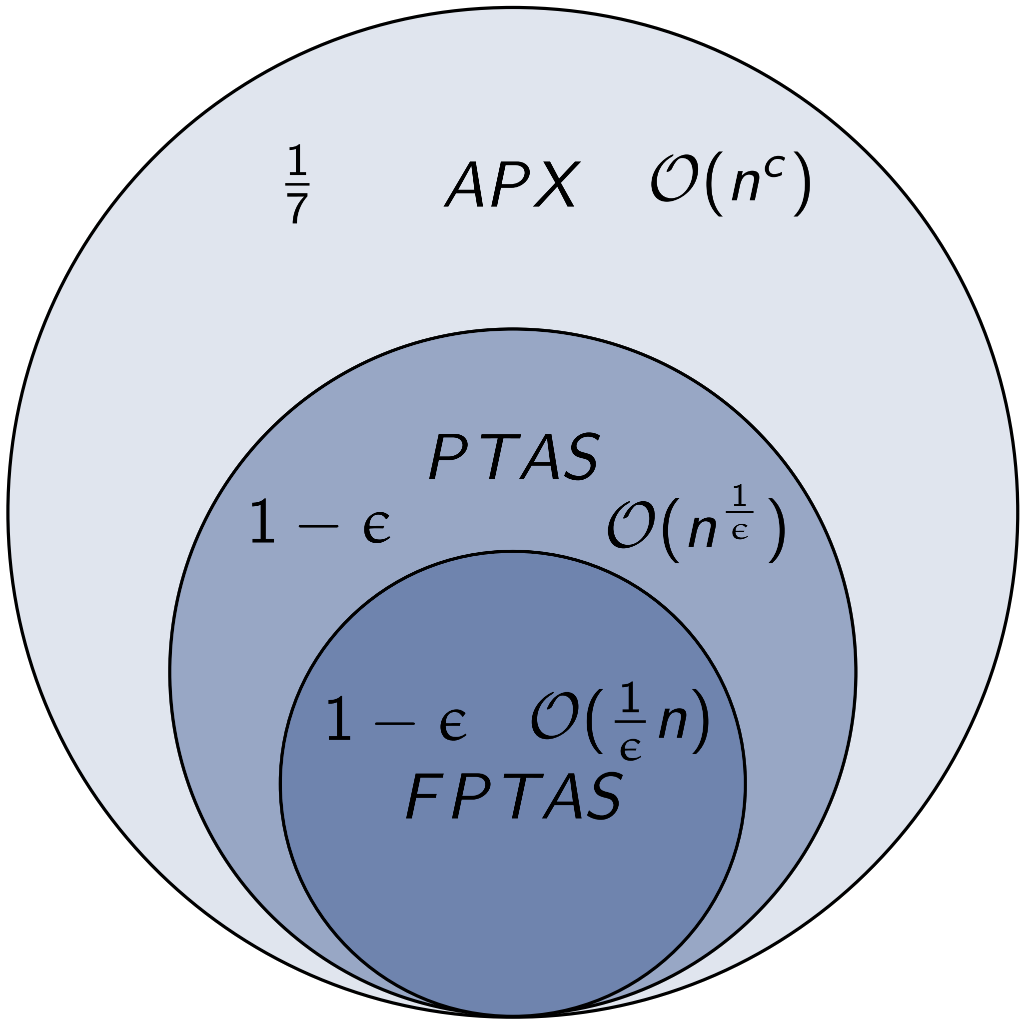


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

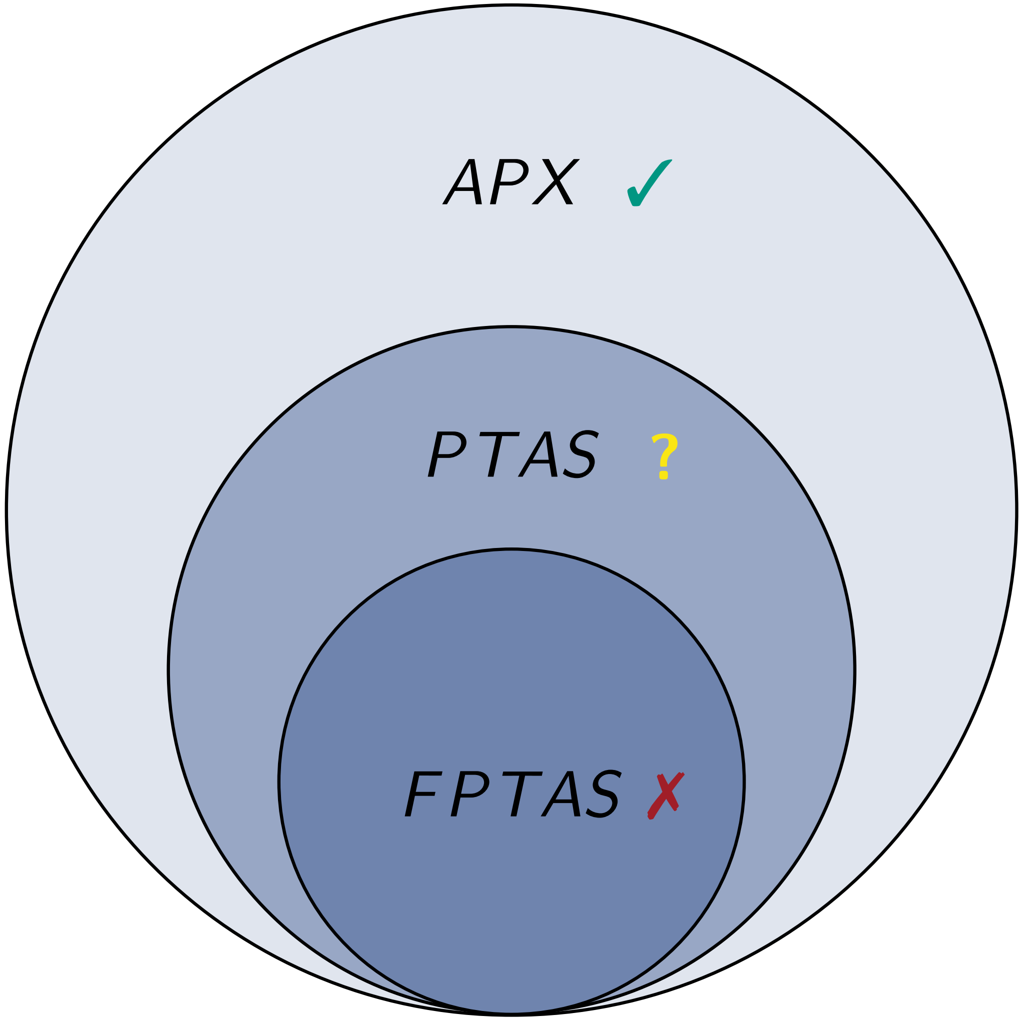
Approximationsresultate



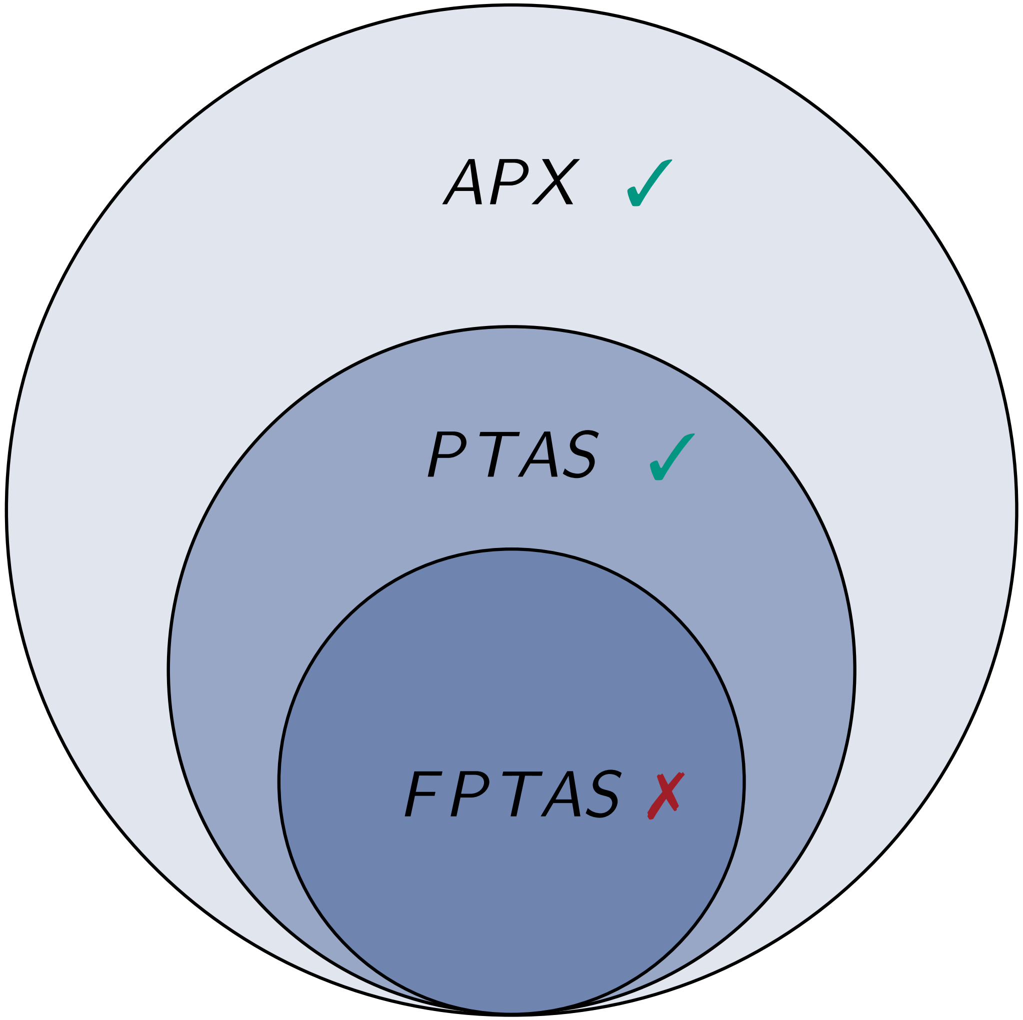
Approximationsresultate



Approximationsresultate

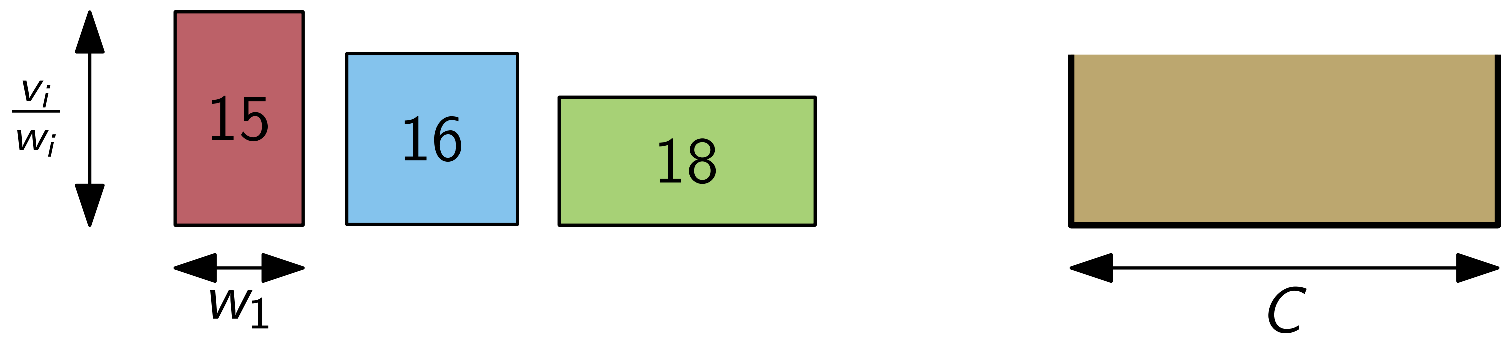


Approximationsresultate



0-1 Rucksackproblem (1-KP)

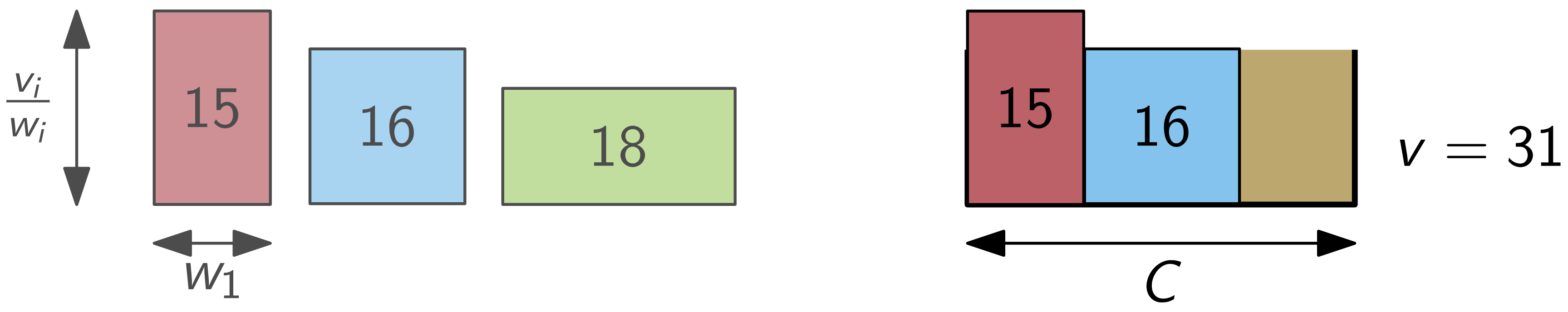
- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i | \sum_{i \in K} w_i \leq C\}$
- Äquivalentes ILP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x | w^T x \leq C\}$
- Eines der ursprünglichen NP-vollständigen Probleme



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

0-1 Rucksackproblem (1-KP)

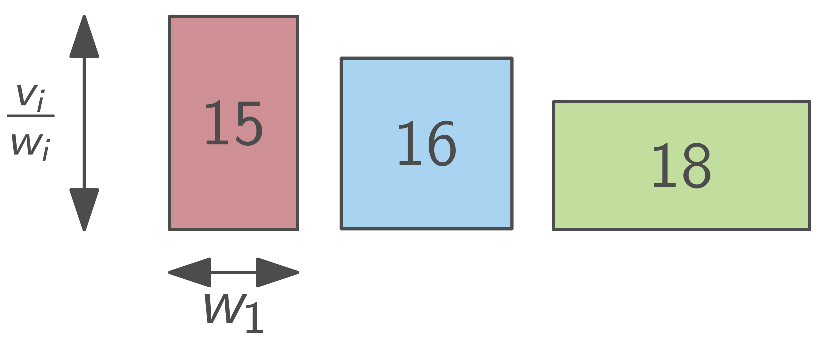
- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i | \sum_{i \in K} w_i \leq C\}$
- Äquivalentes ILP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x | w^T x \leq C\}$
- Eines der ursprünglichen NP-vollständigen Probleme

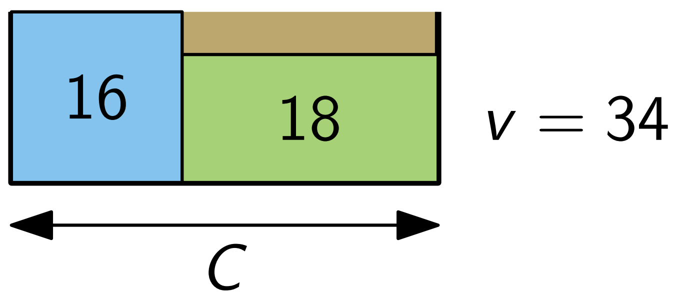


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

0-1 Rucksackproblem (1-KP)

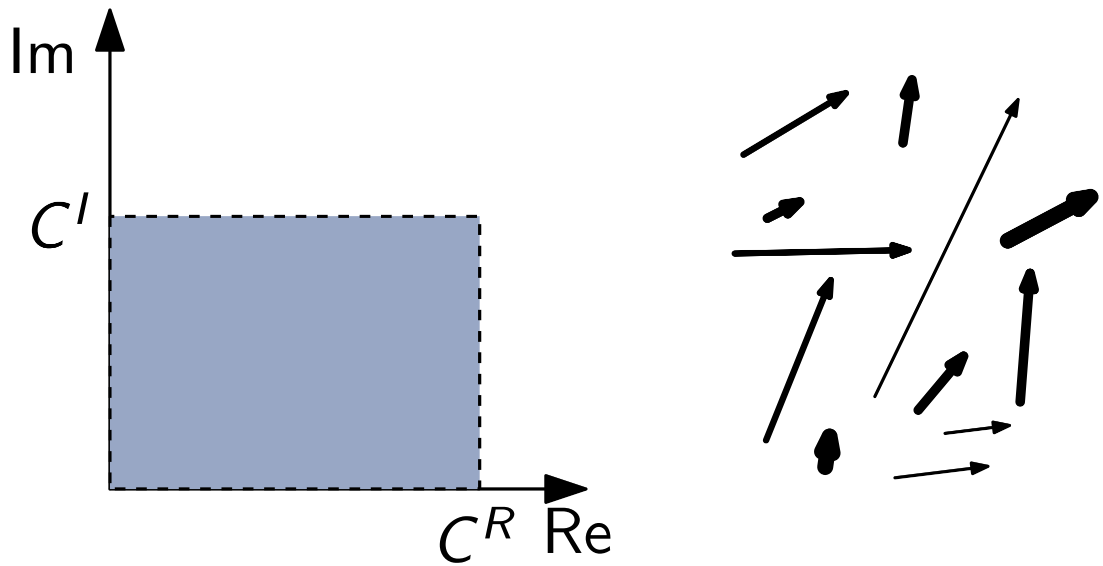
- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i | \sum_{i \in K} w_i \leq C\}$
- Äquivalentes ILP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x | w^T x \leq C\}$
- Eines der ursprünglichen NP-vollständigen Probleme





m-dimensionales Rucksackproblem (m-KP)

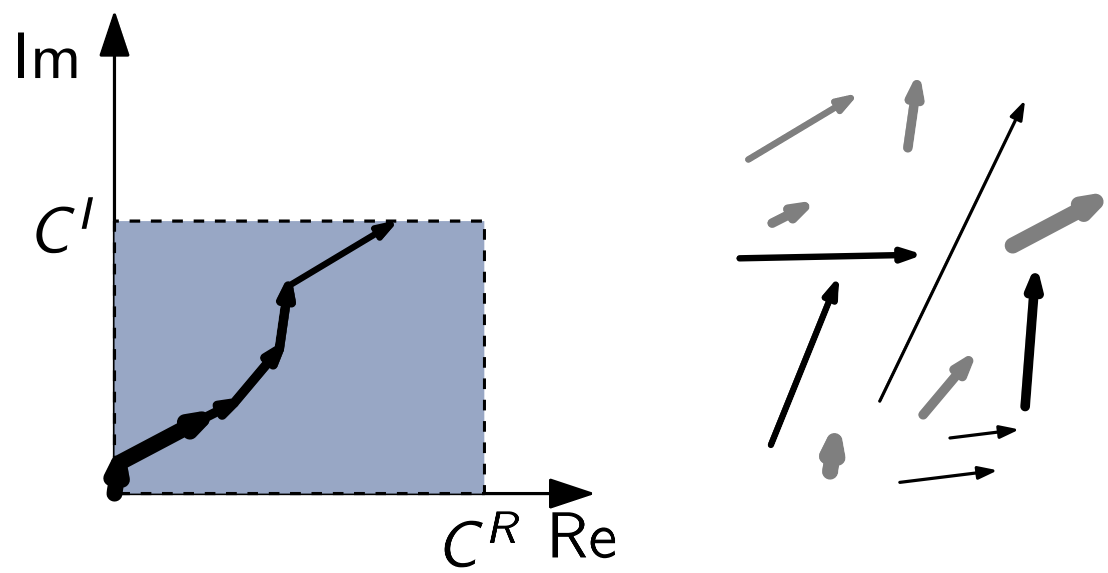
- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{R}^{\boxed{m}}_{\geq 0}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}^{\boxed{m}}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i | \sum_{i \in K} w_i \leq C\}$
- Äquivalentes ILP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x | \boxed{W}^T x \leq C\}$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

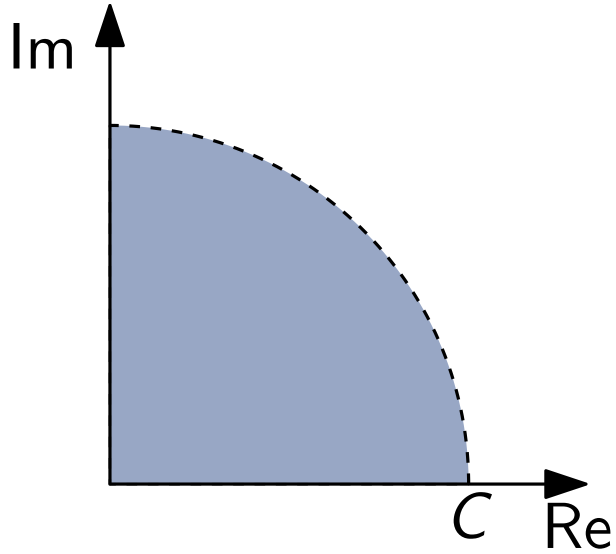
m-dimensionales Rucksackproblem (m-KP)

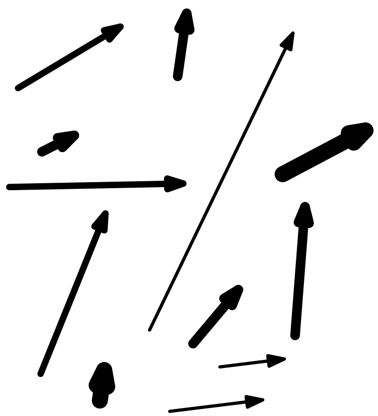
- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{R}^{m}_{\geq 0}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}^{m}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i | \sum_{i \in K} w_i \leq C\}$
- Äquivalentes ILP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x | W^T x \leq C\}$



Komplexgewichtetes Rucksackproblem (C-KP)

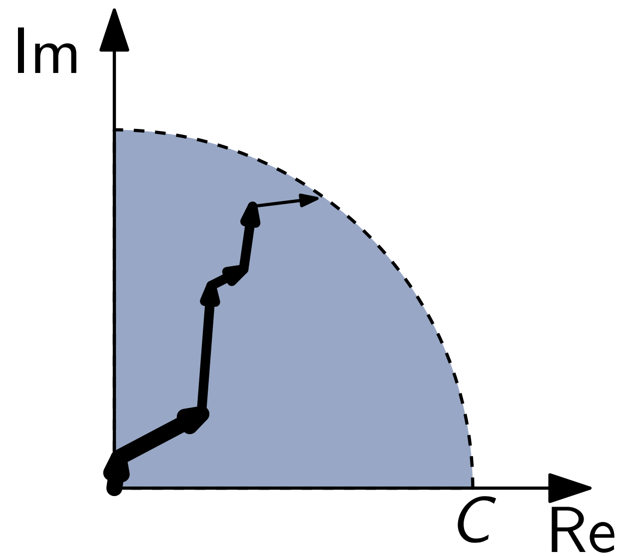
- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \boxed{\mathbb{C}_{\geq 0}}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i \mid \boxed{\left|\sum_{i \in K} w_i\right|} \leq C\}$
- Äquivalentes QCQP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x \mid \boxed{x^T \overline{w} w^T x \leq C^2}\}$

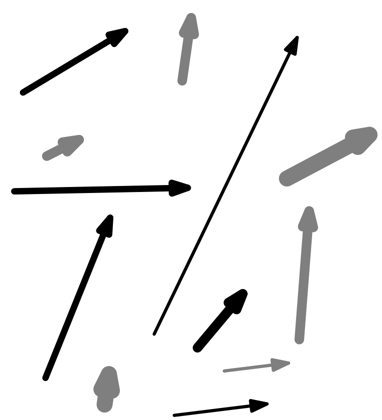




Komplexgewichtetes Rucksackproblem (C-KP)

- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{C}_{\geq 0}$
- Kapazität $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Bestimme $\arg\max_{K \subseteq I} \{\sum_{i \in K} v_i \mid |\sum_{i \in K} w_i| \leq C\}$
- Äquivalentes QCQP: $\arg\max_{x \in \{0,1\}^n} \{v^T x \mid x^T \overline{w} w^T x \leq C^2\}$





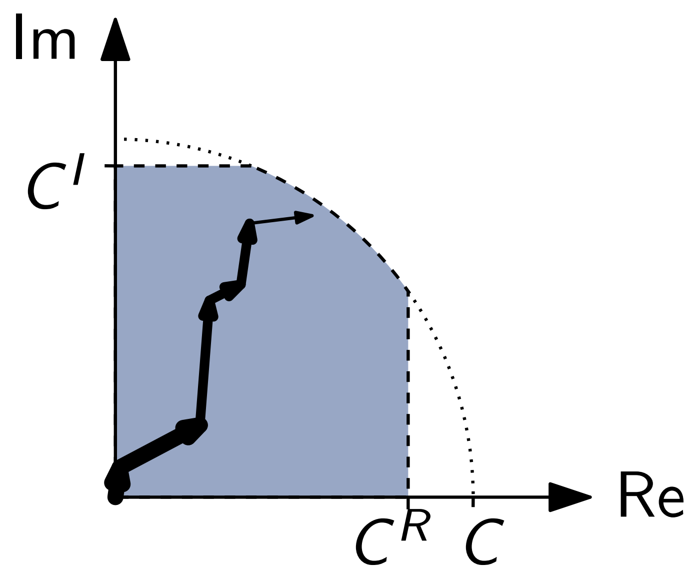
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Verallgemeinertes C-KP (GC-KP)

- Gegenstände $i \in I$ mit Wert $v_i \in \mathbb{R}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{C}_{\geq 0}$
- Kapazitäten C, $\boxed{C^R, C^I} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Bestimme $K \subseteq I$, das

- $\sum_{i \in K} v_i$ maximiert
- dabei $\left|\sum_{i \in K} w_i\right| \leq C$ einhält
- zusätzlich $\boxed{\sum_{i \in K} w_i^R \leq C^R}$ und $\boxed{\sum_{i \in K} w_i^I \leq C^I}$ genügt



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

FPTAS zu 1-KP

Karlsruher Institut für Technologie

- Spezialfall ganzzahliger Werte v_i
- Dynamische Programmierung [Kellerer et al., 2004]
- Exakte Lösung in $\mathcal{O}(n^2 V)$, wobei $n = |I|$, $V = \max_{i \in I} v_i$
- Pseudopolynomiell

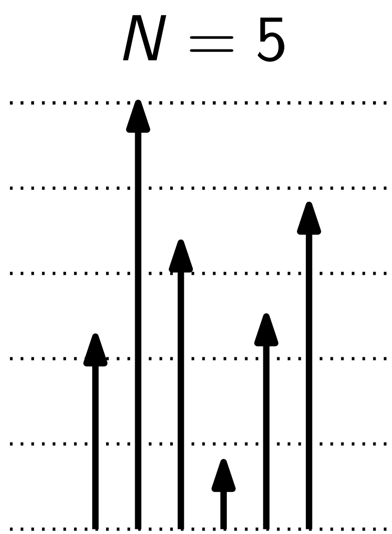
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

FPTAS zu 1-KP

- Idee für $1-\epsilon$-Approximation:
  - diskretisiere Werte in $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}n)$ Stufen
  - berechne Lösung des dynamisches Programm auf abgerundeten Werten
  - Lösungsgüte $1-\epsilon$

Algorithm 1 $Alg^{1d}[(w_i, v_i : i \in I), C]$

$V \leftarrow \max_{i \in I}\{v_i\}$
$N \leftarrow \frac{1}{\epsilon}|I|$
for $i \in I$ **do**
    $\tilde{v}_i \leftarrow \lfloor \frac{v_i}{V} N \rfloor$
end for
$K \leftarrow solve\text{-}DP[(w_i, \tilde{v}_i : i \in I), C]$
return K

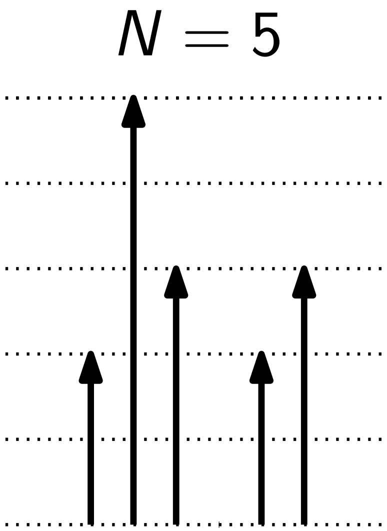


FPTAS zu 1-KP

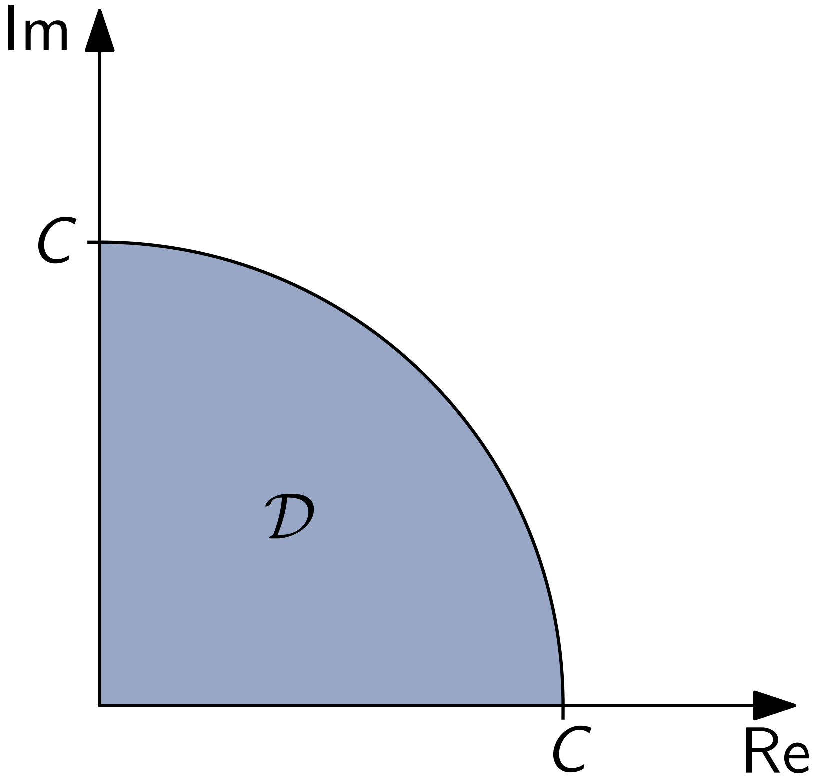
- Idee für $1-\epsilon$-Approximation:
  - diskretisiere Werte in $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}n)$ Stufen
  - berechne Lösung des dynamisches Programm auf abgerundeten Werten
  - Lösungsgüte $1-\epsilon$

Algorithm 1 $Alg^{1d}[(w_i, v_i : i \in I), C]$

$V \leftarrow \max_{i \in I}\{v_i\}$
$N \leftarrow \frac{1}{\epsilon}|I|$
for $i \in I$ **do**
    $\tilde{v}_i \leftarrow \lfloor \frac{v_i}{V} N \rfloor$
end for
$K \leftarrow solve\text{-}DP[(w_i, \tilde{v}_i : i \in I), C]$
return K



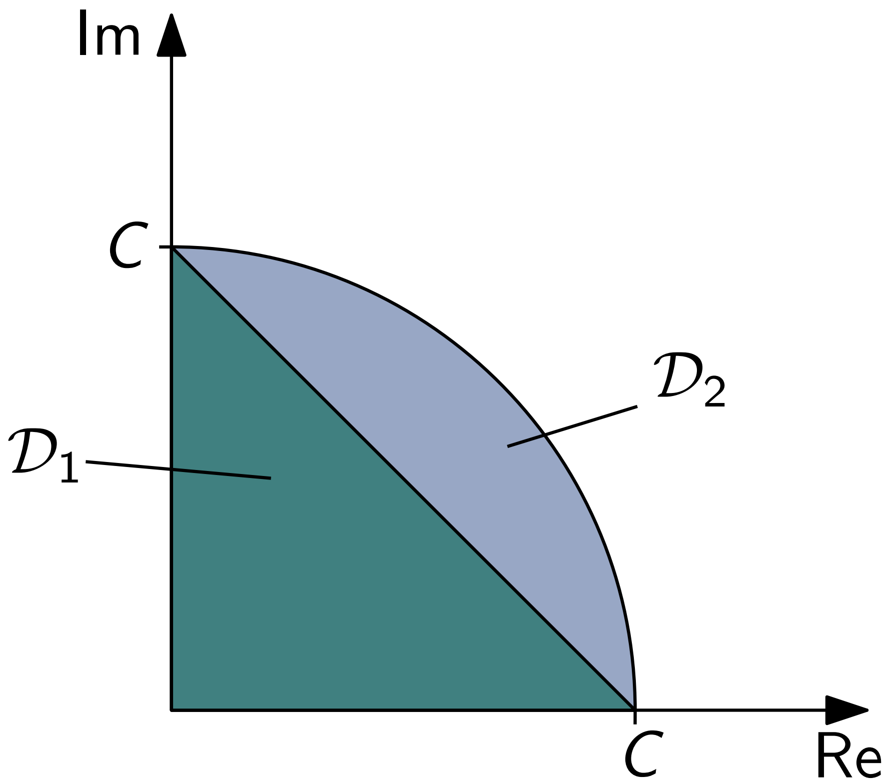
Approximationsalgorithmus zu C-KP



Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Approximationsalgorithmus zu C-KP

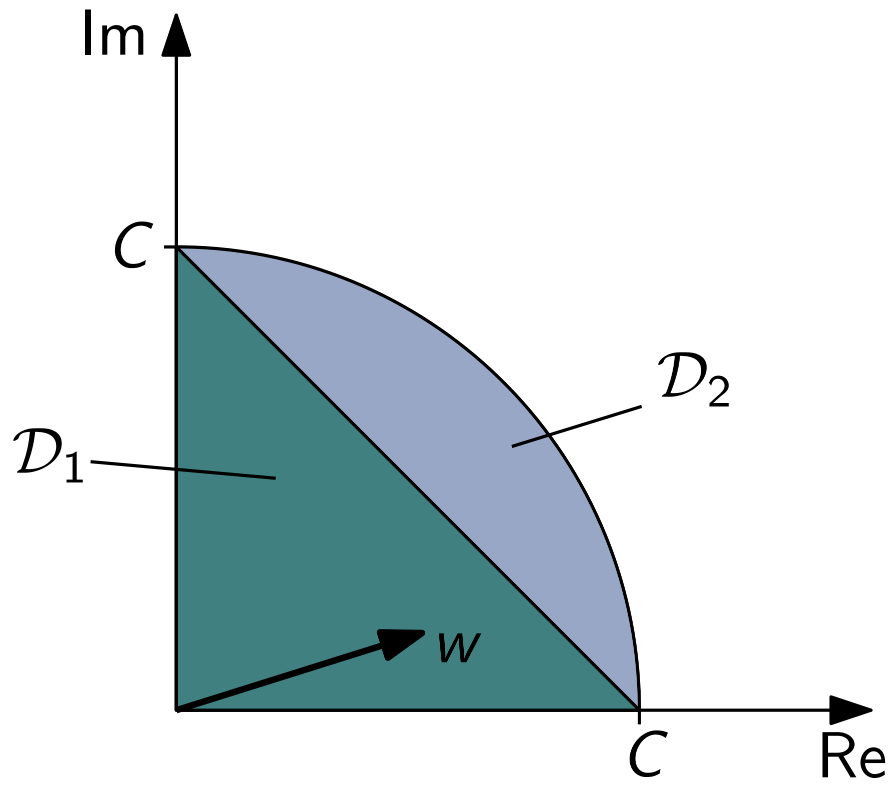


Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

```
for i ∈ I do
    w̃_i ← min{ (w_i^R + w_i^I)/√2 , C/√2 }
end for
K ← Alg^{1d}[(w̃_i, v_i : i ∈ I), C/√2]
return K
```

$$\textbf{for } i \in I \textbf{ do}$$
$$\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\tfrac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \tfrac{C}{\sqrt{2}}\}$$
$$\textbf{end for}$$
$$K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \tfrac{C}{\sqrt{2}}]$$
$$\textbf{return } K$$

Approximationsalgorithmus zu C-KP

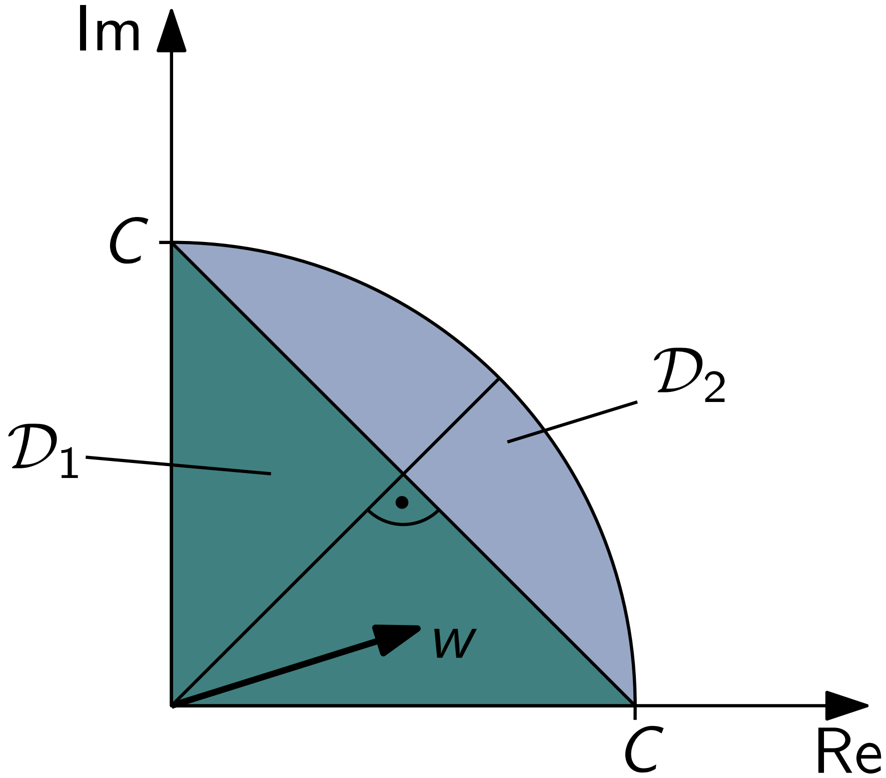


Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\boxed{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Approximationsalgorithmus zu C-KP

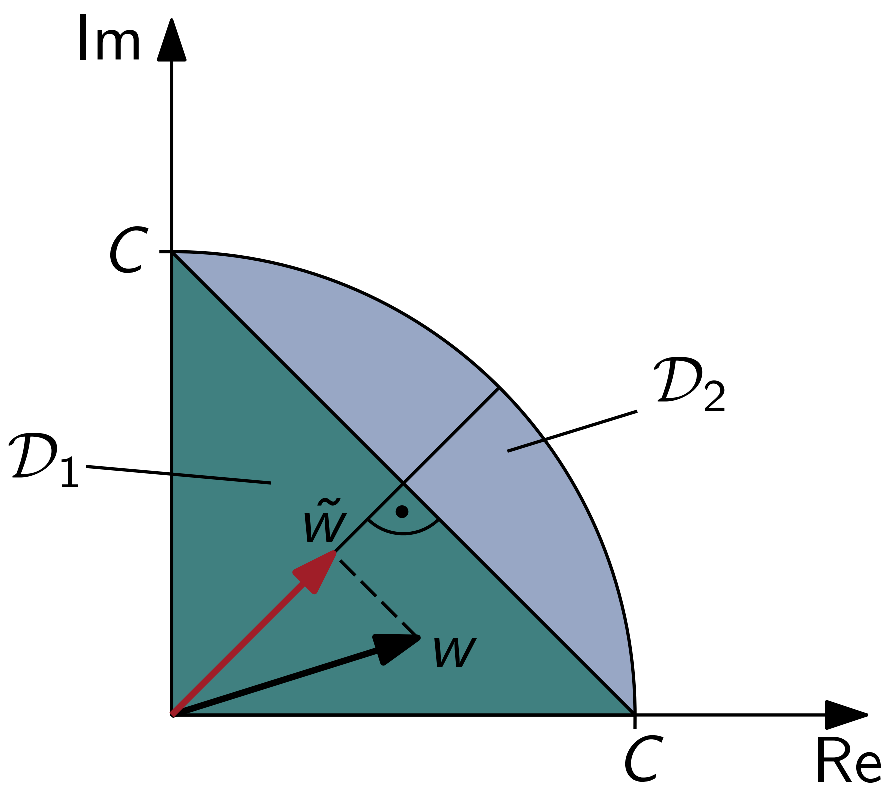
Karlsruher Institut für Technologie



Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\boxed{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Approximationsalgorithmus zu C-KP

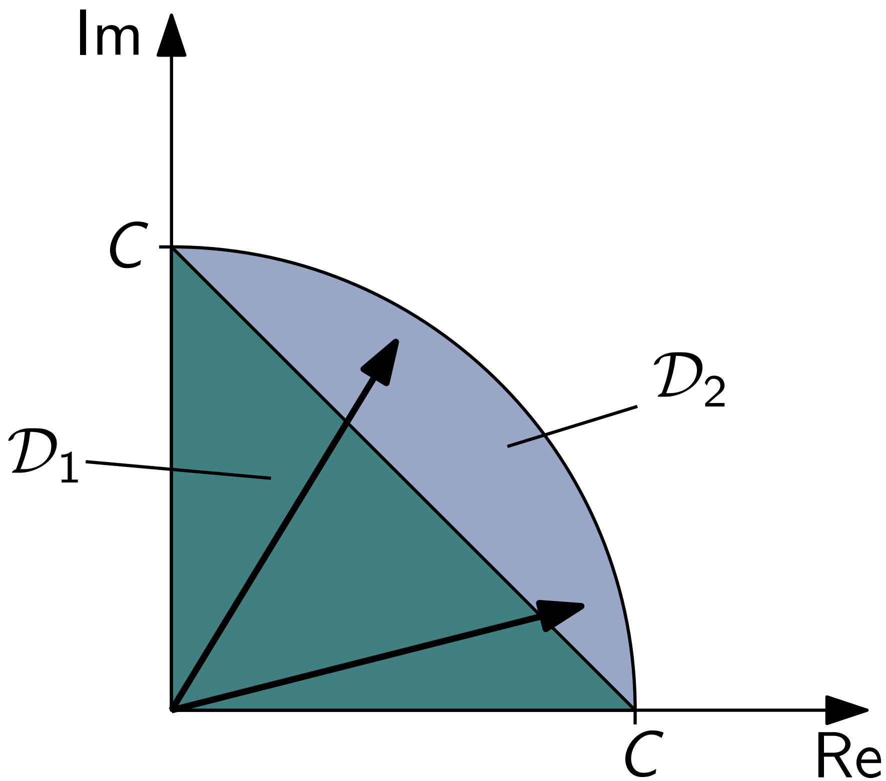


Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\boxed{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsalgorithmus zu C-KP



Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

for $i \in I$ **do**

$\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \boxed{\frac{C}{\sqrt{2}}}\}$

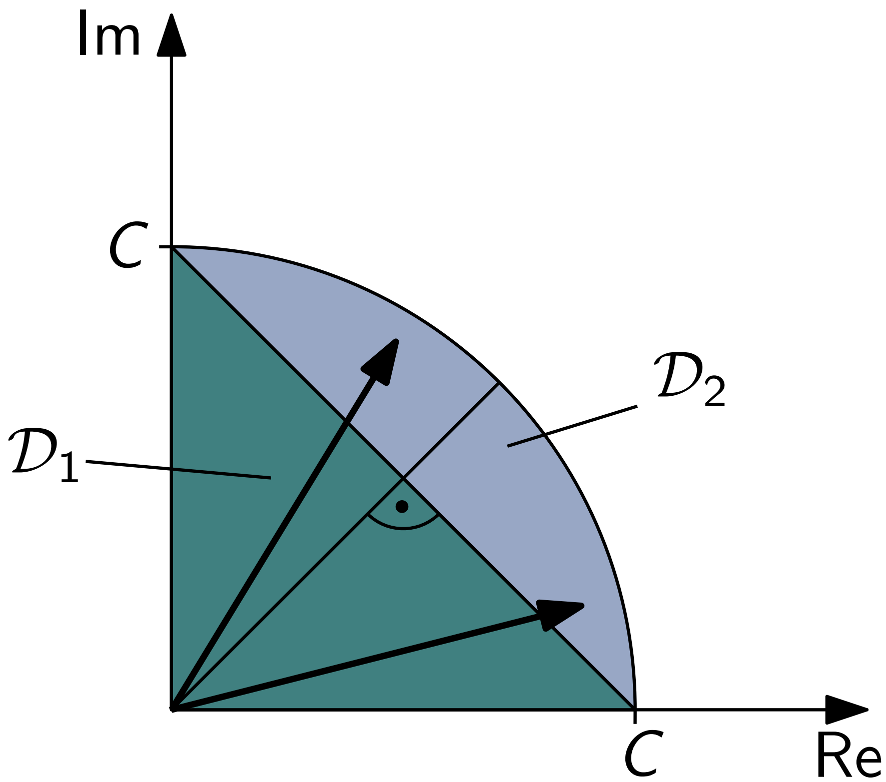
end for

$K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$

return K

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

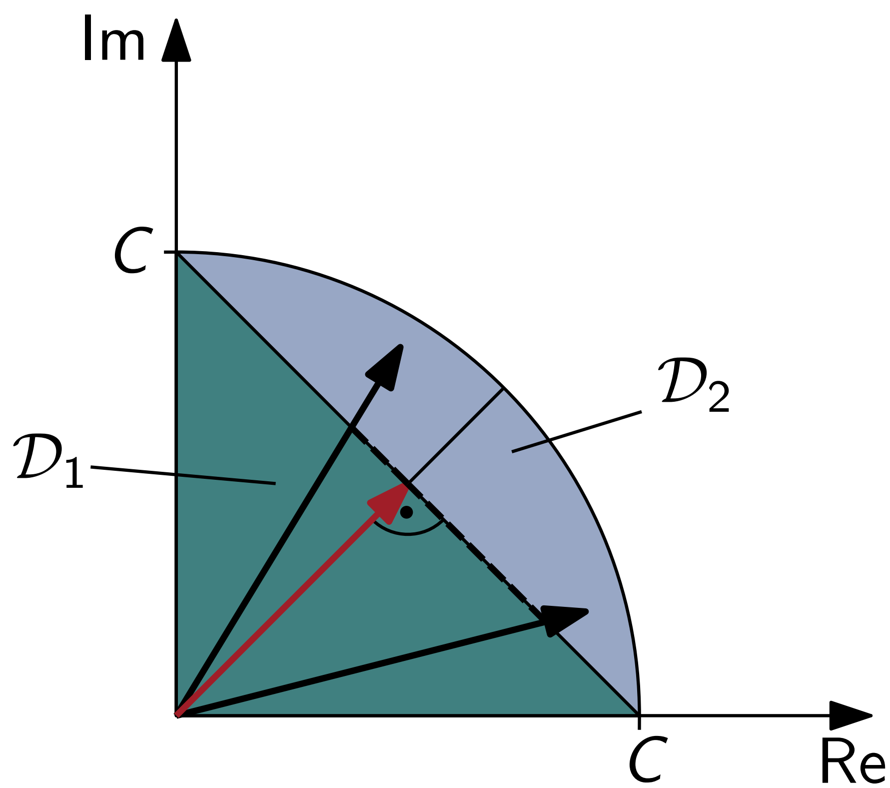
Approximationsalgorithmus zu C-KP



Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

for $i \in I$ **do**
  $\tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \boxed{\frac{C}{\sqrt{2}}}\}$
end for
$K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Approximationsalgorithmus zu C-KP



Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**

2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \boxed{\frac{C}{\sqrt{2}}}\}$

3: **end for**

4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$

return K

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Abschätzung für unabhängige Teilprobleme
- Führe Fallunterscheidung über Beschaffenheit der Optimallösung K^*

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

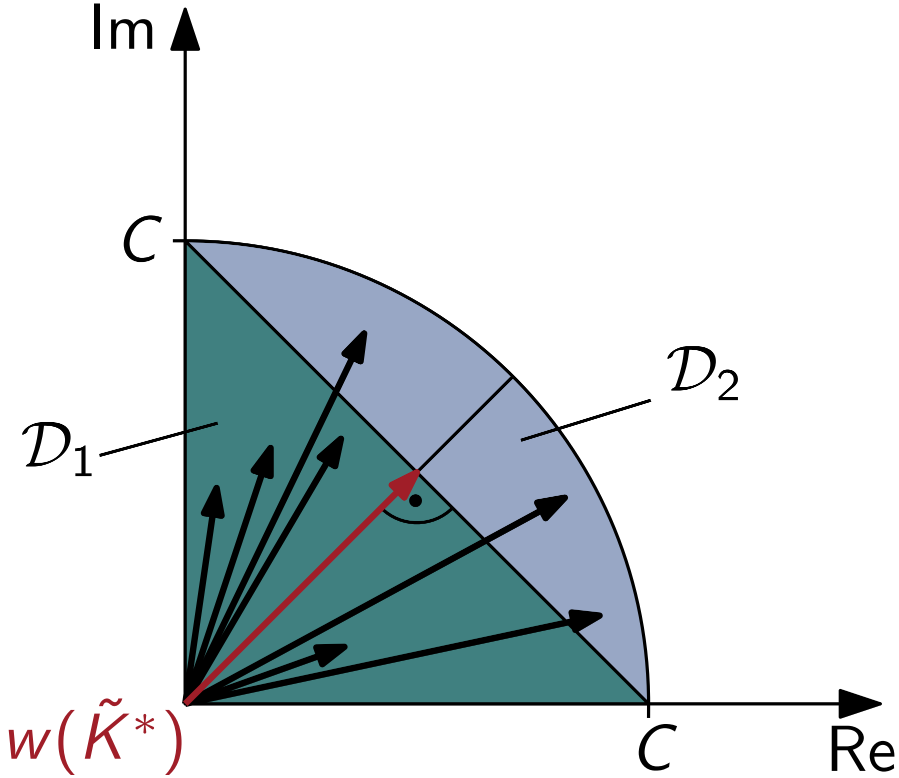
1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

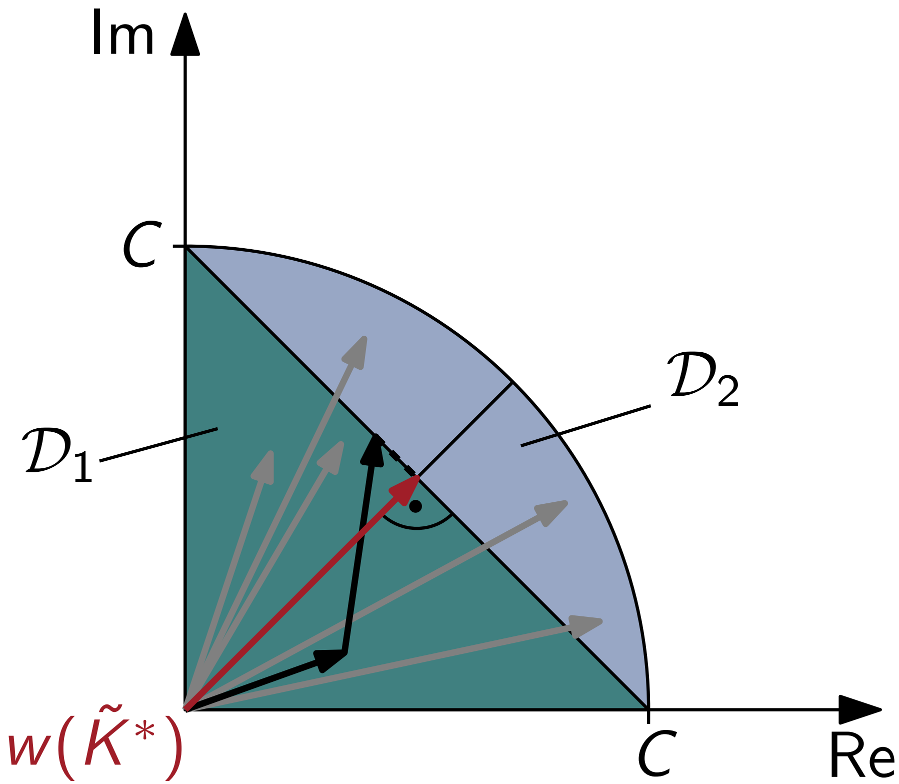
Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):



Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP*, so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

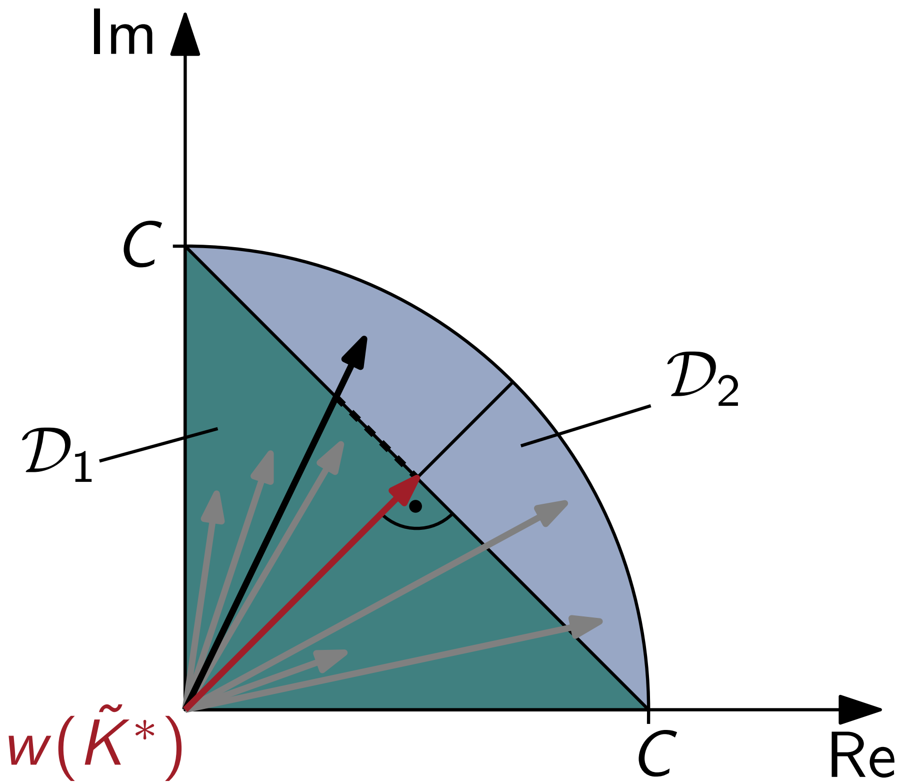


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP*, so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

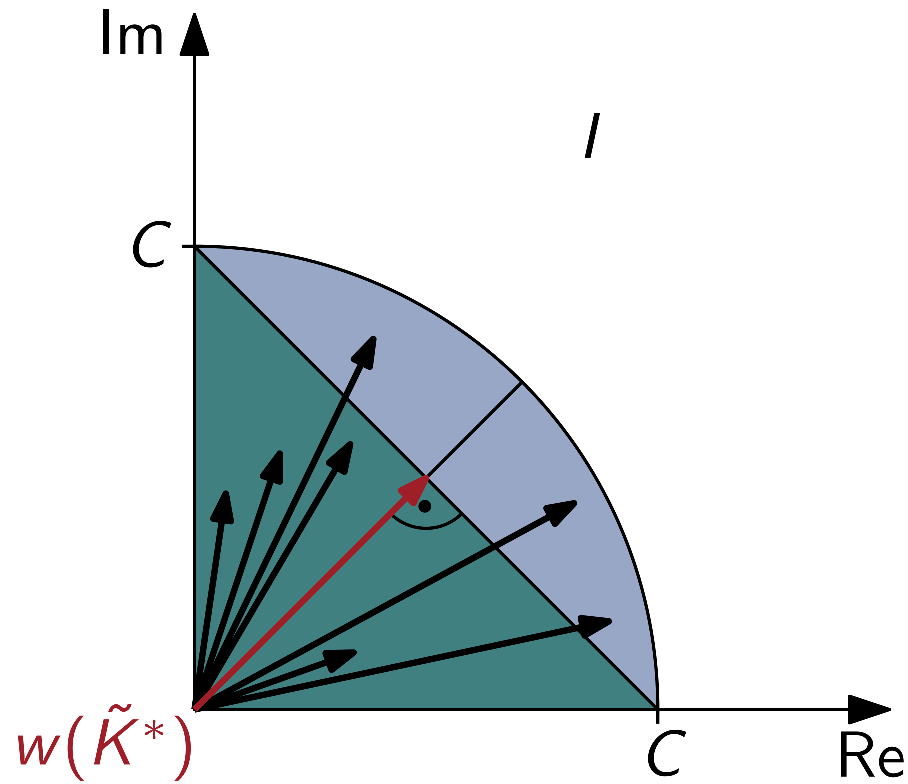


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

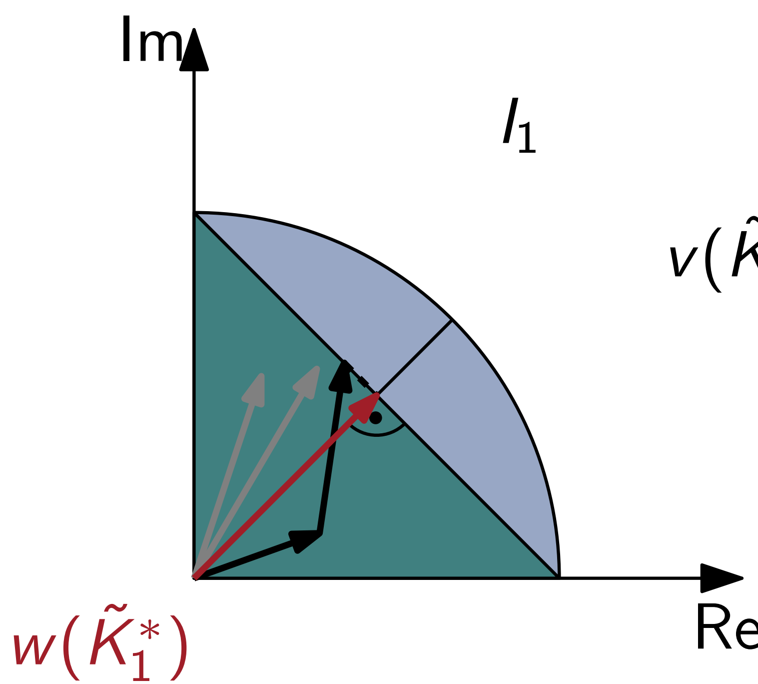


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

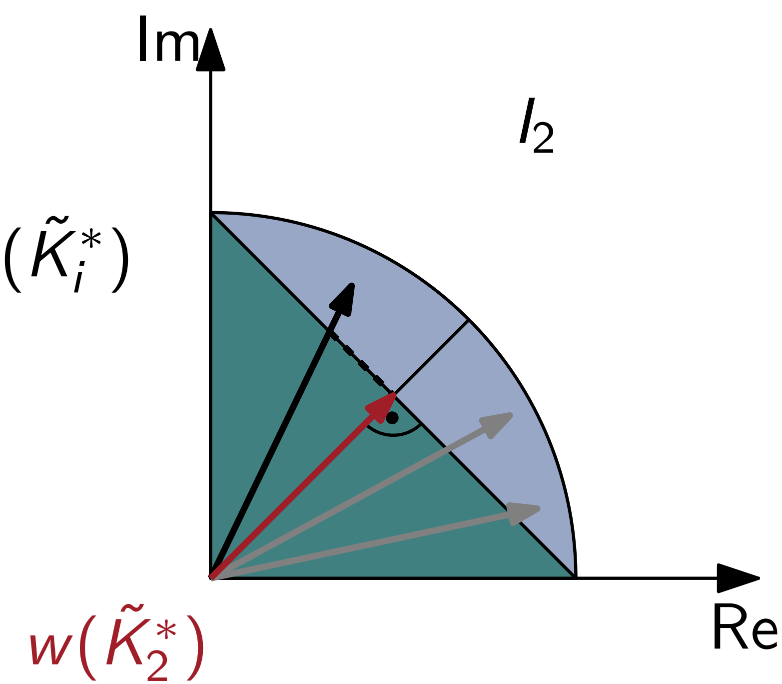
Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP*, so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):



$$I = I_1 \uplus I_2$$

$$v(\tilde{K}^*) = \max_{i \in \{1,2\}} v(\tilde{K}_i^*)$$



Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

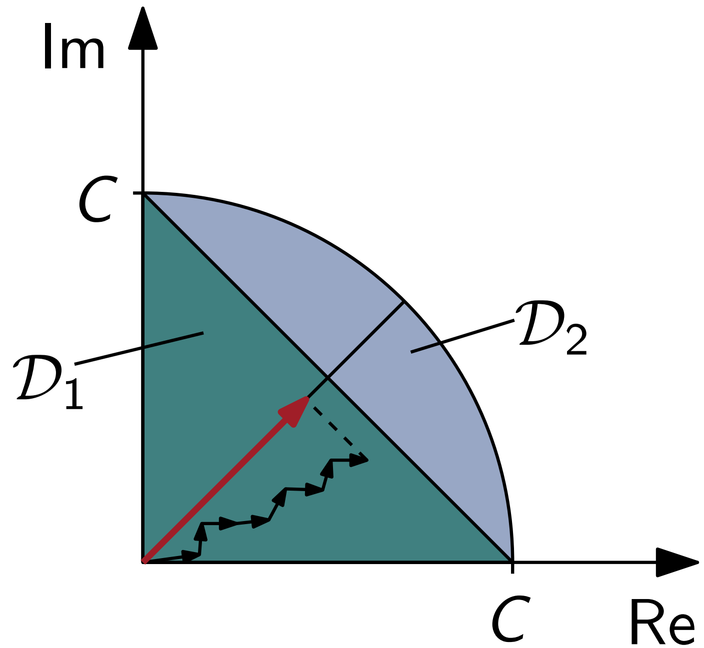
- Zwischenstand
- Aussage über Lösungen des projizierten 1-KP Problems
- $v(\tilde{K}^*) = \max\{v(\tilde{K}_1^*), v(\tilde{K}_2^*)\}$
- $v(K) = v(\tilde{K}) \geq \rho v(\tilde{K}^*) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$
- Weiter mit Fallunterscheidung über Optimallösung K^*

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Fall $w(K^*) \in \mathcal{D}_1$:
  - $v(K) \geq \rho v(\tilde{K}_1^*) \geq \rho v(K^*)$

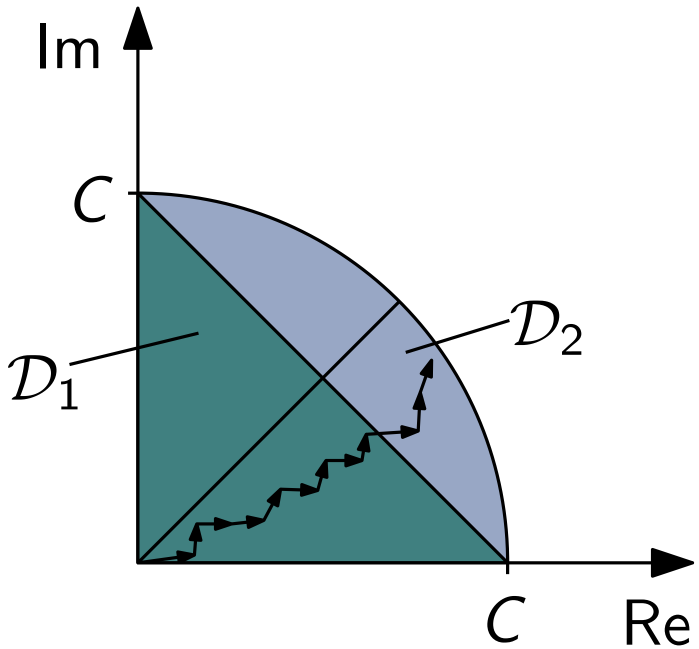


Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Fall $\forall j \in K^* : w_j \in \mathcal{D}_1$:
  - $K^* = K_1^* \uplus K_2^*$ mit $w(K_1^*), w(K_2^*) \in \mathcal{D}_1$

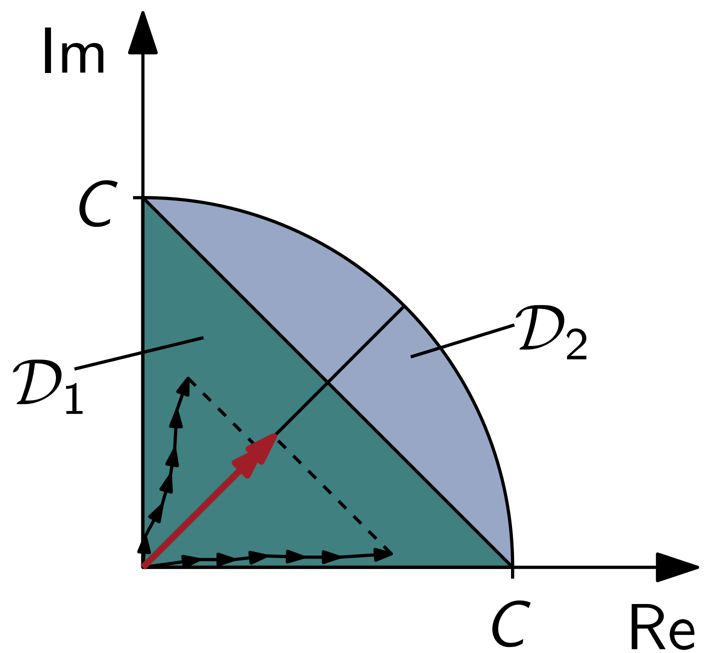


Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

- Fall $\forall j \in K^* : w_j \in \mathcal{D}_1$:
  - $K^* = K_1^* \uplus K_2^*$ mit $w(K_1^*), w(K_2^*) \in \mathcal{D}_1$



$$
\begin{aligned}
& v(K) \\
\geq & \frac{\rho}{2} 2v(\tilde{K}_1^*) \\
\geq & \frac{\rho}{2}(v(K_1^*) + v(K_2^*)) \\
\geq & \frac{\rho}{2} v(K^*)
\end{aligned}
$$

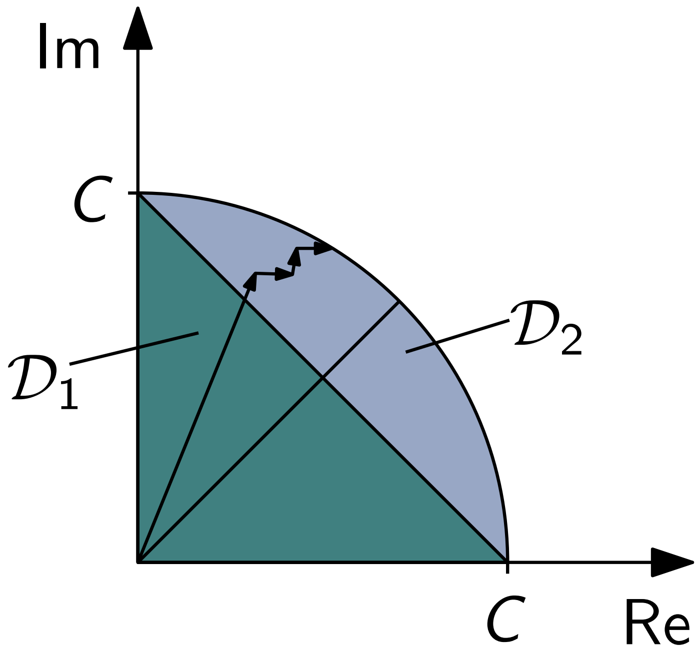
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Fall $\exists! j \in K^* : w_j \in \mathcal{D}_2$:
  - $K^* \setminus \{j\} \subseteq I_1,\, j \in I_2$



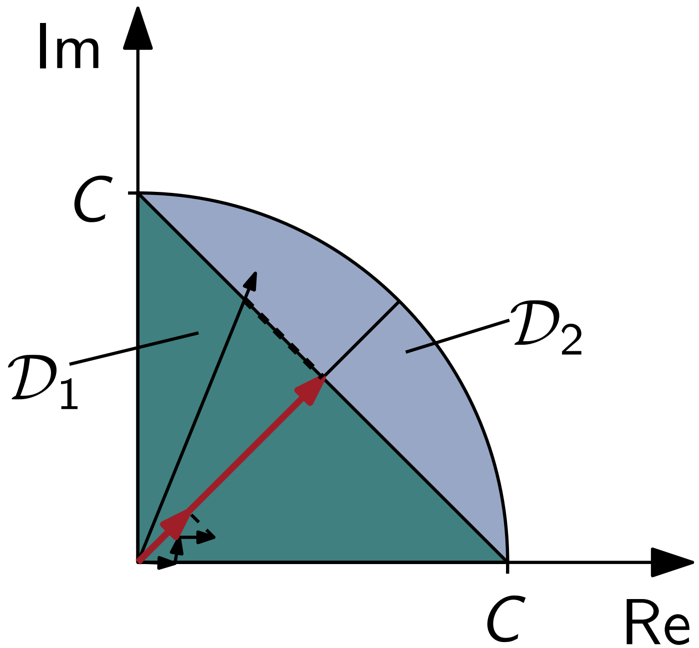
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

- Fall $\exists! j \in K^* : w_j \in \mathcal{D}_2$:
  - $K^* \setminus \{j\} \subseteq I_1,\ j \in I_2$



$$
\begin{aligned}
& v(K) \\
\geq & \frac{\rho}{2}(v(\tilde{K}_1^*) + v(\tilde{K}_2^*)) \\
\geq & \frac{\rho}{2}(v(K^* \setminus \{j\}) + v_j)) \\
\geq & \frac{\rho}{2} v(K^*)
\end{aligned}
$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Modellierung des Allokationsproblems

- Spieltheoretischer Mechanismus um $\mathrm{C\text{-}KP}$
- Zentraler Allokationsalgorithmus sammelt Energiebedarf und Angebot der Verbraucher ein
  - Öffentlich bekannter Algorithmus
  - Tatsächlicher Energiebedarf ist geheim
  - Abnehmer können falschen Bedarf angeben!
- *Anreizkompatibilität* des Mechanismus' sicherstellen
  - Jeder Spieler hat den größten Nutzen, wenn er wahrheitsgemäß antwortet

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

- Menge A zielgerichteter (*single-minded*) Agenten
  - Jeder Agent $a \in A$ hat einen *Typ* $t_a = (d_a, v_a)$
  - Bedarf d_a und Wertschätzung v_a sind geheim
- Agent kann zu niedrigeren Bedarf angeben, um selektiert zu werden
  - Bewertungsfunktion $t_a(o) = \begin{cases} v_a, & \text{falls } d_a \leq o_a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ zu Zuweisung o
- Mechanismus $M = (\mathcal{A}, p)$
  - Allokationsalgorithmus $\mathcal{A}$ bestimmt Zuweisung $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{C}_{\geq 0}^{|A|}$
  - $p_a(t)$ von Agent a fällige Zahlung
- *Nutzenfunktion* $u_a(t) = t_a(\mathcal{A}(t)) - p_a(t)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Karlsruher Institut für Technologie

Definition. *Ein Mechanismus M ist* anreizkompatibel, *wenn wahrheitsgemäße Enthüllung des Typs t_a von Agent a zur Maximierung seiner Nutzenfunktion $u_a(t)$ führt.*
Äquivalent: $\forall t'_a : u_a(t_a, t_{-a}) \geq u_a(t'_a, t_{-a})$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Definition. *Ein Mechanismus M ist* anreizkompatibel, *wenn wahrheitsgemäße Enthüllung des Typs t_a von Agent a zur Maximierung seiner Nutzenfunktion $u_a(t)$ führt.*
Äquivalent: $\forall t'_a : u_a(t_a, t_{-a}) \geq u_a(t'_a, t_{-a})$

$$\Uparrow$$

Satz ([Briest et al., 2011]). *Sei $\mathcal{A}$ ein* exakter *und* monotoner *Allokationsalgorithmus für zielgerichtete Agenten. Dann gibt es eine Zahlung $p^{\mathcal{A}}$, so dass $(\mathcal{A}, p^{\mathcal{A}})$ ein* anreizkompatibler *Mechanismus ist.*

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Satz. *Sei $\mathcal{A}$ ein* exakter *und* monotoner *Allokationsalgorithmus für zielgerichtete Agenten. Dann gibt es eine Zahlung $p^{\mathcal{A}}$, so dass $(\mathcal{A}, p^{\mathcal{A}})$ ein* anreizkompatibler *Mechanismus ist.*

Definition. $M = (\mathcal{A}, p)$ *heißt* exakt, *wenn für alle Agenten $a \in A$ und Eingaben $t = (d_a, v_a : a \in A)$ gilt: $\mathcal{A}(t)_a$ ist entweder d_a oder 0.*

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Satz. *Sei $\mathcal{A}$ ein* exakter *und* monotoner *Allokationsalgorithmus für zielgerichtete Agenten. Dann gibt es eine Zahlung $p^{\mathcal{A}}$, so dass $(\mathcal{A}, p^{\mathcal{A}})$ ein* anreizkompatibler *Mechanismus ist.*

Definition. *$M = (\mathcal{A}, p)$ heißt* exakt, *wenn für alle Agenten $a \in A$ und Eingaben $t = (d_a, v_a : a \in A)$ gilt: $\mathcal{A}(t)_a$ ist entweder d_a oder 0.*

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

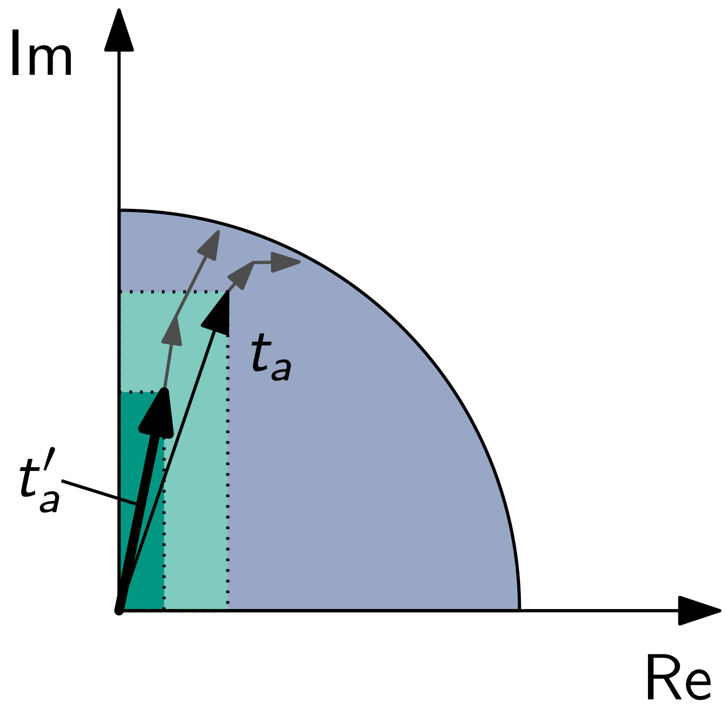
Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Karlsruher Institut für Technologie

Satz. *Sei $\mathcal{A}$ ein* exakter *und* monotoner *Allokationsalgorithmus für zielgerichtete Agenten. Dann gibt es eine Zahlung $p^{\mathcal{A}}$, so dass $(\mathcal{A}, p^{\mathcal{A}})$ ein* anreizkompatibler *Mechanismus ist.*

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Definition. *Ein Allokationsalgorithmus* $\mathcal{A}$ *ist* monoton, *wenn aus* $d_a \leq \mathcal{A}(t_a, t_{-a})_a$ *folgt, dass* $d'_a \leq \mathcal{A}(t'_a, t_{-a})_a$ *für alle* $t_a = (d_a, v_k)$ *und* $t'_a = (d'_a, v'_a)$ *mit* $v_a \leq v'_a \wedge d_a \geq d'_a$*.*



Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Karlsruher Institut für Technologie

Definition. *Ein Allokationsalgorithmus $\mathcal{A}$ ist* monoton, *wenn aus $d_a \leq \mathcal{A}(t_a, t_{-a})_a$ folgt, dass $d'_a \leq \mathcal{A}(t'_a, t_{-a})_a$ für alle $t_a = (d_a, v_k)$ und $t'_a = (d'_a, v'_a)$ mit $v_a \leq v'_a \wedge d_a \geq d'_a$.*

Lemma. *Alg^b ist ein monotoner Algorithmus für $\mathrm{C\text{-}KP}$, sofern Alg^{1d} ein monotoner Algorithmus für $\mathrm{1\text{-}KP}$ ist.*

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

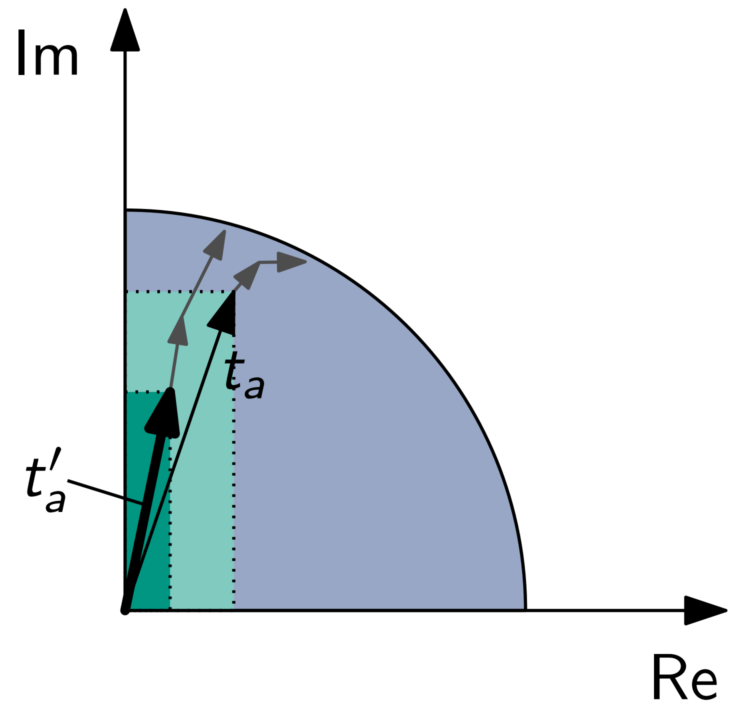
Lemma. *Alg^b ist ein monotoner Algorithmus für* $\mathrm{C\text{-}KP}$, *sofern Alg^{1d} ein monotoner Algorithmus für* $\mathrm{1\text{-}KP}$ *ist.*

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Sei $t_a = (d_a, v_a)$ und $t'_a = (d'_a, v'_a)$ mit $v_a \leq v'_a \wedge d_a \geq d'_a$
- Außerdem gilt $a \in Alg^b(t_a, t_{-a})$
- Zeige: $a \in Alg^b(t'_a, t_{-a})$

Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

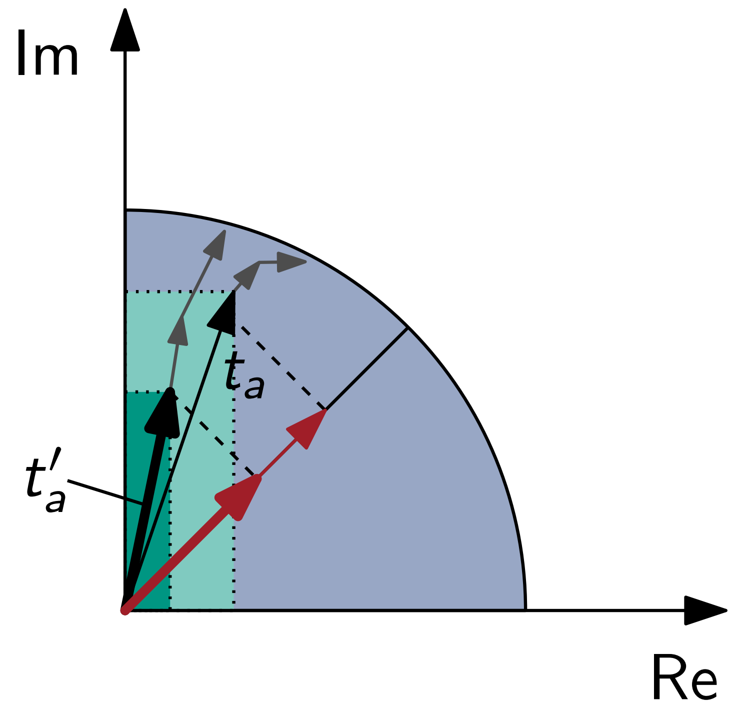
Lemma. *Alg^b ist ein monotoner Algorithmus für* $\mathrm{C\text{-}KP}$, *sofern Alg^{1d} ein monotoner Algorithmus für* $1\text{-}\mathrm{KP}$ *ist.*

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Sei $t_a = (d_a, v_a)$ und $t'_a = (d'_a, v'_a)$ mit $v_a \leq v'_a \wedge d_a \geq d'_a$
- Außerdem gilt $a \in Alg^b(t_a, t_{-a})$
- Zeige: $a \in Alg^b(t'_a, t_{-a})$

Algorithm 2 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K



Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Satz. *Sei $\mathcal{A}$ ein* exakter ✓ *und* monotoner *Allokationsalgorithmus für zielgerichtete Agenten. Dann gibt es eine Zahlung $p^{\mathcal{A}}$, so dass $(\mathcal{A}, p^{\mathcal{A}})$ ein* anreizkompatibler *Mechanismus ist.*

Lemma. *Alg^b ist ein monotoner Algorithmus für $\mathrm{C\text{-}KP}$, sofern Alg^{1d} ein monotoner Algorithmus für $\mathrm{1\text{-}KP}$ ist.*

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ein Anreizkompatibler Mechanismus

Satz. *Sei* $\mathcal{A}$ *ein* exakter *und* monotoner *Allokationsalgorithmus für zielgerichtete Agenten. Dann gibt es eine Zahlung* $p^{\mathcal{A}}$*, so dass* $(\mathcal{A}, p^{\mathcal{A}})$ *ein* anreizkompatibler *Mechanismus ist.*

Lemma. *Alg*^{b} *ist ein monotoner Algorithmus für* $\mathrm{C\text{-}KP}$*, sofern Alg*^{1d} *ein monotoner Algorithmus für* $1\text{-}\mathrm{KP}$ *ist.*

Folgerung. *Da für* $1\text{-}\mathrm{KP}$ *ein* monotones *FPTAS existiert [Briest et al., 2011], können wir einen* anreizkompatiblen $\frac{1}{2} - \epsilon$*-Approximationsalgorithmus für* $\mathrm{C\text{-}KP}$ *konstruieren, der Zeit polynomial in der Eingabelänge und* $\frac{1}{\epsilon}$ *benötigt.*

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtapproximierbarkeit durch *FPTAS*

Satz. *Es existiert kein FPTAS für* C-KP, *falls* $P \neq NP$.

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

- Entscheide EQUIPARTITION mittels FPTAS für C-KP

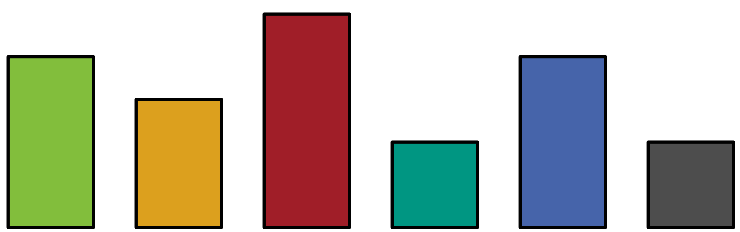
Definition (EQUIPARTITION Problem). *Sei I eine Menge von n Gegenständen mit Gewichten $w_i \in \mathbb{N}$. Entscheide, ob Partition $I = I_1 \uplus I_2$ existiert mit*

$$|I_1| = |I_2| und \sum_{i \in I_1} w_i = \sum_{i \in I_2} w_i.$$

Nichtapproximierbarkeit durch $FPTAS$

Definition (Equipartition Problem). *Sei I eine Menge von n Gegenständen mit Gewichten $w_i \in \mathbb{N}$. Entscheide, ob Partitionen $I = I_1 \uplus I_2$ existieren mit*

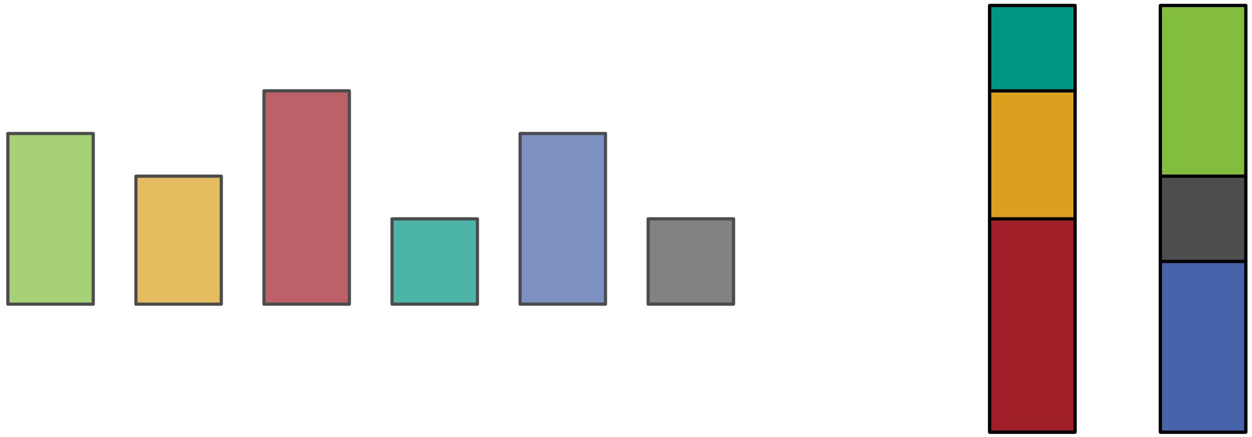
$$|I_1| = |I_2| \, und \sum_{i \in I_1} w_i = \sum_{i \in I_2} w_i .$$



Nichtapproximierbarkeit durch *FPTAS*

Definition (EQUIPARTITION Problem). *Sei I eine Menge von n Gegenständen mit Gewichten $w_i \in \mathbb{N}$. Entscheide, ob Partitionen $I = I_1 \uplus I_2$ existieren mit*

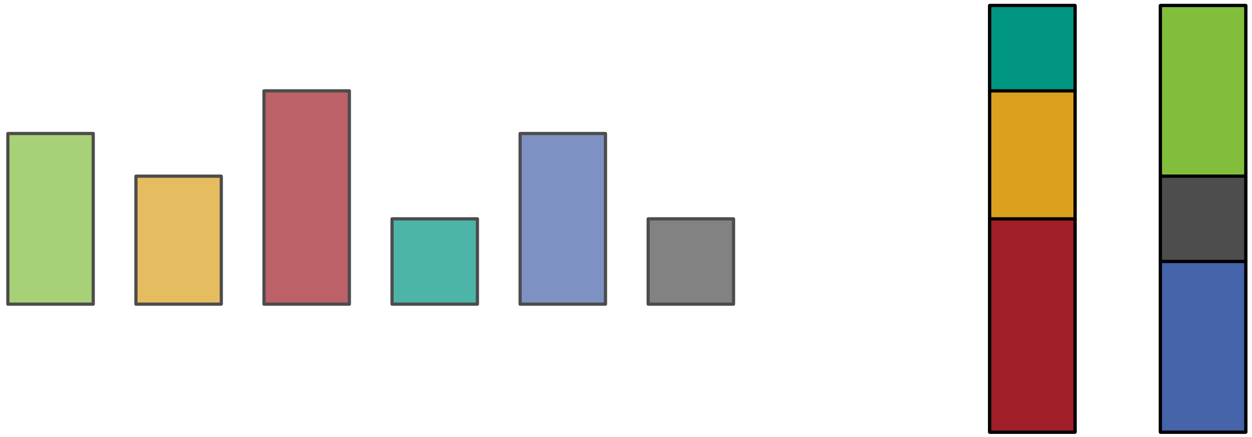
$$|I_1| = |I_2| \mathit{und} \sum_{i \in I_1} w_i = \sum_{i \in I_2} w_i .$$



Nichtapproximierbarkeit durch $FPTAS$

Definition (EQUIPARTITION Problem). *Sei I eine Menge von n Gegenständen mit Gewichten $w_i \in \mathbb{N}$. Entscheide, ob Partitionen $I = I_1 \uplus I_2$ existieren mit*

$$|I_1| = |I_2| und \sum_{i \in I_1} w_i = \sum_{i \in I_2} w_i .$$



Satz ([Kellerer et al., 2004]). EQUIPARTITION *ist NP-vollständig.*

Nichtapproximierbarkeit durch $FPTAS$

Satz. *Es existiert kein FPTAS für* $\mathrm{C\text{-}KP}$*, falls* $P \neq NP$.

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Entscheide $\textsc{Equipartition}$ mittels FPTAS für $\mathrm{C\text{-}KP}$
- Dazu: Entscheidungsproblem $\mathrm{C\text{-}KP}_D$ zu $\mathrm{C\text{-}KP}$
- Entscheidet für (zusätzliches) V, ob ein Rucksack K mit Gesamtwert $\sum_{i \in K} v_i \geq V$ existiert

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtapproximierbarkeit durch *FPTAS*

Satz. *Es existiert kein FPTAS für* C-KP*, falls* $P \neq NP$.

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

- Entscheide EQUIPARTITION mittels FPTAS für C-KP
- P-Reduktion:
  - Gegeben: EQUIPARTITION Instanz $(w_i : i \in I)$
  - Ausgabe: C-KP$_D$ Instanz $((w_i', v_i : i \in i), C, V)$, wobei

$$I' = I \qquad w_i' = w_i + j\beta(w_{max} - w_i) \qquad C = \left|\frac{\sum_{i\in I} w_i'}{2}\right|$$

$$v_i = 1$$

$$V = \frac{n}{2} \qquad \beta = \sqrt{\frac{W}{nw_{max} - W}} \qquad W = \sum_{i\in I} w_i$$

$$w_{max} = \max_{i\in I} w_i$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nichtapproximierbarkeit durch *FPTAS*

Satz. *Es existiert kein FPTAS für* $\mathrm{C\text{-}KP}$, *falls* $P \neq NP$.

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

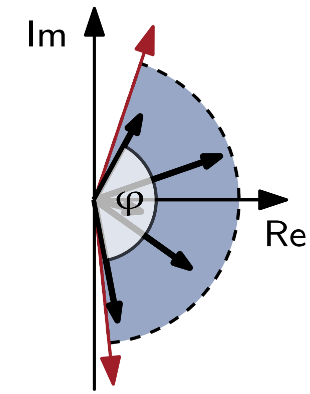
- Entscheide $\textsc{Equipartition}$ mittels FPTAS für $\mathrm{C\text{-}KP}$
- Angenommen, es gäbe FPTAS für $\mathrm{C\text{-}KP}$
- Wähle $\epsilon = \frac{1}{n+1}$ für $1 - \epsilon$-Approximation mit Wert z
- Optimalwert z^*
- $z \geq (1-\epsilon)z^* > z^* - \frac{z^*}{n} \geq z^* - 1$
- z^* ist ganzzahlig, daher Approximation z exakt
- Widerspruch zur NP-Schwere von $\textsc{Equipartition}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Zusammenfassung

- Optimierungsproblem $\mathrm{C\text{-}KP}$
- $(\frac{1}{2} - \epsilon)$-Approximationsalgorithmus mittels *FPTAS* für $1\text{-}\mathrm{KP}$
- Einbettung in anreizkompatiblen Allokationsmechanismus
  - Eignet sich zur Modellierung von Wechselstromsystemen
  - Relativ simple Allokationslösung
- Existenz eines FPTAS für $\mathrm{C\text{-}KP}$ (vermutlich) widerlegt
- Offene Fragen
  - PTAS für $\mathrm{C\text{-}KP}$ finden
  - monotonen Algorithmus für $\mathrm{GC\text{-}KP}$ finden
  - Netztopologie berücksichtigen

Ausblick



- [Chau et al., 2014], behandelt im Vortrag am 7.2.17
  - anreizkompatibles PTAS für $\mathrm{C\text{-}KP}$ für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$
  - anreizkompatibles FPTAS für Fall $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, der Kapazitätsbedingung um höchstens $1 + \epsilon$ verletzt
  - Erweiterung auf *multi-minded agents*
- [Khonji et al., 2014], behandelt im Vortrag am 6.12.16
  - Im Fall $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ existiert kein α-Approximationsalgorithmus
  - $\mathrm{C\text{-}KP}$ 'ausgeforscht', Konzentration auf $\mathrm{GC\text{-}KP}$
- [Khonji et al., 2016]
  - Erweitert $\mathrm{C\text{-}KP}$ auf Scheduling Problem mit diskreten Zeitschlitzen
  - Greedy $\frac{1}{2} cos \frac{\varphi}{2}$-Approximation für $\mathrm{C\text{-}KP}$ in $\mathcal{O}(n \log n)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Literaturverzeichnis

Karlsruher Institut für Technologie

[Chau et al., 2014] Chi Kin Chau, Khaled Elbassioni, and Majid Khonji. Truthful mechanisms for combinatorial AC electric power allocation. *13th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, AAMAS 2014*, 2014.

[Kellerer et al., 2004] Hans Kellerer, Ulrich Pferschy, and David Pisinger. *Knapsack Problems*, volume 33. 2004.

[Khonji et al., 2014] Majid Khonji, Chi Kin Chau, and Khaled Elbassioni. Inapproximability of power allocation with inelastic demands in AC electric systems and networks. *Proceedings - International Conference on Computer Communications and Networks, ICCCN*, 2014.

Literaturverzeichnis

[Sianaki et al., 2010] Omid Ameri Sianaki, Omar Hussain, and Azadeh Rajabian Tabesh. A Knapsack problem approach for achieving efficient energy consumption in smart grid for endusers' life style. *2010 IEEE Conference on Innovative Technologies for an Efficient and Reliable Electricity Supply*, pages 159–164, 2010.

[Yu und Chau, 2012] Lan Yu and Chi-Kin Chau. Complex-Demand Knapsack Problems and Incentives in AC Power Systems. 2005, 2012.

[Briest et al., 2011] Patrick Briest, Piotr Krysta, and Berthold Vöcking. Approximation Techniques for Utilitarian Mechanism Design. *Stoc*, 40(6):1587–1622, 2011.

Literaturverzeichnis

Karlsruher Institut für Technologie

[Khonji et al., 2016] Majid Khonji, Areg Karapetyan, Khaled M Elbassioni, and Sid Chi-Kin Chau. Complex-demand Scheduling Problem with Application in Smart Grid. *CoRR*, abs/1603.0, 2016.

[Frieze et al., 1984] A. M. Frieze and M. R B Clarke. Approximation algorithms for the m-dimensional 0-1 knapsack problem: Worst-case and probabilistic analyses, 1984.

FPTAS zu 1-KP

- Spezialfall ganzzahliger Werte v_i
- Dynamische Programmierung [Kellerer et al., 2004]
- Exakte Lösung in $\mathcal{O}(n^2 V)$, wobei $n = |I|$, $V = \max_{i \in I} v_i$
- Pseudopolynomiell
- Rekursionsgleichung:

$$C(i, v) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } v < 0 \\ 0, & \text{falls } i = v = 0 \\ \min\{C(i-1, v), C(i-1, v-v_i) + w_i\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $C(i, v)$ minimal nötige Kapazität, um unter Berücksichtigung der ersten i Gegenstände Wert v zu erreichen
- Wert der Optimallösung $\arg\max_{0 \leq v \leq nV} \{C(n, v) | C(n, v) \leq C\}$

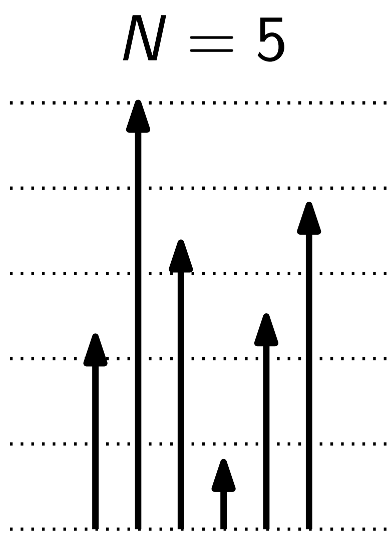
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

FPTAS zu 1-KP

- Idee für $1 - \epsilon$-Approximation:
  - diskretisiere Werte in $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}n)$ Stufen
  - berechne Lösung des dynamisches Programm auf abgerundeten Werten
  - Lösungsgüte $1 - \epsilon$

Algorithm 1 $Alg^{1d}[(w_i, v_i : i \in I), C]$

$V \leftarrow \max_{i \in I}\{v_i\}$
$N \leftarrow \frac{1}{\epsilon}|I|$
for $i \in I$ **do**
    $\tilde{v}_i \leftarrow \lfloor \frac{v_i}{V} N \rfloor$
end for
$K \leftarrow solve\text{-}DP[(w_i, \tilde{v}_i : i \in I), C]$
return K



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

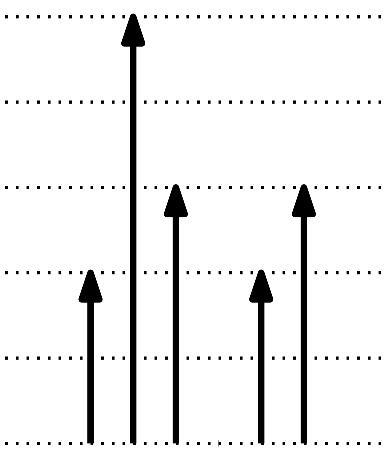
FPTAS zu 1-KP

- Idee für $1 - \epsilon$-Approximation:
  - diskretisiere Werte in $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon} n)$ Stufen
  - berechne Lösung des dynamisches Programm auf abgerundeten Werten
  - Lösungsgüte $1 - \epsilon$

Algorithm 1 $Alg^{1d}[(w_i, v_i : i \in I), C]$

$V \leftarrow \max_{i \in I}\{v_i\}$
$N \leftarrow \frac{1}{\epsilon}|I|$
for $i \in I$ **do**
    $\tilde{v}_i \leftarrow \lfloor \frac{v_i}{V} N \rfloor$
end for
$K \leftarrow solve\text{-}DP[(w_i, \tilde{v}_i : i \in I), C]$
return K

$N = 5$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

Algorithm 1 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{1d}[(\tilde{w}_i, v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}]$
return K

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

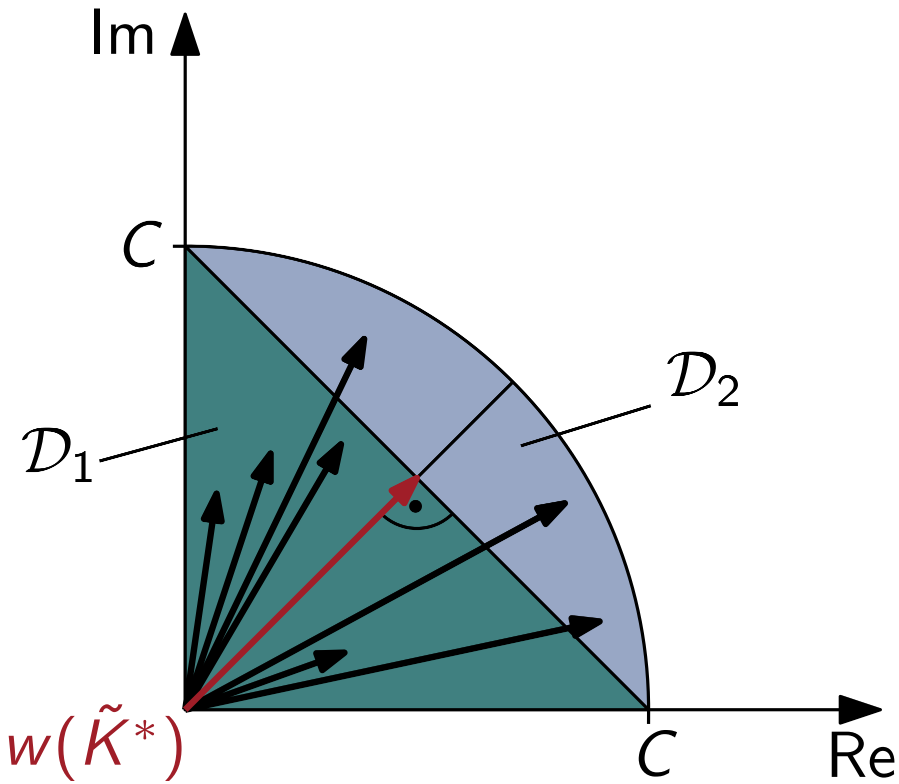
- $v(K) = \sum_{i \in K} v_i$, $w(K) = \sum_{i \in K} w_i$
- Partitioniere I in $I_1 = \{i \in I : w_i \in D_1\}$ und $I_2 = \{i \in I : w_i \in D_2\}$
- Alg^{1d} liefert Lösungen K_1, K_2
- Optimallösungen K_1^*, K_2^*
- $\tilde{w}(K_1) \leq \frac{C}{\sqrt{2}}$
- $K_2 = \{\arg\max_{i \in I} v_i\}$, denn $\forall i \in I_2 : \tilde{w}_i = \frac{C}{\sqrt{2}}$
- Alg^{1d} liefert Lösung $K = \max\{K_1, K_2\}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

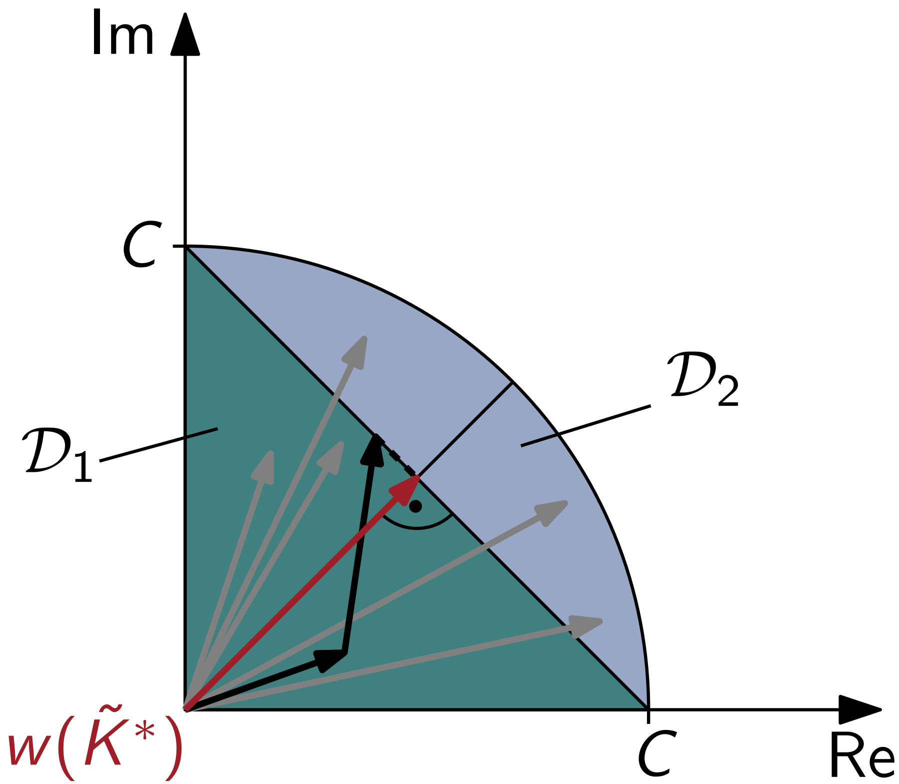
Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):



Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

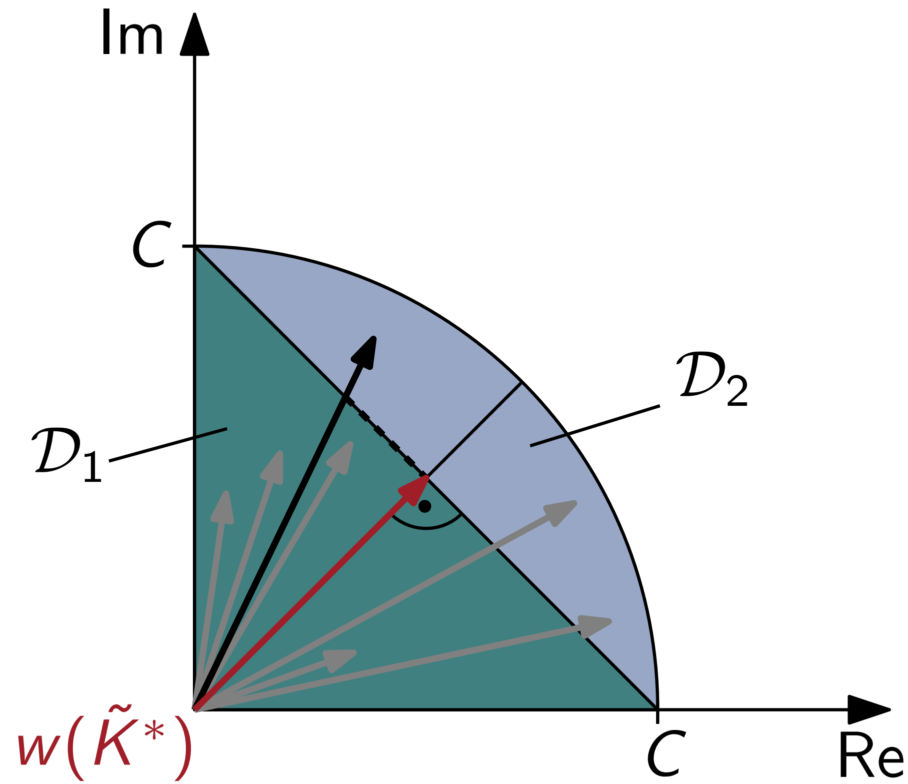


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist* Alg^{1d} *ein* ρ*-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist* Alg^b *ein* $\frac{\rho}{2}$*-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

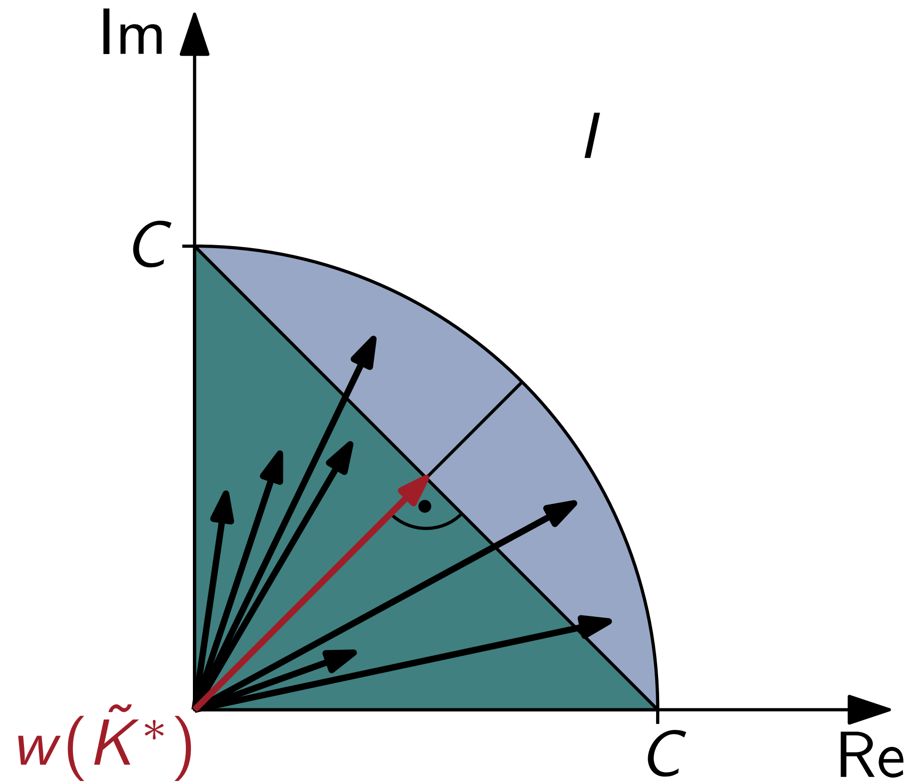


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP*, so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

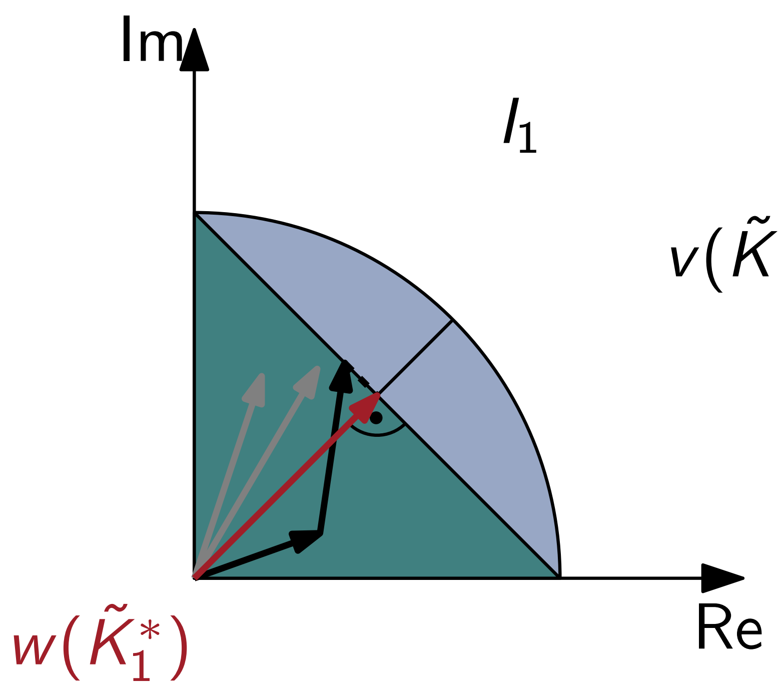
Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):



Approximationsgüte von Alg^b

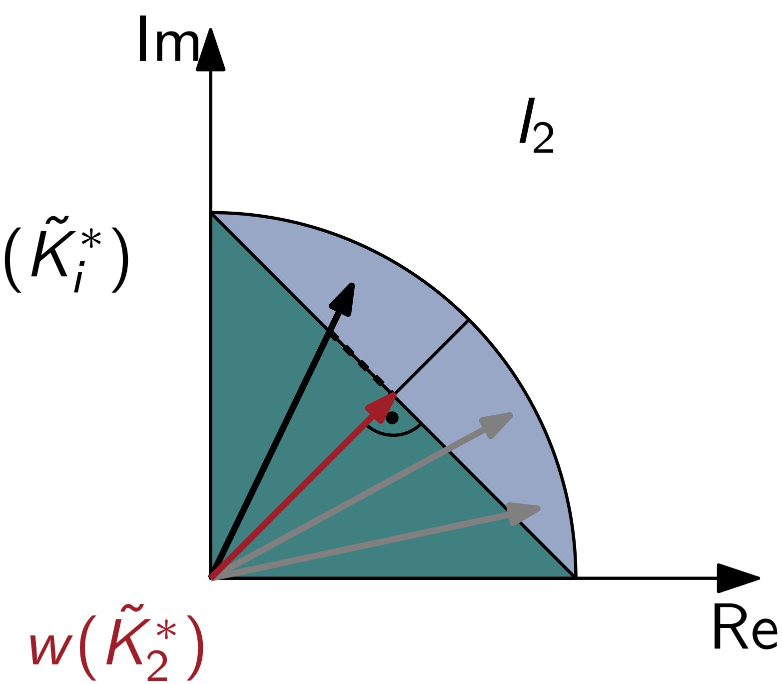
Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):



$$I = I_1 \uplus I_2$$

$$v(\tilde{K}^*) = \max_{i \in \{1,2\}} v(\tilde{K}_i^*)$$



Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für 1-KP, so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für C-KP*

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

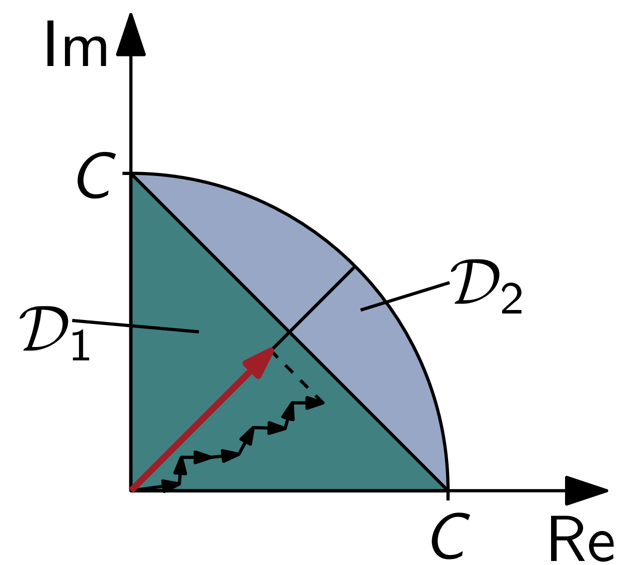
- Optimallösung des Gesamtproblems K^*
- Optimallösungen $\tilde{K}_i^*$ des projizierten Problems auf I_i
- $v(K_i) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Optimallösung des Gesamtproblems K^*
- Optimallösungen $\tilde{K}_i^*$ des projizierten Problems auf I_i
- $v(K_i) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$
- Fall $w(K^*) \in D_1$:
  - klar: $v(K) \geq v(K_1) \geq \rho v(\tilde{K}_1^*) = \rho v(K^*)$



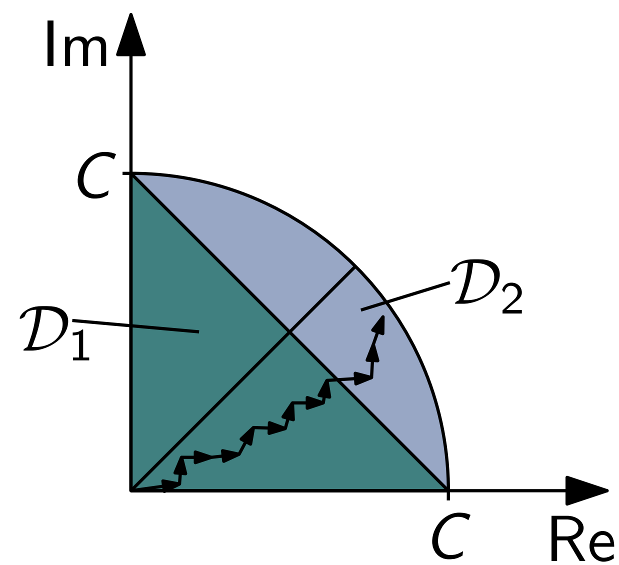
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Optimallösung des Gesamtproblems K^*
- Optimallösungen $\tilde{K}_i^*$ des projizierten Problems auf I_i
- $v(K_i) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$
- Fall $\forall j \in K^* : w_j \in D_1$:
  - $\frac{C}{\sqrt{2}} < \tilde{w}(K^*) \leq C$ und $\forall j \in K^* : \tilde{w}_j \leq \frac{C}{\sqrt{2}}$
  - $K^* = K_1^* \uplus K_2^*$ mit $w(K_1^*), w(K_2^*) \in D_1$
  - $v(K) \geq v(K_1) \geq \frac{\rho}{2} 2v(\tilde{K}_1^*) \geq \frac{\rho}{2}(v(K_1^*) + v(K_2^*)) = \frac{\rho}{2} v(K^*)$



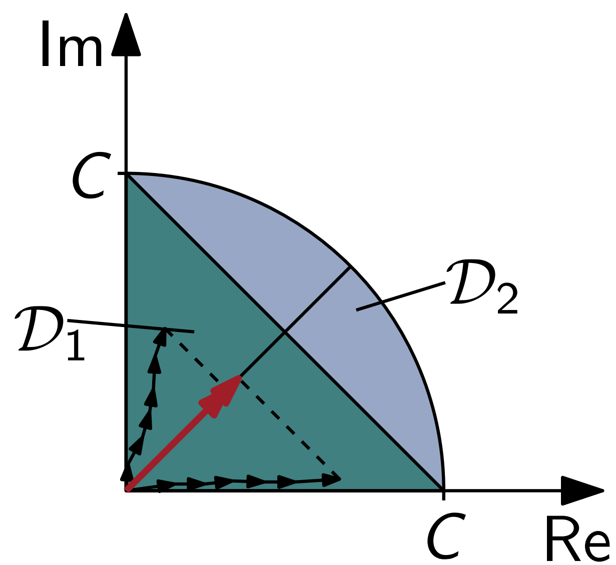
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* $\mathrm{1\text{-}KP}$, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* $\mathrm{C\text{-}KP}$

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012])**:**

- Optimallösung des Gesamtproblems K^*
- Optimallösungen $\tilde{K}_i^*$ des projizierten Problems auf I_i
- $v(K_i) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$
- Fall $\forall j \in K^* : w_j \in D_1$:
  - $\frac{C}{\sqrt{2}} < \tilde{w}(K^*) \leq C$ und $\forall j \in K^* : \tilde{w}_j \leq \frac{C}{\sqrt{2}}$
  - $K^* = K_1^* \uplus K_2^*$ mit $w(K_1^*), w(K_2^*) \in D_1$
  - $v(K) \geq v(K_1) \geq \frac{\rho}{2} 2v(\tilde{K}_1^*) \geq \frac{\rho}{2}(v(K_1^*) + v(K_2^*)) = \frac{\rho}{2} v(K^*)$



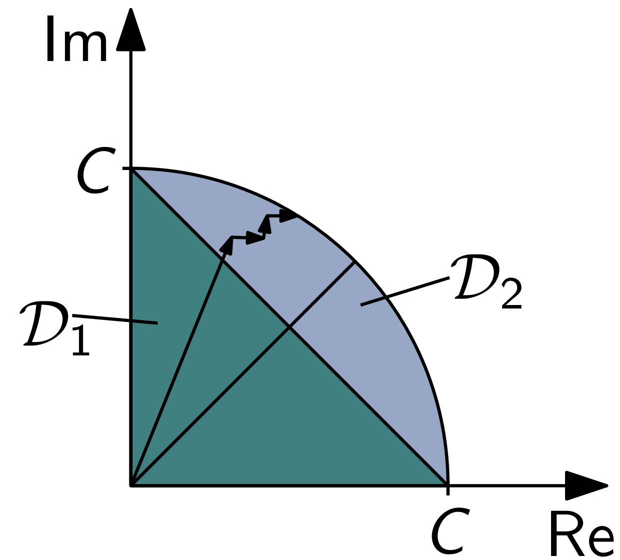
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für $\mathrm{1\text{-}KP}$, so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für $\mathrm{C\text{-}KP}$*

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

- Optimallösung des Gesamtproblems K^*
- Optimallösungen $\tilde{K}_i^*$ des projizierten Problems auf I_i
- $v(K_i) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$
- Fall $\exists! j \in K^* : w_j \in D_2$:
  - $K^* \setminus \{j\} \subseteq I_1$, also $v(K^* \setminus \{j\}) \leq v(\tilde{K}_1^*)$
  - $j \in I_2$, also $v(\{j\}) \leq v(\tilde{K}_2^*)$
  - $v(K) \geq \frac{1}{2}(v(K_1) + v(K_2)) \geq \frac{\rho}{2}(v(\tilde{K}_1^*) + v(\tilde{K}_2^*)) \geq \frac{\rho}{2} v(K^*)$



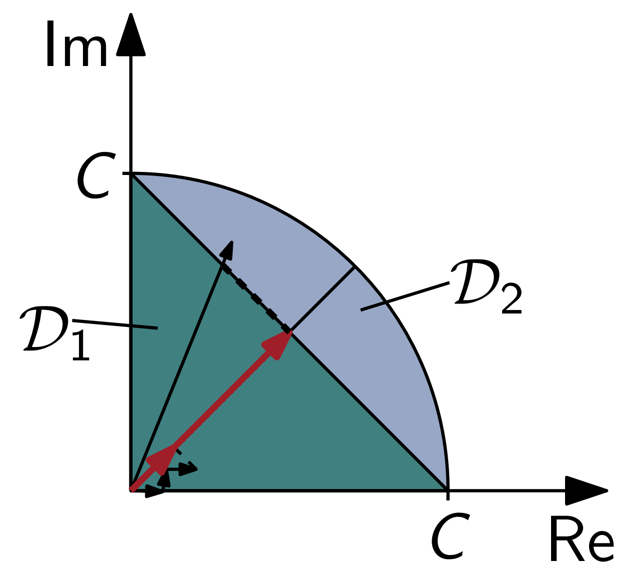
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsgüte von Alg^b

Satz. *Ist Alg^{1d} ein ρ-Approximationsalgorithmus für* 1-KP, *so ist Alg^b ein $\frac{\rho}{2}$-Approximationsalgorithmus für* C-KP

Beweis (nach [Yu und Chau, 2012]):

- Optimallösung des Gesamtproblems K^*
- Optimallösungen $\tilde{K}_i^*$ des projizierten Problems auf I_i
- $v(K_i) \geq \rho v(\tilde{K}_i^*)$
- Fall $\exists! j \in K^* : w_j \in D_2$:
  - $K^* \setminus \{j\} \subseteq I_1$, also $v(K^* \setminus \{j\}) \leq v(\tilde{K}_1^*)$
  - $j \in I_2$, also $v(\{j\}) \leq v(\tilde{K}_2^*)$
  - $v(K) \geq \frac{1}{2}(v(K_1) + v(K_2)) \geq \frac{\rho}{2}(v(\tilde{K}_1^*) + v(\tilde{K}_2^*)) \geq \frac{\rho}{2} v(K^*)$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Anreizkompatible Zahlungsfunktion

- *kritischer Wert* für Agent a: $\theta_a(d_a, t_{-a})$
  - Agent a ist selektiert, genau dann, wenn $v_k \geq \theta_a(d_a, t_{-a})$
- Idee: Lasse jeden selektierten Agenten seinen kritischen Wert zahlen

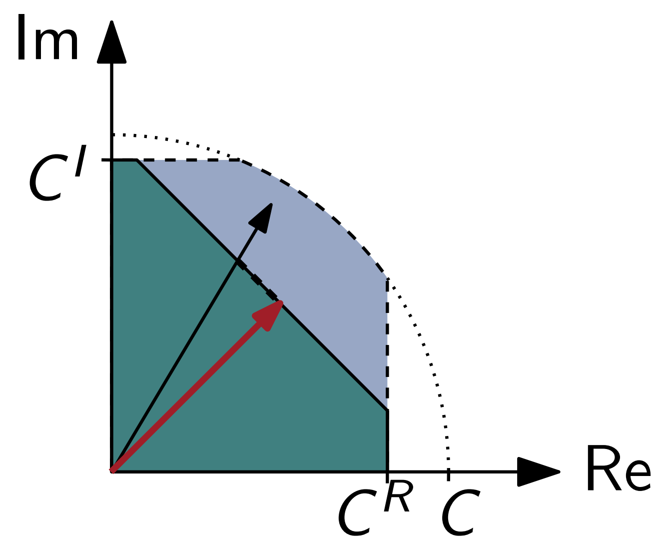
$$p^{\mathcal{A}}(t)_a = \begin{cases} \theta_a(d_a, t_{-a}), & \text{falls } a \text{ selektiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\theta_a(d_a, t_{-a}) \in [0, v_a]$
  - kritischer Wert kann über binäre Suche bestimmt werden
  - Annahme: $v_k \in \mathbb{N}$
- Stellt nichtnegative Nutzenfunktion sicher
  - Die war so definiert: $u_a(t) = t_a(\mathcal{A}(t)) - p_a(t)$

Approximationsalgorithmus zu GC-KP

Algorithm 3 $Alg^b[(w_i, v_i : i \in I), C]$

1: **for** $i \in I$ **do**
2: $\quad \tilde{w}_i \leftarrow \min\{\frac{w_i^R + w_i^I}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}\}$
3: **end for**
4: $K \leftarrow Alg^{3d}[((\tilde{w}_i, w_i^R, w_i^I), v_i : i \in I), \frac{C}{\sqrt{2}}, C^R, C^I]$
5: **return** K



Skizze PTAS für m-KP

Nach [Frieze et al., 1984]:

- Durchlaufe alle möglichen Rucksäcke $K \subseteq I$ der Größe $\mathcal{O}(m^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}})$
- Betrachte Gegenstände in K als selektiert, führe LP auf restlichen Gegenständen $I \setminus K$ aus
- Runde Ergebnis x ab

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik