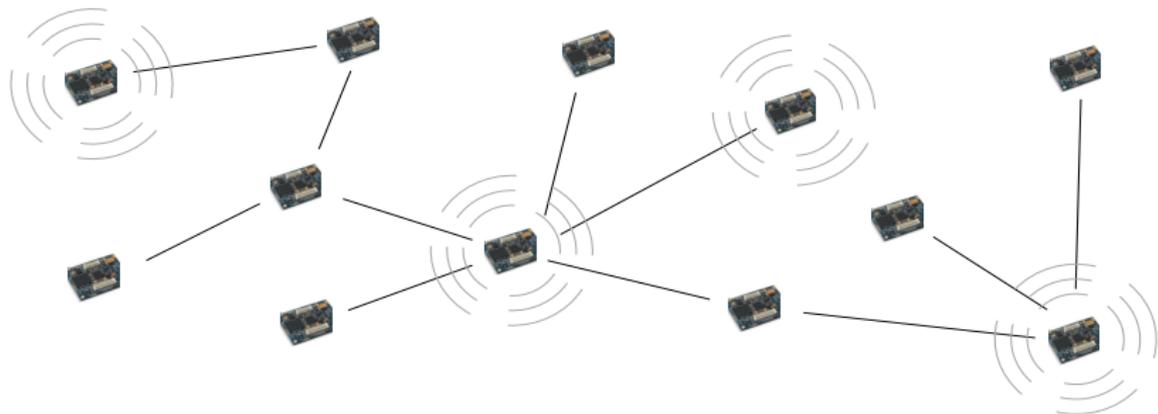


# Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

## VL 11 – Kommunikation und Färbungen im SINR Modell

Fabian Fuchs | 17. Dez. 2015 (Version 1)

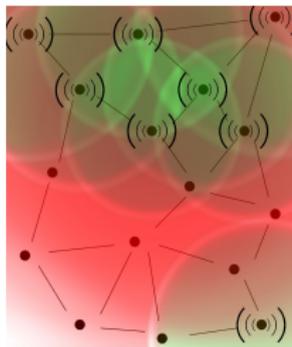
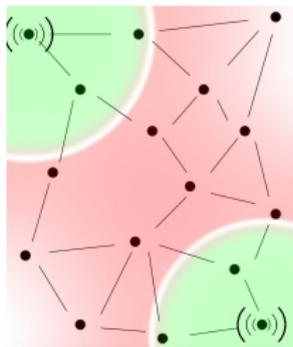
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)



Interferenzmodell bisher:

- kein Knoten kann gleichzeitig an zwei Übertragungen teilnehmen
- benachbarte Knoten können nicht gleichzeitig übertragen/empfangen

Realität für Drahtloskommunikation ist komplexer!



- Globale Interferenz kann Übertragungen verhindern

## SINR-Modell, allgemein

Im *Signal-to-Interference-plus-Noise-Ratio Modell* kann ein Empfänger  $r$  eine Nachricht eines Senders  $s$  dekodieren, wenn

$$\frac{P / \text{dist}(s, r)^\alpha}{\sum_{s' \neq s} P / \text{dist}(s', r)^\alpha + N} \geq \beta$$

- $P$ : Signalstärke, mit der  $s$  sendet
- $\text{dist}(s, r)^\alpha$ : *geometrischer* Leistungsabfall zwischen  $s$  und  $r$

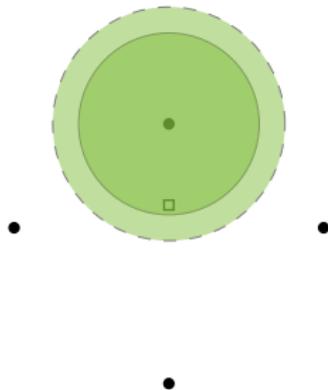
SINR-Modell ist sehr viel realistischer, aber gleichzeitig viel komplexer zu analysieren.

## Theoretische Sendereichweite

Die maximale Sendereichweite beträgt  $\sqrt[3]{\frac{P}{\beta N}}$ .

## Definition: Sendereichweite

Die zu erreichende Sendereichweite R beträgt  $\sqrt[3]{\frac{P}{\delta \beta N}}$  mit  $\delta > 1$ .



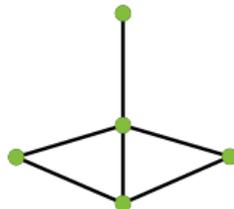
- Wir fordern: Knoten innerhalb der Sendereichweite sollen erreicht werden
- Dadurch lassen sich Nachbarschaften ableiten
- Englisch: Transmission range (maximale) und broadcasting range (zu erreichende)

Grundlegende Fragestellung: Wann soll welcher Knoten senden?

## Local Broadcasting Problem

Jeder Knoten im Netzwerk sendet eine Nachricht an seine Nachbarn

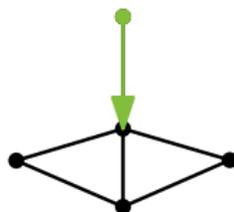
- Knoten innerhalb der Sendereichweite müssen erreicht werden
- Im Beispiel: Nacheinander ( $\Rightarrow \Omega(n)$  Zeitslots)
- Ziel: Möglichst viele Knoten gleichzeitig



Local Broadcasting kann in  $O(\Delta \log n)$  Zeit erreicht werden!

## Local Broadcasting

- 1 Jeder Knoten kennt  $n$  und  $\Delta$
- 2 Sende in jedem Zeitslot mit Wahrscheinlichkeit  $1/O(\Delta)$



## Satz

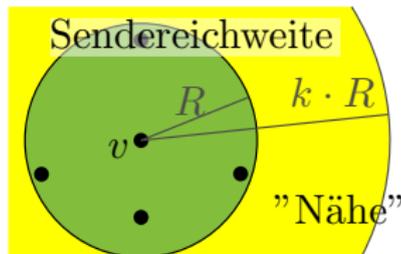
Nach  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit Erfolg.

## Satz

Nach  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots hatte jeder Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

### Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
  - Jeder Knoten sendet mit WS'  $1/(c\Delta)$
  - Es sind  $O(k^2)$  unabhängige Knoten in der "Nähe"
  - Damit insgesamt  $O(k^2\Delta)$  Knoten in der "Nähe"
  - $\Rightarrow$  Die WS' das einer davon sendet ist  $\approx k^2/c$ , also konstant (für  $c$  groß genug)

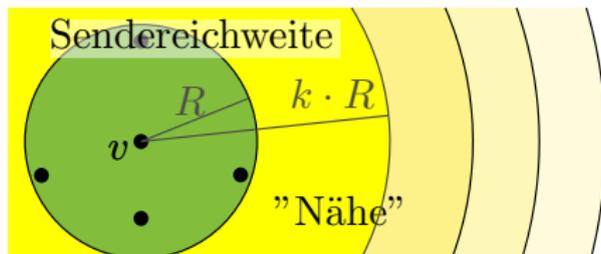


## Satz

Nach  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots hatte jeder Knoten mit *hoher* Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

### Beweisskizze:

- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit  $1/c'$  "klein"
  - Schritt 1 gilt überall  $\Rightarrow$  Erwartete Interferenz pro Fläche abschätzbar
  - Lege Ringe um  $v$ : Fläche steigt quadratisch mit Entfernung, die Auswirkung der Interferenz sinkt quadratisch
  - Die erwartete Interferenz ist mit konstanter WS'  $\frac{1}{c'}$  nicht zu hoch



## Satz

Nach  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots hatte jeder Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

### Beweisskizze:

- Schritt 1: Lokaler Erfolg - Mit konstanter Wahrscheinlichkeit sendet kein Knoten in der "Nähe"
- Schritt 2: Globaler Erfolg - Interferenz von außerhalb ist mit konstanter Wahrscheinlichkeit  $1/c'$  "klein"
- Insgesamt: WS' für Erfolg pro Zeitslot:  $\approx 1/(c''\Delta)$ 
  - $v$  sendet:  $1/(c\Delta)$
  - Lokaler Erfolg:  $\approx k^2/c$
  - Globaler Erfolg:  $1/c'$
- Je  $O(\Delta)$  Zeitslots: Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit
- $O(\Delta \log n)$  Zeitslots: Erfolg mit hoher Wahrscheinlichkeit

## Local Broadcasting Varianten (ohne Beweis)

- 1 Nach  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots hatte jeder Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.
- 2 Nach  $O(\Delta)$  Zeitslots hatte jeder Knoten mit konstanter Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.
- 3 Eine unabhängige Menge an Knoten hat (mittels erhöhter Sendewahrscheinlichkeit) nach  $O(\log n)$  Zeitslots mit hoher Wahrscheinlichkeit (WS') Erfolg.

# Erinnerung: TDMA - koordinierter Medienzugriff

- Übertragungen bekommen Slots in Zeitraster zugewiesen
  - *Time Division Multiple Access (TDMA)*
- Übertragungen sind *gleichzeitig* möglich, wenn sie weit genug auseinander liegen

## Bisher:

- Kantenfärbung kann über Knotenfärbung berechnet werden
- Kantenfärbung induziert TDMA-Schedule für Übertragungen

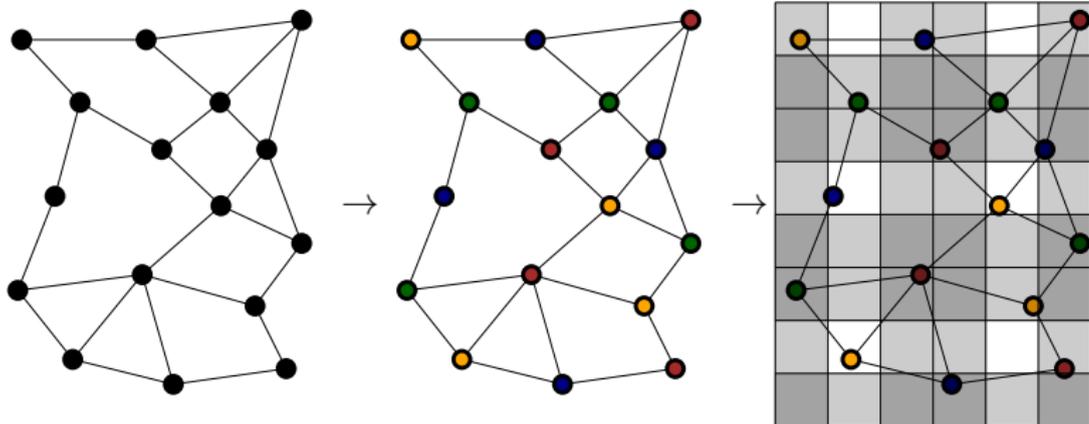
## Jetzt:

- Knotenfärbung soll TDMA-Schedule für Local Broadcasts berechnen
- Im geometrischen SINR Modell ist k-Distanz Färbung notwendig (k-Hop Färbung nicht ausreichend)

# Berechnung Local Broadcasting Schedule

## Ablauf

- 1 Berechnung einer 1-Hop Knotenfärbung
  - 2 Algorithmen: RandColor und ColorReduction
- 2 Techniken um die valid Färbung auf Distanz- $k$  auszuweiten
  - 3 Techniken: Sendeleistung, Position, Steinerknoten

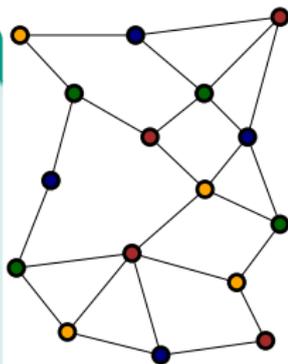


## Definition

Eine Knotenfärbung eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  so, dass für jede Kante die beiden Endpunkte unterschiedliche Farben haben, also

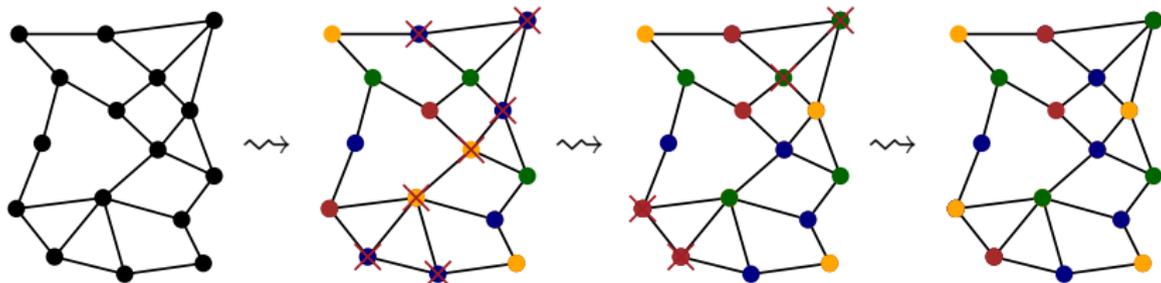
$$\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

- Eine Färbung  $c$  hat die Größe  $|c| = \max_{v \in V} c(v)$



## RandColor Algorithmus

- 1 Wähle zufällig eine Farbe aus  $\{1, \dots, 4\Delta\}$
- 2 In jeder Runde
  - Wird ein Konflikt festgestellt, wähle neue zufällige Farbe aus  $\{1, \dots, 4\Delta\}$



## Satz

Ohne Interferenz: RandColor berechnet in  $O(\log n)$  eine  $4\Delta$ -Knotenfärbung

## Satz

RandColor berechnet eine  $4\Delta$ -Knotenfärbung in  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots im SINR Modell

### Beweisidee:

- Wird Local Broadcasting für die Runden genutzt, folgt direkt eine Laufzeit von  $O(\Delta \log^2 n)$  (klar?)
- Wir nutzen Local Broadcasting Variante 2 für jede Runde
  - Local Broadcasting (V2): Local Broadcast in  $O(\Delta)$  Zeit mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit
- Wahrscheinlichkeiten im probabilistischen Algorithmus und der Kommunikation können gemeinsam betrachtet werden
- Erneut: Konstante “Erfolgswahrscheinlichkeit” pro Runde (je  $O(\Delta)$  Slots)
- Insgesamt:  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots

## (Triviale) ColorReduction

- 1 Beginne mit  $d = O(\Delta)$  Farben
- 2 In Runde  $i$ , die Knoten mit Farbe  $i$  sind *aktiv*
  - wählen eine neue Farbe aus  $\{0, 1, \dots, \Delta\}$
- 3 Valide Färbung nach  $d = O(\Delta)$  Runden

## Satz

Der triviale ColorReduction Algorithm berechnet eine  $(\Delta + 1)$ -Färbung in  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots bei synchronem Start

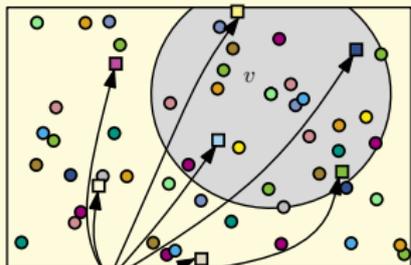
Beweis:

- Aktive Knoten sind unabhängig  $\Rightarrow O(\log n)$  je Runde

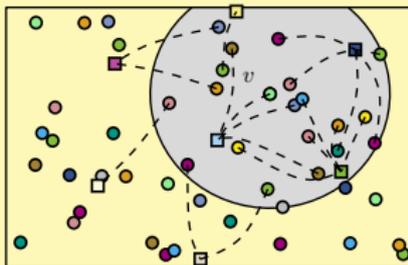
Geht das auch ohne synchronen Start?

# Färbung 2: ColorReduction

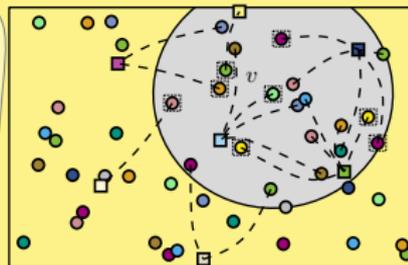
Idee: 2-schichtiges MIS zur Koordination der aktiven Farbe(n)



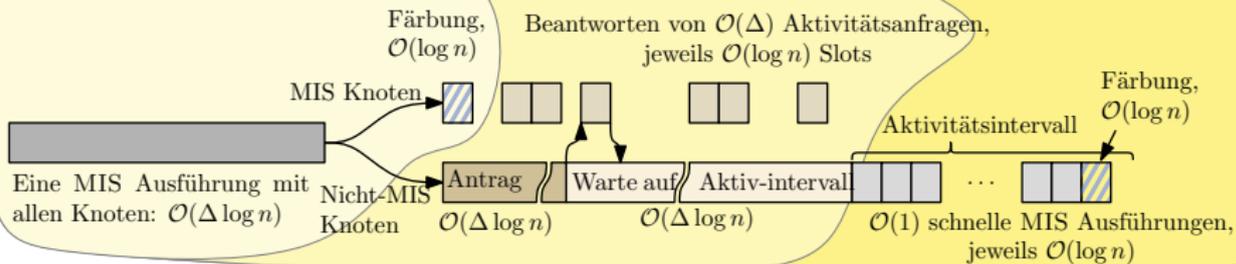
Level 1 MIS Knoten



Restliche Knoten wählen MIS Knoten und beantragen Aktivitätsintervall



MIS Knoten bestimmen eine Farbe. Aktive Knoten nehmen an (schnellem) Level 2 MIS teil



## Satz

Der ColorReduction Algorithm berechnet eine  $(\Delta + 1)$ -Färbung in  $O(\Delta \log n)$  Zeitslots bei asynchronem Start

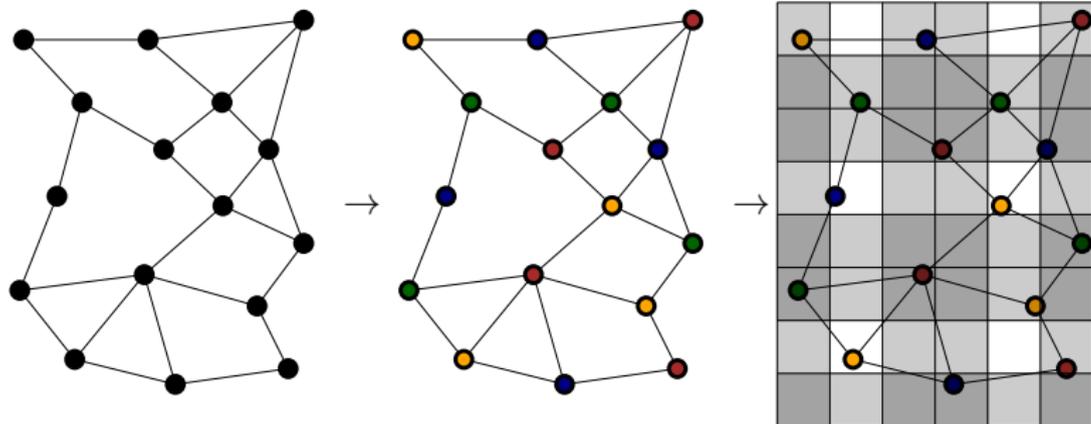
### Beweis(skizze):

- MIS-Ausführung aller Knoten:  $O(\Delta \log n)$
- MIS-Knoten: Färbung & jede Antwort:  $O(\log n)$  da unabhängig
- Rest: Auswahl und Antrag Aktivitätsintervall:  $O(\Delta \log n)$

# Zwischenstand: Local Broadcasting Schedule

## Ablauf

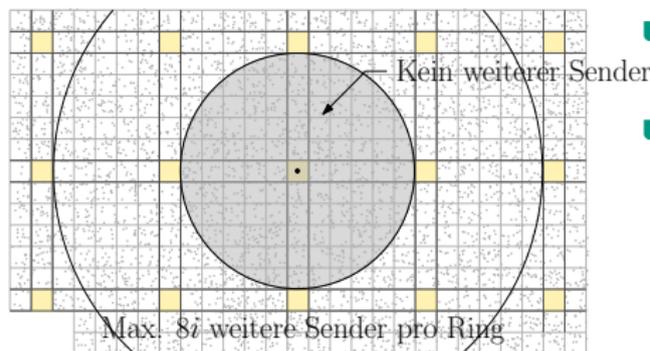
- 1 Berechnung einer 1-Hop Knotenfärbung
  - 2 Algorithmen: RandColor und ColorReduction
- 2 Techniken um die valid Färbung auf Distanz- $k$  auszuweiten
  - 3 Techniken: Sendeleistung, Position, Steinerknoten



## Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann mittels Knotenfärbung und Knotenpositionen berechnet werden.

- Knotenposition erlaubt Einteilung in Grid
- Pro Zelle nur ein Knoten je Farbe
- Basierend auf Knotenposition kann eine weitere Färbung berechnet werden

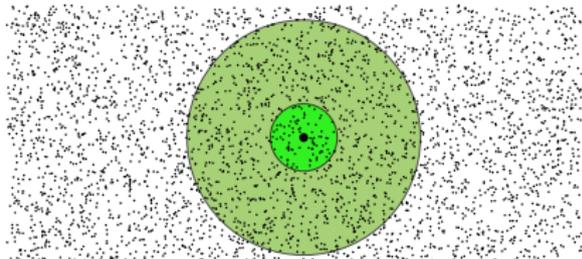


- Damit ergibt sich um  $\delta^2 \in O(1)$  längerer Schedule
- In diesem Schedule ist jede Übertragung ohne Kollision
  - Keine Knoten in der Nähe senden
  - Die Interferenz der gleichzeitig sendenden Knoten ist *klein genug*

Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

## Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.



- Durch Erhöhung der Sendereichweite ist Berechnung der Distanz-k Färbung direkt möglich

# Local Broadcasting Schedule

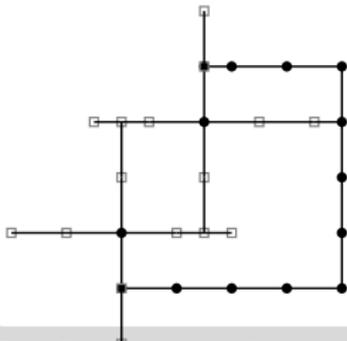
Weitere Techniken mit ähnlicher Idee:

## Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch Erhöhung der Sendeleistung während der Knotenfärbung berechnet werden.

## Satz

Ein kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule kann durch mittels zusätzlichem Einfügen von  $O(k)$  Steinerknoten pro Knoten und einer  $k - \text{Hop}$  Knotenfärbung erreicht werden.



(Eigentlich:  
Steinerknoten  
für jeden  
Knoten)

- Problem:  $k$ -Hop Knotenfärbung erreicht nicht alle Knoten in Distanz  $k \cdot R$
- Füge  $O(nk)$  Steinerknoten hinzu
- Jetzt erreicht  $k$ -Hop Knotenfärbung alle nötigen Knoten

- Kommunikation im SINR Modell
  - Standard Local Broadcasting & Varianten
- Koordinierter Medienzugriff
  - Local Broadcasting Schedule bzw. TDMA-Schedule
  - Knotenfärbung: RandColor und ColorReduction im SINR Modell
  - Kombiniert mit Positionsinformation, Sendeleistung-tuning oder zusätzlichen Steinerknoten: kollisionsfreier Local Broadcasting Schedule

## Ankündigung

Nächster Termin: Donnerstag, 17.12, 15:45 Uhr, vermutlich in  
Raum 305 (Poolraum unseres Lehrstuhls)

- 1 O. Goussevskaia, T. Moscibroda, R. Wattenhofer: *Local broadcasting in the physical interference model*. In: *DIALM-POMC'08*
- 2 C. Avin, Y. Emek, E. Kantor, Z. Lotker, D. Peleg, L. Roditty : *SINR Diagrams: Towards Algorithmically Usable SINR Models of Wireless Networks*, In: *PODC'09*
- 3 F. Fuchs, R. Prutkin: *Simple Distributed  $\Delta + 1$  Coloring in the SINR Model*. In: *SIROCCO'15*
- 4 F. Fuchs, D. Wagner: *On Local Broadcasting Schedules and CONGEST Algorithms in the SINR Modell*. In: *ALGOSENSORS'13*
- 5 L. Barenboim: *Nearly Optimal Local Broadcasting in the SINR Model with Feedback*. In: *SIROCCO'15*
- 6 B. Derbel, E. Talbi: *Distributed Node Coloring in the SINR Model*. In: *ICDCS'10*