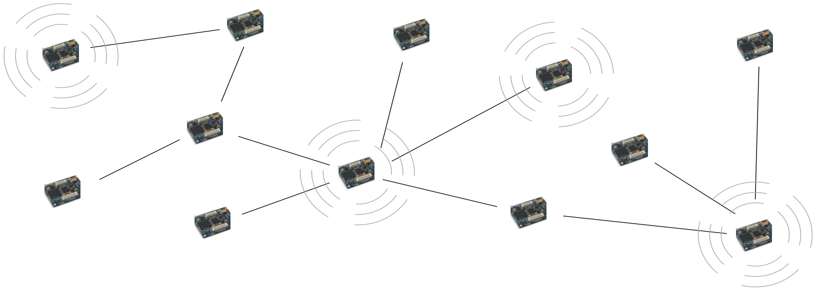
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

VL 11 – Kommunikation und Färbungen im SINR Modell

Fabian Fuchs | 17. Dez. 2015 (Version 1)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)



Motivation

Interferenzmodell bisher:

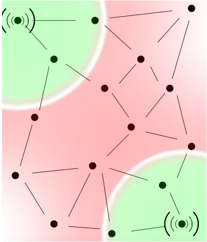
- kein Knoten kann gleichzeitig an zwei Übertragungen teilnehmen
- benachbarte Knoten können nicht gleichzeitig übertragen/empfangen

Motivation

Interferenzmodell bisher:

- kein Knoten kann gleichzeitig an zwei Übertragungen teilnehmen
- benachbarte Knoten können nicht gleichzeitig übertragen/empfangen

Realität für Drahtloskommunikation ist komplexer!

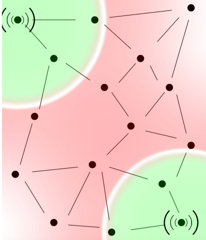


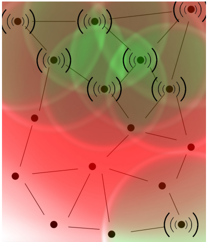
Motivation

Interferenzmodell bisher:

- kein Knoten kann gleichzeitig an zwei Übertragungen teilnehmen
- benachbarte Knoten können nicht gleichzeitig übertragen/empfangen

Realität für Drahtloskommunikation ist komplexer!





- Globale Interferenz kann Übertragungen verhindern

Wiederholung: SINR

SINR-Modell, allgemein

Im *Signal-to-Interference-plus-Noise-Ratio Modell* kann ein Empfänger r eine Nachricht eines Senders s dekodieren, wenn

$$\frac{P_s G_{sr}}{\sum_{s' \neq s} P_{s'} G_{s'r} + N} \geq \beta$$

- P_s: Signalstärke, mit der s sendet
- G_{sr}: Leistungsabfall zwischen s und r

Wiederholung: SINR

SINR-Modell, allgemein

Im *Signal-to-Interference-plus-Noise-Ratio Modell* kann ein Empfänger r eine Nachricht eines Senders s dekodieren, wenn

$$\frac{PG_{sr}}{\sum_{s' \neq s} PG_{s'r} + N} \geq \beta$$

- P: Signalstärke, mit der s sendet
- G_{sr}: Leistungsabfall zwischen s und r

Wiederholung: SINR

SINR-Modell, allgemein

Im *Signal-to-Interference-plus-Noise-Ratio Modell* kann ein Empfänger r eine Nachricht eines Senders s dekodieren, wenn

$$\frac{P/\operatorname{dist}(s,r)^\alpha}{\sum_{s'\neq s} P/\operatorname{dist}(s',r)^\alpha + N} \geq \beta$$

- P: Signalstärke, mit der s sendet
- $\operatorname{dist}(s,r)^\alpha$: *geometrischer* Leistungsabfall zwischen s und r

Wiederholung: SINR

SINR-Modell, allgemein

Im *Signal-to-Interference-plus-Noise-Ratio Modell* kann ein Empfänger r eine Nachricht eines Senders s dekodieren, wenn

$$\frac{P/\operatorname{dist}(s,r)^\alpha}{\sum_{s' \neq s} P/\operatorname{dist}(s',r)^\alpha + N} \geq \beta$$

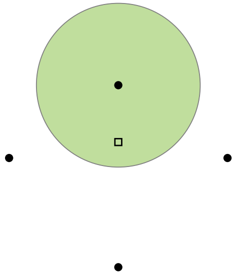
- P: Signalstärke, mit der s sendet
- $\operatorname{dist}(s,r)^\alpha$: *geometrischer* Leistungsabfall zwischen s und r

SINR-Modell ist sehr viel realistischer, aber gleichzeitig viel komplexer zu analysieren.

Kommunikation im SINR Modell

Theoretische Sendereichweite

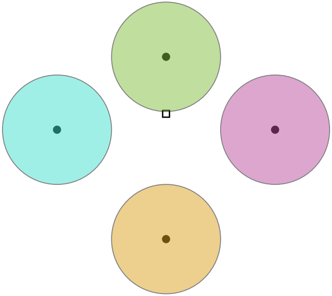
Die maximale Sendereichweite beträgt $\sqrt[\alpha]{\frac{P}{\beta N}}$.



Kommunikation im SINR Modell

Theoretische Sendereichweite

Die maximale Sendereichweite beträgt $\sqrt[\alpha]{\frac{P}{\beta N}}$.



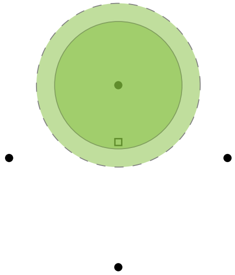
Kommunikation im SINR Modell

Theoretische Sendereichweite

Die maximale Sendereichweite beträgt $\sqrt[\alpha]{\frac{P}{\beta N}}$.

Definition: Sendereichweite

Die zu erreichende Sendereichweite R beträgt $\sqrt[\alpha]{\frac{P}{\delta\beta N}}$ mit $\delta > 1$.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

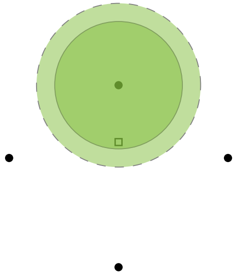
Kommunikation im SINR Modell

Theoretische Sendereichweite

Die maximale Sendereichweite beträgt $\sqrt[\alpha]{\frac{P}{\beta N}}$.

Definition: Sendereichweite

Die zu erreichende Sendereichweite R beträgt $\sqrt[\alpha]{\frac{P}{\delta \beta N}}$ mit $\delta > 1$.

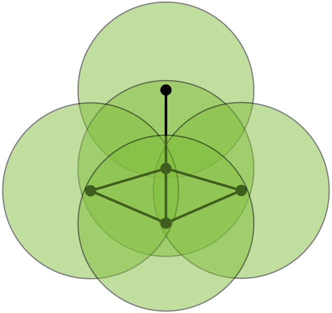


- Wir fordern: Knoten innerhalb der Sendereichweite sollen erreicht werden
- Dadurch lassen sich Nachbarschaften ableiten
- Englisch: Transmission range (maximale) und broadcasting range (zu erreichende)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?



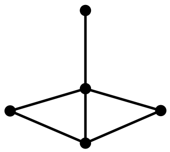
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

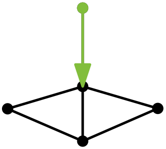
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

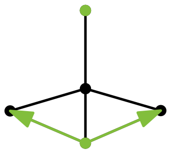
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

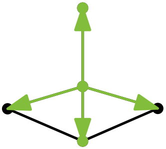
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden



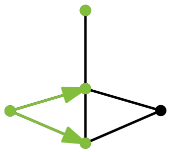
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

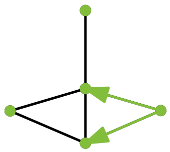
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden
- Im Beispiel: Nacheinander ($\Rightarrow \Omega(n)$ Zeitslots)
- Ziel: Möglichst viele Knoten gleichzeitig



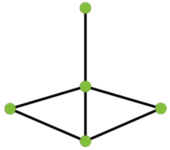
Local Broadcasting

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden
- Im Beispiel: Nacheinander ($\Rightarrow \Omega(n)$ Zeitslots)
- Ziel: Möglichst viele Knoten gleichzeitig

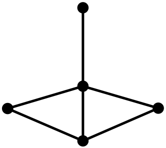


Local Broadcasting kann in $O(\Delta \log n)$ Zeit erreicht werden!

Local Broadcasting Algorithmus

Local Broadcasting

1. Jeder Knoten kennt n und Δ
2. Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit $1/O(\Delta)$

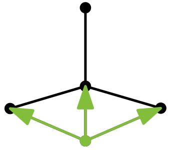


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Algorithmus

Local Broadcasting

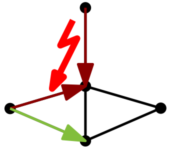
1. Jeder Knoten kennt n und Δ
2. Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit $1/O(\Delta)$



Local Broadcasting Algorithmus

Local Broadcasting

1. Jeder Knoten kennt n und Δ
2. Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit $1/O(\Delta)$

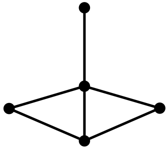


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Algorithmus

Local Broadcasting

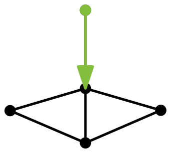
1. Jeder Knoten kennt n und Δ
2. Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit $1/O(\Delta)$



Local Broadcasting Algorithmus

Local Broadcasting

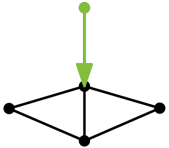
1. Jeder Knoten kennt n und Δ
2. Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit $1/O(\Delta)$



Local Broadcasting Algorithmus

Local Broadcasting

1. Jeder Knoten kennt n und Δ
2. Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit $1/O(\Delta)$



Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit Erfolg.

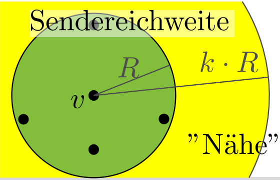
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"



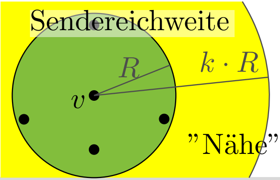
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der “Nähe”



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

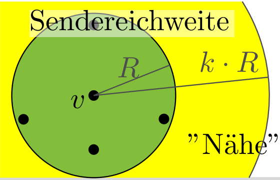
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
  - Jeder Knoten sendet mit WS' $1/(c\Delta)$
  - Es sind $O(k^2)$ unabhängige Knoten in der "Nähe"
  - Damit insgesamt $O(k^2\Delta)$ Knoten in der "Nähe"



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

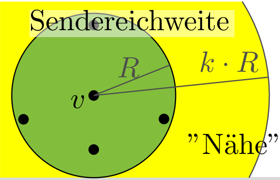
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
  - Jeder Knoten sendet mit WS' $1/(c\Delta)$
  - Es sind $O(k^2)$ unabhängige Knoten in der "Nähe"
  - Damit insgesamt $O(k^2\Delta)$ Knoten in der "Nähe"
  - $\Rightarrow$ Die WS' das einer davon sendet ist $\approx k^2/c$, also konstant (für c groß genug)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

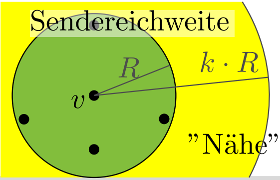
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ “klein”



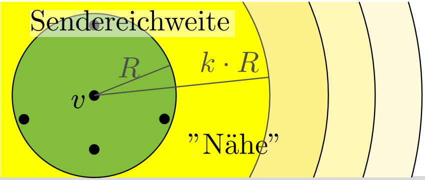
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ “klein”
  - Schritt 1 gilt überall $\Rightarrow$ Erwartete Interferenz pro Fläche abschätzbar



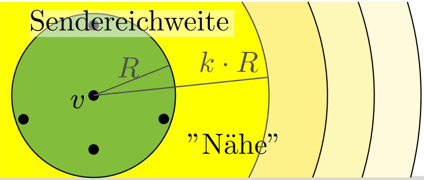
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ "klein"
  - Schritt 1 gilt überall $\Rightarrow$ Erwartete Interferenz pro Fläche abschätzbar
  - Lege Ringe um v: Fläche steigt quadratisch mit Entfernung, die Auswirkung der Interferenz sinkt quadratisch



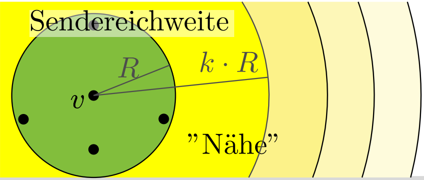
Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ "klein"
  - Schritt 1 gilt überall $\Rightarrow$ Erwartete Interferenz pro Fläche abschätzbar
  - Lege Ringe um v: Fläche steigt quadratisch mit Entfernung, die Auswirkung der Interferenz sinkt quadratisch
  - Die erwartete Interferenz ist mit konstanter WS' $\frac{1}{c'}$ nicht *zu hoch*



Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der “Nähe”
- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ “klein”

Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ "klein"
- Insgesamt: WS' für Erfolg pro Zeitslot:
  - v sendet: $1/(c\Delta)$
  - Lokaler Erfolg: $\approx k^2/c$
  - Globaler Erfolg: $1/c'$

Local Broadcasting Algorithmus

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ "klein"
- Insgesamt: WS' für Erfolg pro Zeitslot: $\approx 1/(c''\Delta)$
  - v sendet: $1/(c\Delta)$
  - Lokaler Erfolg: $\approx k^2/c$
  - Globaler Erfolg: $1/c'$

Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ "klein"
- Insgesamt: WS' für Erfolg pro Zeitslot: $\approx 1/(c''\Delta)$
  - v sendet: $1/(c\Delta)$
  - Lokaler Erfolg: $\approx k^2/c$
  - Globaler Erfolg: $1/c'$
- Je $O(\Delta)$ Zeitslots: Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit

Local Broadcasting Algorithmus

Satz

Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit $1/c'$ "klein"
- Insgesamt: WS' für Erfolg pro Zeitslot: $\approx 1/(c''\Delta)$
  - v sendet: $1/(c\Delta)$
  - Lokaler Erfolg: $\approx k^2/c$
  - Globaler Erfolg: $1/c'$
- Je $O(\Delta)$ Zeitslots: Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit
- $O(\Delta \log n)$ Zeitslots: Erfolg mit hoher Wahrscheinlichkeit

Local Broadcasting

Local Broadcasting Varianten (ohne Beweis)

1. Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting

Local Broadcasting Varianten (ohne Beweis)

1. Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.
2. Nach $O(\Delta)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit konstanter Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Local Broadcasting

Local Broadcasting Varianten (ohne Beweis)

1. Nach $O(\Delta \log n)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.
2. Nach $O(\Delta)$ Zeitslots hatte jeder Knoten mit konstanter Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.
3. Eine unabhängige Menge an Knoten hat (mittels erhöhter Sendewahrscheinlichkeit) nach $O(\log n)$ Zeitslots mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

Erinnerung: TDMA - koordinierter Medienzugriff

- Übertragungen bekommen Slots in Zeitraster zugewiesen
  - *Time Division Multiple Access (TDMA)*
- Übertragungen sind *gleichzeitig* möglich, wenn sie weit genug auseinander liegen

Erinnerung: TDMA - koordinierter Medienzugriff

- Übertragungen bekommen Slots in Zeitraster zugewiesen
  - *Time Division Multiple Access (TDMA)*
- Übertragungen sind *gleichzeitig* möglich, wenn sie weit genug auseinander liegen

Bisher:

- Kantenfärbung kann über Knotenfärbung berechnet werden
- Kantenfärbung induziert TDMA-Schedule für Übertragungen

Erinnerung: TDMA - koordinierter Medienzugriff

- Übertragungen bekommen Slots in Zeitraster zugewiesen
  - *Time Division Multiple Access (TDMA)*
- Übertragungen sind *gleichzeitig* möglich, wenn sie weit genug auseinander liegen

Bisher:

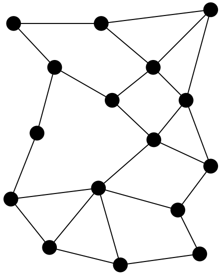
- Kantenfärbung kann über Knotenfärbung berechnet werden
- Kantenfärbung induziert TDMA-Schedule für Übertragungen

Jetzt:

- Knotenfärbung soll TDMA-Schedule für Local Broadcasts berechnen
- Im geometrischen SINR Modell ist k-Distanz Färbung notwendig (k-Hop Färbung nicht ausreichend)

Berechnung Local Broadcasting Schedule

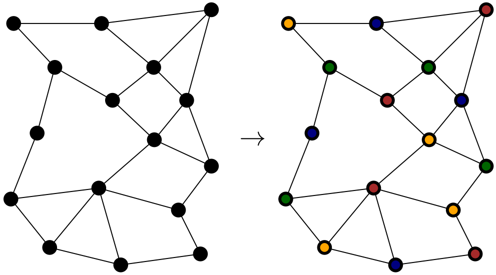
Ablauf



Berechnung Local Broadcasting Schedule

Ablauf

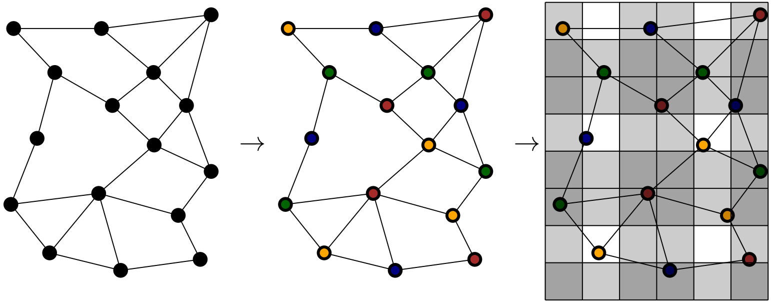
1. Berechnung einer 1-Hop Knotenfärbung
   - 2 Algorithmen: RandColor und ColorReduction



Berechnung Local Broadcasting Schedule

Ablauf

1. Berechnung einer 1-Hop Knotenfärbung
   - 2 Algorithmen: RandColor und ColorReduction
2. Techniken um die valid Färbung auf Distanz-k auszuweiten
   - 3 Techniken: Sendeleistung, Position, Steinerknoten



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

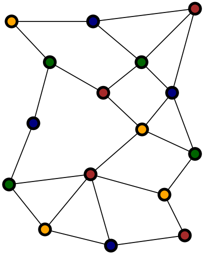
Erinnerung: Knotenfärbung

Definition

Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass für jede Kante die beiden Endpunkte unterschiedliche Farben haben, also

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

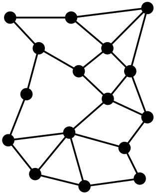
- Eine Färbung c hat die Größe $|c| = \max_{v \in V} c(v)$



Färbung 1: RandColor

RandColor Algorithmus

1. Wähle zufällig eine Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$
2. In jeder Runde
   - Wird ein Konflikt festgestellt, wähle neue zufällige Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$

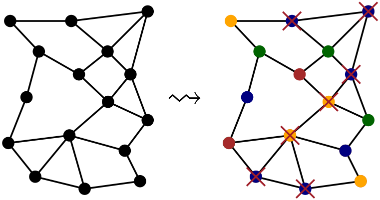


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 1: RandColor

RandColor Algorithmus

1. Wähle zufällig eine Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$
2. In jeder Runde
   - Wird ein Konflikt festgestellt, wähle neue zufällige Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$

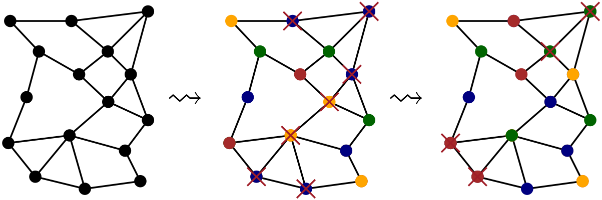


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 1: RandColor

RandColor Algorithmus

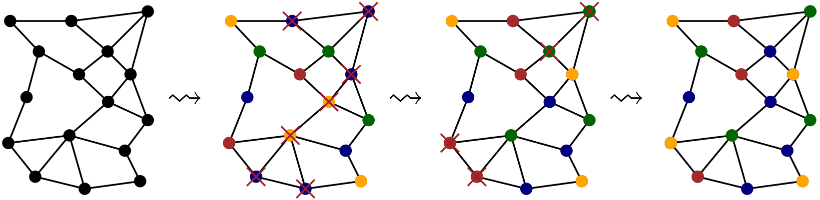
1. Wähle zufällig eine Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$
2. In jeder Runde
   - Wird ein Konflikt festgestellt, wähle neue zufällige Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$



Färbung 1: RandColor

RandColor Algorithmus

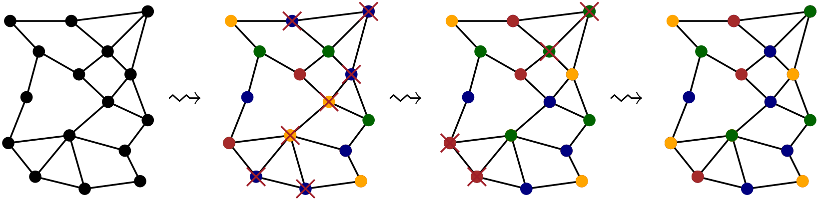
1. Wähle zufällig eine Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$
2. In jeder Runde
   - Wird ein Konflikt festgestellt, wähle neue zufällige Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$



Färbung 1: RandColor

RandColor Algorithmus

1. Wähle zufällig eine Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$
2. In jeder Runde
   - Wird ein Konflikt festgestellt, wähle neue zufällige Farbe aus $\{1, \ldots, 4\Delta\}$



Satz

Ohne Interferenz: RandColor berechnet in $O(\log n)$ eine 4Δ-Knotenfärbung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 1: RandColor

Satz

RandColor berechnet eine 4Δ-Knotenfärbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots im SINR Modell

Beweisidee:

- Wird Local Broadcasting für die Runden genutzt, folgt direkt eine Laufzeit von $O(\Delta \log^2 n)$ (klar?)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 1: RandColor

Satz

RandColor berechnet eine 4Δ-Knotenfärbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots im SINR Modell

Beweisidee:

- Wird Local Broadcasting für die Runden genutzt, folgt direkt eine Laufzeit von $O(\Delta \log^2 n)$ (klar?)
- Wir nutzen Local Broadcasting Variante 2 für jede Runde
  - Local Broadcasting (V2): Local Broadcast in $O(\Delta)$ Zeit mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 1: RandColor

Satz

RandColor berechnet eine 4Δ-Knotenfärbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots im SINR Modell

Beweisidee:

- Wird Local Broadcasting für die Runden genutzt, folgt direkt eine Laufzeit von $O(\Delta \log^2 n)$ (klar?)
- Wir nutzen Local Broadcasting Variante 2 für jede Runde
  - Local Broadcasting (V2): Local Broadcast in $O(\Delta)$ Zeit mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit
- Wahrscheinlichkeiten im probabilistischen Algorithmus und der Kommunikation können gemeinsam betrachtet werden

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 1: RandColor

Satz

RandColor berechnet eine 4Δ-Knotenfärbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots im SINR Modell

Beweisidee:

- Wird Local Broadcasting für die Runden genutzt, folgt direkt eine Laufzeit von $O(\Delta \log^2 n)$ (klar?)
- Wir nutzen Local Broadcasting Variante 2 für jede Runde
  - Local Broadcasting (V2): Local Broadcast in $O(\Delta)$ Zeit mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit
- Wahrscheinlichkeiten im probabilistischen Algorithmus und der Kommunikation können gemeinsam betrachtet werden
- Erneut: Konstante "Erfolgswahrscheinlichkeit" pro Runde (je $O(\Delta)$ Slots)
- Insgesamt: $O(\Delta \log n)$ Zeitslots

Färbung 2: ColorReduction

(Triviale) ColorReduction

1. Beginne mit $d = O(\Delta)$ Farben
2. In Runde i, die Knoten mit Farbe i sind *aktiv*
   - wählen eine neue Farbe aus $\{0, 1, \ldots, \Delta\}$
3. Valide Färbung nach $d = O(\Delta)$ Runden

Färbung 2: ColorReduction

Karlsruher Institut für Technologie

(Triviale) ColorReduction

1. Beginne mit $d = O(\Delta)$ Farben
2. In Runde i, die Knoten mit Farbe i sind *aktiv*
   - wählen eine neue Farbe aus $\{0, 1, \ldots, \Delta\}$
3. Valide Färbung nach $d = O(\Delta)$ Runden

Satz

Der triviale ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei synchronem Start

Färbung 2: ColorReduction

(Triviale) ColorReduction

1. Beginne mit $d = O(\Delta)$ Farben
2. In Runde i, die Knoten mit Farbe i sind *aktiv*
   - wählen eine neue Farbe aus $\{0, 1, \ldots, \Delta\}$
3. Valide Färbung nach $d = O(\Delta)$ Runden

Satz

Der triviale ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei synchronem Start

Beweis:

- Aktive Knoten sind unabhängig $\Rightarrow O(\log n)$ je Runde

Färbung 2: ColorReduction

Karlsruher Institut für Technologie

(Triviale) ColorReduction

1. Beginne mit $d = O(\Delta)$ Farben
2. In Runde i, die Knoten mit Farbe i sind *aktiv*
   - wählen eine neue Farbe aus $\{0, 1, \ldots, \Delta\}$
3. Valide Färbung nach $d = O(\Delta)$ Runden

Satz

Der triviale ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei synchronem Start

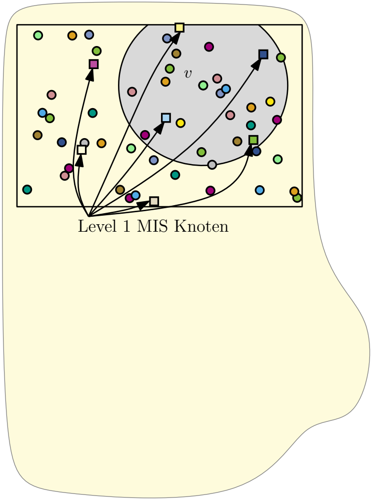
Beweis:

- Aktive Knoten sind unabhängig $\Rightarrow O(\log n)$ je Runde

Geht das auch ohne synchronen Start?

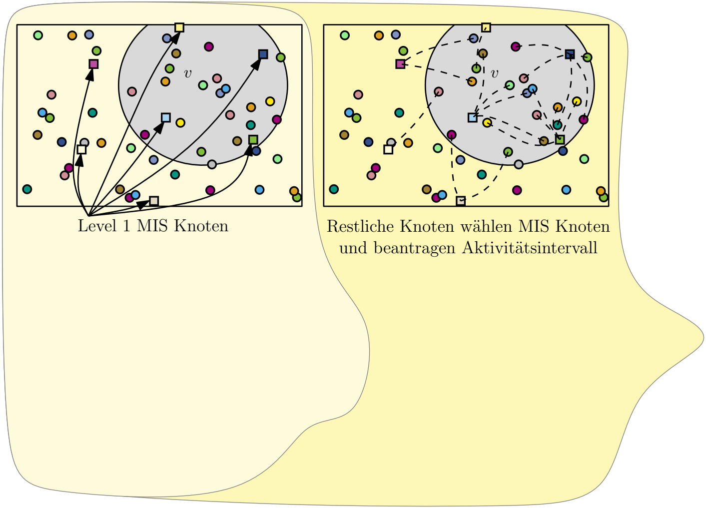
Färbung 2: ColorReduction

Idee: 2-schichtiges MIS zur Koordination der aktiven Farbe(n)



Färbung 2: ColorReduction

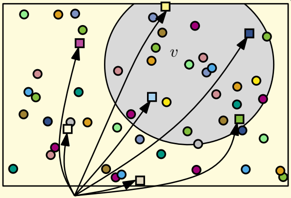
Idee: 2-schichtiges MIS zur Koordination der aktiven Farbe(n)



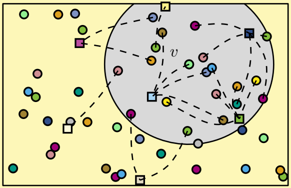
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 2: ColorReduction

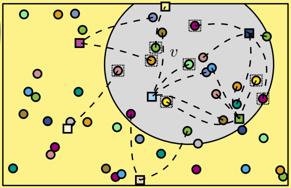
Idee: 2-schichtiges MIS zur Koordination der aktiven Farbe(n)



Level 1 MIS Knoten



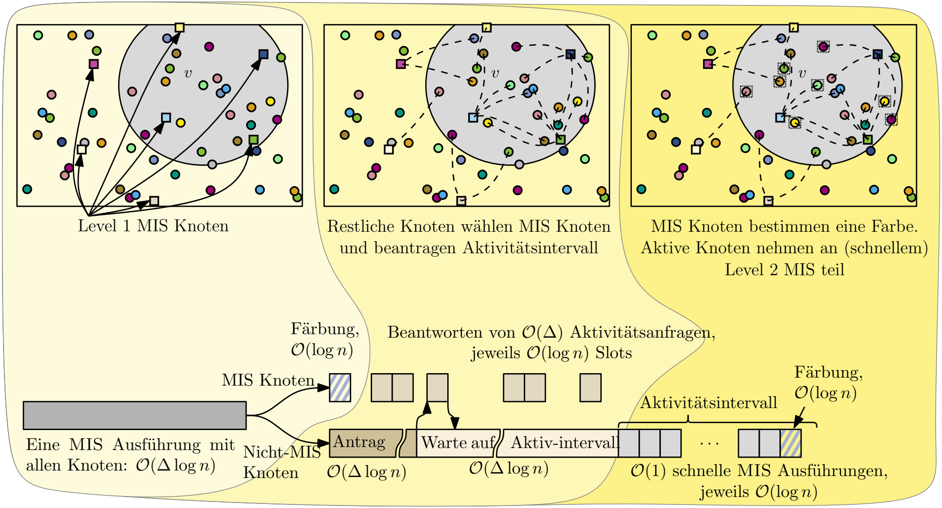
Restliche Knoten wählen MIS Knoten und beantragen Aktivitätsintervall



MIS Knoten bestimmen eine Farbe. Aktive Knoten nehmen an (schnellem) Level 2 MIS teil

Färbung 2: ColorReduction

Idee: 2-schichtiges MIS zur Koordination der aktiven Farbe(n)



Färbung 2: ColorReduction

Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei asynchronem Start

Beweis(skizze):

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 2: ColorReduction

Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei asynchronem Start

Beweis(skizze):

- MIS-Ausführung aller Knoten: $O(\Delta \log n)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 2: ColorReduction

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei asynchronem Start

Beweis(skizze):

- MIS-Ausführung aller Knoten: $O(\Delta \log n)$
- MIS-Knoten: Färbung & jede Antwort: $O(\log n)$ da unabhängig

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 2: ColorReduction

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei asynchronem Start

Beweis(skizze):

- MIS-Ausführung aller Knoten: $O(\Delta \log n)$
- MIS-Knoten: Färbung & jede Antwort: $O(\log n)$ da unabhängig
- Rest: Auswahl und Antrag Aktivitätsintervall: $O(\Delta \log n)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Färbung 2: ColorReduction

Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei asynchronem Start

Beweis(skizze):

- MIS-Ausführung aller Knoten: $O(\Delta \log n)$
- MIS-Knoten: Färbung & jede Antwort: $O(\log n)$ da unabhängig
- Rest: Auswahl und Antrag Aktivitätsintervall: $O(\Delta \log n)$
- Rest: Aktivitätsinterval: $O(\log n)$
  - (Fast) unabhängige Menge $\Rightarrow$ konstante Nachbarschaft
  - Damit: Schnelles MIS in $O(\log n)$
  - Konstante Anzahl MIS $\Rightarrow$ Jeder aus Nachbarschaft war im MIS
  - Färbung auch hier $O(\log n)$

Färbung 2: ColorReduction

Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine $(\Delta + 1)$-Färbung in $O(\Delta \log n)$ Zeitslots bei asynchronem Start

Beweis(skizze):

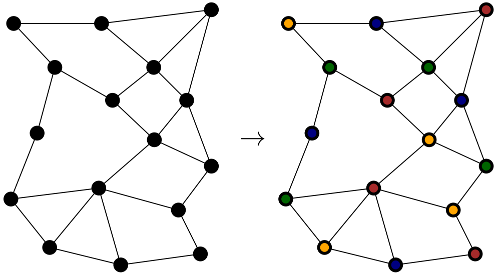
- MIS-Ausführung aller Knoten: $O(\Delta \log n)$
- MIS-Knoten: Färbung & jede Antwort: $O(\log n)$ da unabhängig
- Rest: Auswahl und Antrag Aktivitätsintervall: $O(\Delta \log n)$
- Rest: Aktivitätsinterval: $O(\log n)$
  - (Fast) unabhängige Menge $\Rightarrow$ konstante Nachbarschaft
  - Damit: Schnelles MIS in $O(\log n)$
  - Konstante Anzahl MIS $\Rightarrow$ Jeder aus Nachbarschaft war im MIS
  - Färbung auch hier $O(\log n)$
- Warten auf Aktivitätsintervall: $O(\Delta \log n)$, da maximal $O(\Delta)$ Aktivitätsintervalle

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Zwischenstand: Local Broadcasting Schedule

Ablauf

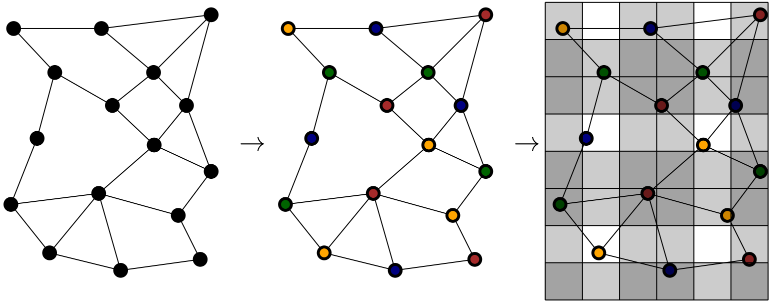
1. Berechnung einer 1-Hop Knotenfärbung
   - 2 Algorithmen: RandColor und ColorReduction



Zwischenstand: Local Broadcasting Schedule

Ablauf

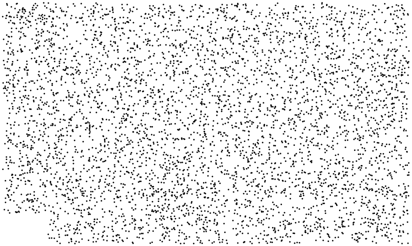
1. Berechnung einer 1-Hop Knotenfärbung
   - 2 Algorithmen: RandColor und ColorReduction
2. Techniken um die valid Färbung auf Distanz-k auszuweiten
   - 3 Techniken: Sendeleistung, Position, Steinerknoten



Local Broadcasting Schedule

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.



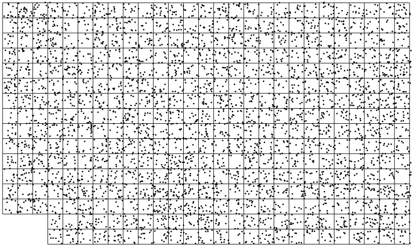
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Schedule

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.

- Knotenposition erlaubt Einteilung in Grid

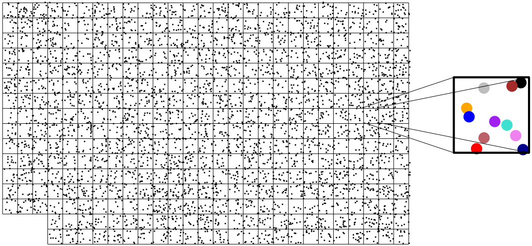


Local Broadcasting Schedule

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.

- Knotenposition erlaubt Einteilung in Grid
- Pro Zelle nur ein Knoten je Farbe

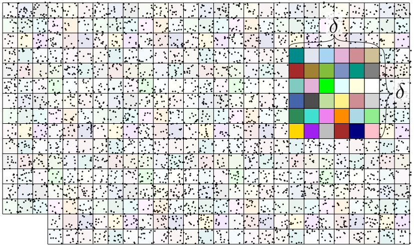


Local Broadcasting Schedule

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.

- Knotenposition erlaubt Einteilung in Grid
- Pro Zelle nur ein Knoten je Farbe
- Basierend auf Knotenposition kann eine weitere Färbung berechnet werden



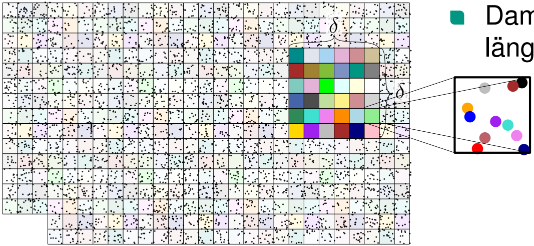
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Schedule

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.

- Knotenposition erlaubt Einteilung in Grid
- Pro Zelle nur ein Knoten je Farbe
- Basierend auf Knotenposition kann eine weitere Färbung berechnet werden



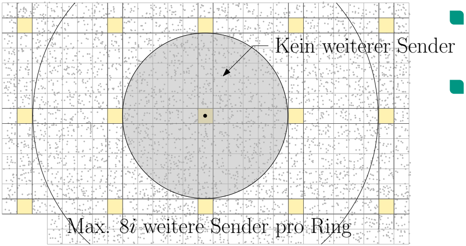
- Damit ergibt sich um $\delta^2 \in O(1)$ längerer Schedule

Local Broadcasting Schedule

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.

- Knotenposition erlaubt Einteilung in Grid
- Pro Zelle nur ein Knoten je Farbe
- Basierend auf Knotenposition kann eine weitere Färbung berechnet werden



- Damit ergibt sich um $\delta^2 \in O(1)$ längerer Schedule
- In diesem Schedule ist jede Übertragung ohne Kollision
  - Keine Knoten in der Nähe senden
  - Die Interferenz der gleichzeitig sendenden Knoten ist *klein genug*

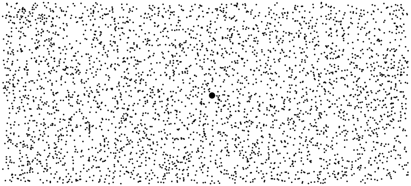
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Schedule

Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.



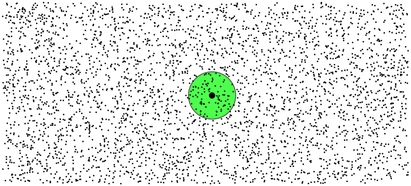
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Schedule

Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

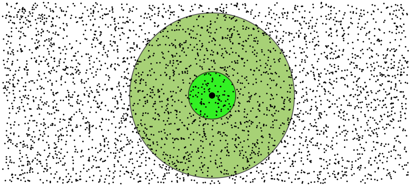


Local Broadcasting Schedule

Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.



- Durch Erhöhung der Sendereichweite ist Berechnung der Distanz-k Färbung direkt möglich

Local Broadcasting Schedule

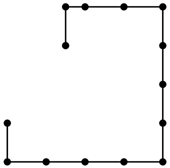
Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch mittels zusätzlichem Einfügen von $O(k)$ Steinerknoten pro Knoten und einer $k - Hop$ Knotenfärbung erreicht werden.



Local Broadcasting Schedule

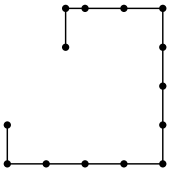
Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch mittels zusätzlichem Einfügen von $O(k)$ Steinerknoten pro Knoten und einer $k - Hop$ Knotenfärbung erreicht werden.



- Problem: k-Hop Knotenfärbung erreicht nicht alle Knoten in Distanz $k \cdot R$

Local Broadcasting Schedule

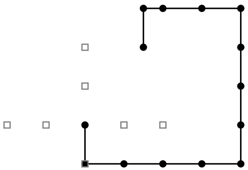
Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch mittels zusätzlichem Einfügen von $O(k)$ Steinerknoten pro Knoten und einer $k - Hop$ Knotenfärbung erreicht werden.



- Problem: k-Hop Knotenfärbung erreicht nicht alle Knoten in Distanz $k \cdot R$
- Füge $O(nk)$ Steinerknoten hinzu

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Local Broadcasting Schedule

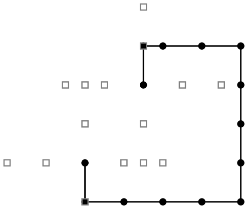
Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch mittels zusätzlichem Einfügen von $O(k)$ Steinerknoten pro Knoten und einer $k - Hop$ Knotenfärbung erreicht werden.



- Problem: k-Hop Knotenfärbung erreicht nicht alle Knoten in Distanz $k \cdot R$
- Füge $O(nk)$ Steinerknoten hinzu

Local Broadcasting Schedule

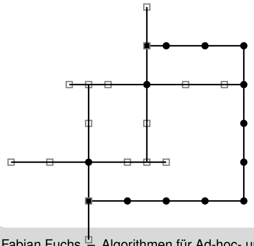
Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch mittels zusätzlichem Einfügen von $O(k)$ Steinerknoten pro Knoten und einer $k - Hop$ Knotenfärbung erreicht werden.



(Eigentlich: Steinerknoten für jeden Knoten)

- Problem: k-Hop Knotenfärbung erreicht nicht alle Knoten in Distanz $k \cdot R$
- Füge $O(nk)$ Steinerknoten hinzu
- Jetzt erreicht k-Hop Knotenfärbung alle nötigen Knoten

Zum Mitnehmen

- Kommunikation im SINR Modell
  - Standard Local Broadcasting & Varianten
- Koordinierter Medienzugriff
  - Local Broadcasting Schedule bzw. TDMA-Schedule
  - Knotenfärbung: RandColor und ColorReduction im SINR Modell
  - Kombiniert mit Positionsinformation, Sendeleistungs-tuning oder zusätzlichen Steinerknoten: kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule

Zum Mitnehmen

Karlsruher Institut für Technologie

- Kommunikation im SINR Modell
  - Standard Local Broadcasting & Varianten
- Koordinierter Medienzugriff
  - Local Broadcasting Schedule bzw. TDMA-Schedule
  - Knotenfärbung: RandColor und ColorReduction im SINR Modell
  - Kombiniert mit Positionsinformation, Sendeleistungs-tuning oder zusätzlichen Steinerknoten: kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule

Ankündigung

Nächster Termin: Donnerstag, 17.12, 15:45 Uhr, vermutlich in Raum 305 (Poolraum unseres Lehrstuhls)

Literatur

1. O. Goussevskaia, T. Moscibroda, R. Wattenhofer: *Local broadcasting in the physical interference model*. In: *DIALM-POMC'08*

2. C. Avin, Y. Emek, E. Kantor, Z. Lotker, D. Peleg, L. Roditty : *SINR Diagrams: Towards Algorithmically Usable SINR Models of Wireless Networks*, In: *PODC'09*

3. F. Fuchs, R. Prutkin: *Simple Distributed* $\Delta + 1$ *Coloring in the SINR Model*. In: *SIROCCO'15*

4. F. Fuchs, D. Wagner: *On Local Broadcasting Schedules and CONGEST Algorithms in the SINR Modell*. In: *ALGOSENSORS'13*

5. L. Barenboim: *Nearly Optimal Local Broadcasting in the SINR Model with Feedback*. In: *SIROCCO'15*

6. B. Derbel, E. Talbi: *Distributed Node Coloring in the SINR Model*. In: *ICDCS'10*