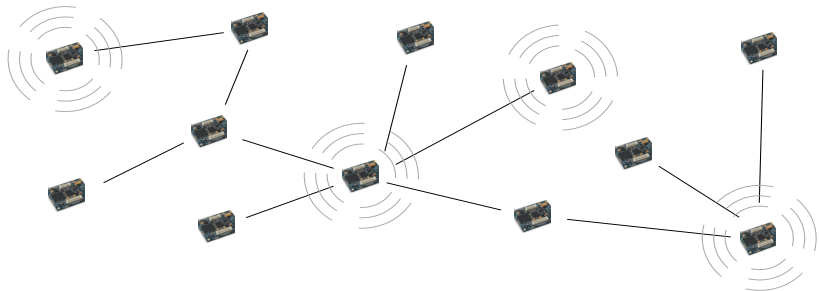


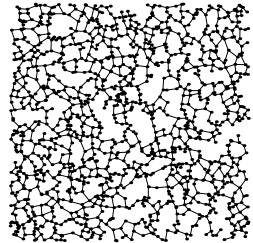
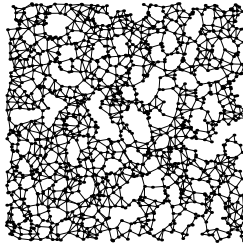
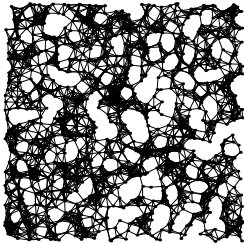
# Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

## VL 04 – Topologiekontrolle

Fabian Fuchs | 04. Nov. 2015 (Version 2)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)





Was kann man gewinnen, indem man Kommunikation einschränkt?

## Topologiekontrolle

Topologiekontrolle bezeichnet alle Techniken, die die Menge der aktiven Links zwischen Knoten verringern, um Eigenschaften des Kommunikationsnetzes herzustellen, ohne andere Eigenschaften zu zerstören.

Zwei grundsätzliche Ansätze

- Verringern der Sendeleistung der Knoten
- Beschränkung auf ausgewählten Subgraphen

Ziel: Genug, aber nicht zu viel abschalten!

- In der Regel Balance zwischen mehreren Eigenschaften.

## Topologiekontrolle

Topologiekontrolle bezeichnet alle Techniken, die die Menge der aktiven Links zwischen Knoten verringern, um Eigenschaften des Kommunikationsnetzes herzustellen, ohne andere Eigenschaften zu zerstören.

Zwei grundsätzliche Ansätze

- Verringern der Sendeleistung der Knoten
- Beschränkung auf ausgewählten Subgraphen

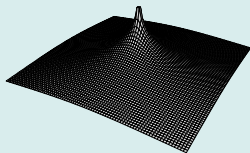
Ziel: Genug, aber nicht zu viel abschalten!

- In der Regel Balance zwischen mehreren Eigenschaften.

- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung
  
- Lokale Topologiekontrolle und Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokale Topologiekontrolle
  
- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen...

## Erinnerung

Sendet ein Knoten mit Sendeleistung  $P$ , empfängt ein Knoten in Entfernung  $d$  das Signal mit einer Stärke  $P/d^\alpha$  ( $2 < \alpha \leq 6$ ). Ein Knoten kann ein ungestörtes Signal dekodieren, wenn eine bestimmte Stärke überschritten wird.

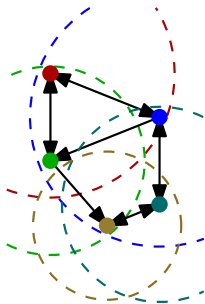


- Geeignet normiert heißt das: Knoten  $u$  erreicht Knoten  $v$  genau dann, wenn  $P_u \geq d(u, v)^\alpha$ .

## Definition

Zu einer Menge von Knoten  $V$  in der Ebene ist eine *Reichweitenzuweisung* eine Abbildung  $RA : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Sie induziert einen gerichteten Kommunikationsgraphen  $G_{RA} = (V, E)$  mit  $(u, v) \in E \Leftrightarrow d(u, v) \leq RA(u)$

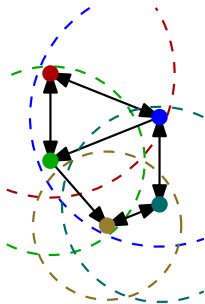
- entspricht Sendeleistungszuordnung  $PA(v) = RA(v)^\alpha$
- eine Reichweitenzuordnung heißt *uniform*, wenn allen Knoten dieselbe Reichweite zugeordnet wird.
- Kommunikationsgraph dann symmetrisch!



## Definition

Zu einer Menge von Knoten  $V$  in der Ebene ist eine *Reichweitenzuweisung* eine Abbildung  $RA : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Sie induziert einen gerichteten Kommunikationsgraphen  $G_{RA} = (V, E)$  mit  $(u, v) \in E \Leftrightarrow d(u, v) \leq RA(u)$

- entspricht Sendeleistungszuordnung  $PA(v) = RA(v)^\alpha$
- eine Reichweitenzuordnung heißt *uniform*, wenn allen Knoten dieselbe Reichweite zugeordnet wird.
- Kommunikationsgraph dann symmetrisch!

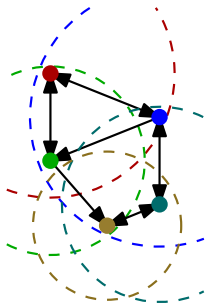




## Definition

Zu einer Menge von Knoten  $V$  in der Ebene ist eine *Reichweitenzuweisung* eine Abbildung  $RA : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Sie induziert einen gerichteten Kommunikationsgraphen  $G_{RA} = (V, E)$  mit  $(u, v) \in E \Leftrightarrow d(u, v) \leq RA(u)$

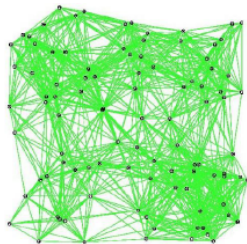
- entspricht Sendeleistungszuordnung  $PA(v) = RA(v)^\alpha$
- eine Reichweitenzuordnung heißt *uniform*, wenn allen Knoten dieselbe Reichweite zugeordnet wird.
- Kommunikationsgraph dann symmetrisch!



## Definition

Der Maxpower-Graph ist der Graph der sich ergibt, wenn man jeden Knoten mit allen Knoten verbindet, mit denen er kommunizieren kann, wenn beide mit maximaler Sendeleistung  $P_{\max}$  (d.h. maximaler Reichweite) senden.

- Maxpower-Graph ist Unit-Disk-Graph
- Topologiekontrolle macht vor allem dann Sinn, wenn man davon ausgeht, dass der Maxpower-Graph „zu dicht“ ist.



Wie stark kann man die Reichweite der Knoten verringern, ohne dass der Kommunikationsgraph unzusammenhängend wird?

## Minimale uniforme Sendeleistung für Zusammenhang

**Gegeben:** Zusammenhängender Maxpower-Graph  $G = (V, E)$ .

**Gesucht:** Minimale uniforme Reichweitenzuordnung  $RA$ , so dass  $G_{RA}$  zusammenhängend ist.

## Minimaler Spannbaum

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Gewichtsfunktion. Ein Minimaler Spannbaum (MST) ist ein Spannbaum  $T \subseteq E$ , der  $\sum_T w(E)$  minimiert.

## Lemma

Die minimale uniforme Reichweite für Zusammenhang entspricht der maximalen Länge einer Kante in einem minimalen Spannbaum  $T$  mit euklidischem Abstand als Gewichtsfunktion.

- Gibt es einen zusammenhängenden Graphen nur mit kürzeren Kanten, dann gibt es auch einen Spannbaum  $T'$  nur mit kürzeren Kanten. Entferne die längste Kante aus  $T$  und füge die Kante aus  $T'$  hinzu, die die beiden Teilbäume verbindet. Das verringert das Gesamtgewicht in  $T$  im Widerspruch zu „ $T$  ist MST“.

## Minimaler Spannbaum

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph und  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Gewichtsfunktion. Ein Minimaler Spannbaum (MST) ist ein Spannbaum  $T \subseteq E$ , der  $\sum_T w(E)$  minimiert.

## Lemma

Die minimale uniforme Reichweite für Zusammenhang entspricht der maximalen Länge einer Kante in einem minimalen Spannbaum  $T$  mit euklidischem Abstand als Gewichtsfunktion.

- Gibt es einen zusammenhängenden Graphen nur mit kürzeren Kanten, dann gibt es auch einen Spannbaum  $T'$  nur mit kürzeren Kanten. Entferne die längste Kante aus  $T$  und füge die Kante aus  $T'$  hinzu, die die beiden Teilbäume verbindet. Das verringert das Gesamtgewicht in  $T$  im Widerspruch zu „ $T$  ist MST“.

Bestimmung minimale uniforme Sendeleistung für Zusammenhang?

- Berechne MST, propagiere maximale Kantenlänge

## Satz (vorerst ohne Beweis...)

Es gibt einen verteilten Algorithmus zur Bestimmung eines Minimalen Spannbaums mit Laufzeit in  $O(n)$  und Nachrichtenkomplexität  $O(n \log n + m)$ .

- MSTs sind extrem wertvoll, im Hinterkopf behalten!

Das löst das Reichweitenzuordnungsproblem für uniforme Reichweiten. Was ist, wenn wir unterschiedliche Sendeleistungen zulassen und den Durchschnitt minimieren wollen?

Bestimmung minimale uniforme Sendeleistung für Zusammenhang?

- Berechne MST, propagiere maximale Kantenlänge

## Satz (vorerst ohne Beweis...)

Es gibt einen verteilten Algorithmus zur Bestimmung eines Minimalen Spannbauums mit Laufzeit in  $O(n)$  und Nachrichtenkomplexität  $O(n \log n + m)$ .

- MSTs sind extrem wertvoll, im Hinterkopf behalten!

Das löst das Reichweitenzuordnungsproblem für uniforme Reichweiten. Was ist, wenn wir unterschiedliche Sendeleistungen zulassen und den Durchschnitt minimieren wollen?

## Problem: Energieoptimale Reichweitenzuordnung

**Gegeben:** Zusammenhängender Maxpower-Graph  $G = (V, E)$

**Gesucht:** (Nicht-uniforme) Reichweitenzuordnung RA mit minimaler Gesamtleistung  $\sum_{v \in V} RA(v)^\alpha$ , bei der  $G_{RA}$  stark zusammenhängend ist.

- minimiert auch durchschnittliche Sendeleistung
- muss nicht unbedingt symmetrisch sein (nicht-uniform!)



Die schlechte zuerst...

## Satz (ohne Beweis)

Die Bestimmung einer energieoptimalen Reichweitenzuordnung ist NP-schwer.

...und jetzt die gute:

## Satz

Ist  $T$  ein minimaler Spannbaum in  $G$  für  $w(\{u, v\}) = d(u, v)^\alpha$ , dann approximiert

$$RA_T(u) := \max_{\{u, v\} \in T} d(u, v)$$

eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

Die schlechte zuerst...

## Satz (ohne Beweis)

Die Bestimmung einer energieoptimalen Reichweitzuordnung ist NP-schwer.

...und jetzt die gute:

## Satz

Ist  $T$  ein minimaler Spannbaum in  $G$  für  $w(\{u, v\}) = d(u, v)^\alpha$ , dann approximiert

$$RA_T(u) := \max_{\{u, v\} \in T} d(u, v)$$

eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

## Lemma

Sei  $T$  ein MST und  $\overline{RA}$  eine optimale Lösung für die energieoptimale Reichweitenzuordnung. Es gilt

$$\sum_{v \in V} \overline{RA}(v)^\alpha > \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha .$$

- Gewicht eines MSTs ist untere Schranke für optimale Lösung
- Beweis:
  - Betrachte gerichteten Graphen  $G_{\overline{RA}}$
  - wähle bel. Knoten  $u$  und zu  $u$  gerichteten Baum  $T_{\overline{RA}}$  in  $G_{\overline{RA}}$ .
  - Für jede Kante in  $(u,v) \in T_{\overline{RA}}$  ist  $\overline{RA}(u) \geq d(u,v)$ .
  - $\sum_{v \in V} \overline{RA}(v)^\alpha > \sum_{(u,v) \in T_{\overline{RA}}} d(u,v)^\alpha \geq \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha$
  - (ungerichtet ist  $T_{\overline{RA}}$  ein Spannbaum)

## Lemma

Sei  $T$  ein (beliebiger) Baum in  $G$ . Dann ist

$$\sum_{v \in V} \text{RA}_T(v)^\alpha \leq 2 \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha$$

- Erinnerung:  $\text{RA}_T(u) = \max_{\{u,v\} \in T} d(u,v)$
- Beweis:
  - für jedes  $v \in V$  ist

$$\begin{aligned} \text{RA}_T(v)^\alpha &= \left( \max_{\{u,v\} \in T} d(u,v) \right)^\alpha \\ &= \max_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha \leq \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \text{RA}_T(v)^\alpha \leq \sum_{v \in V, \{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha = 2 \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha$$

## Satz

Ist  $T$  ein minimaler Spannbaum in  $G$  für  $w(\{u, v\}) = d(u, v)^\alpha$ , dann approximiert

$$RA_T(u) := \max_{\{u, v\} \in T} d(u, v)$$

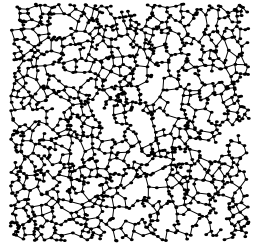
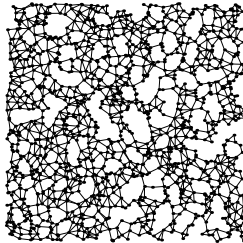
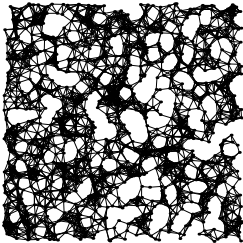
eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

- Aus Teil I:  $\sum_{v \in V} \overline{RA}(v)^\alpha > \sum_{\{u, v\} \in T} d(u, v)^\alpha$
- Aus Teil II:  $\sum_{v \in V} RA_T(u)^\alpha \leq 2 \sum_{\{u, v\} \in T} d(u, v)^\alpha$

⇒

$$\sum_{v \in V} RA_T(u)^\alpha < 2 \sum_{v \in V} \overline{RA}(v)^\alpha$$

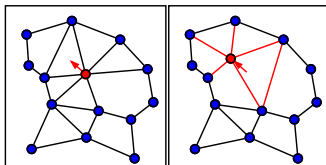
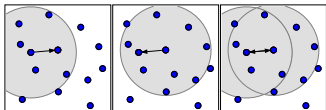
- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung
- Lokale Topologiekontrolle und Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokale Topologiekontrolle
- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen...



## Topologiekontrolle durch Beschränkung auf Kommunikationsteilgraphen $G'$

Gegeben einen Maxpower-Graph, was spricht dafür bestimmte Kanten zu ignorieren? Was spricht dagegen?

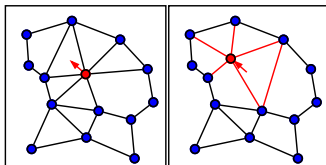
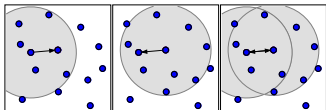
# „Neutrale Anforderungen“



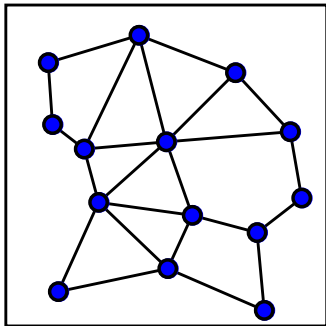
- Symmetrie
  - Voraussetzung für viele Protokolle
  - Einfach herzustellen?
- Lokale Definition
  - Verteilte Berechnung
  - schnelle Anpassung bei Mobilität



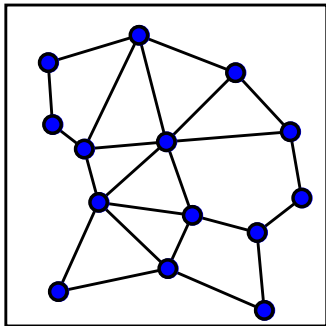
# „Neutrale Anforderungen“



- Symmetrie
  - Voraussetzung für viele Protokolle
  - Einfach herzustellen?
- Lokale Definition
  - Verteilte Berechnung
  - schnelle Anpassung bei Mobilität



- Planarität
  - Vereinfacht Routing
- Geringer Knotengrad
  - Senkt Overhead
  - durchschnittlich oder im Maximum



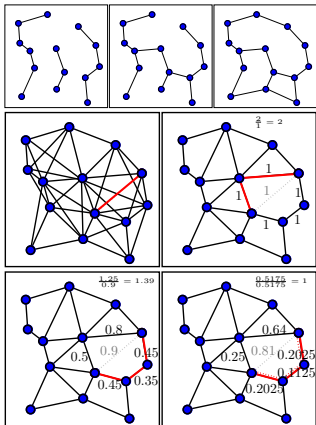
- Planarität
  - Vereinfacht Routing
- Geringer Knotengrad
  - Senkt Overhead
  - durchschnittlich oder im Maximum

- Erhalt von Zusammenhang
- Wege können sich verlängern

## Definition

Der Spannfaktor eines Teilgraphen  $G'$  ist maximale Verhältnis der Längen der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten  $a, b$  in  $G'$  und  $G$ .

- Länge eines Pfades  $P$  dabei
  - Anzahl der Kanten  $\sum_P 1$
  - Euklidische Länge  $\sum_P d(u, v)$
  - Kosten (Energie)  $\sum_P d(u, v)^\alpha$
- Nachbarn in  $G$  zu betrachten reicht

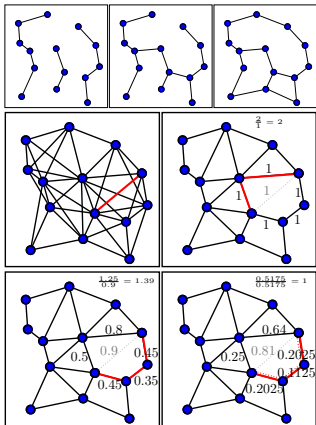


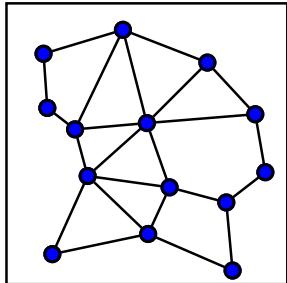
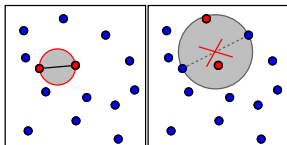
- Erhalt von Zusammenhang
- Wege können sich verlängern

## Definition

Der Spannfaktor eines Teilgraphen  $G'$  ist maximale Verhältnis der Längen der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten  $a, b$  in  $G'$  und  $G$ .

- Länge eines Pfades  $P$  dabei
  - Anzahl der Kanten  $\sum_P 1$
  - Euklidische Länge  $\sum_P d(u, v)$
  - Kosten (Energie)  $\sum_P d(u, v)^\alpha$
- Nachbarn in  $G$  zu betrachten reicht





## Gabriel Graph

Eine Kante ist im GG gdw. der Umkreis der Kante keine weiteren Knoten enthält.

GG von UDG:

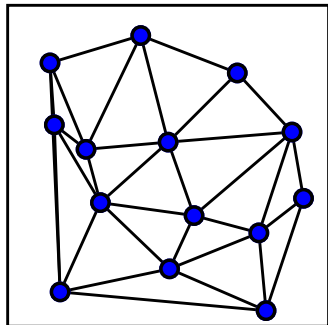
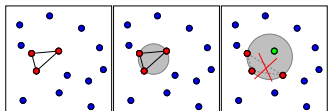
- einfach lokal zu entscheiden
- planar, zshg., Durchschnittsgrad?
- Maximalgrad  $n - 1!$  (Warum?)
- Entfernungsspannfaktor  $O(\sqrt{n})$  (o.B.)
- **Energiespannfaktor 1!** (für  $\alpha \geq 2$ )

## Satz

Schränkt man einen zusammenhängenden UDG  $(V, E)$  auf Kanten des GG ein, bleiben (für  $\alpha \geq 2$ ) alle energieoptimalen Pfade erhalten.

*Beweis:*

- Annahme: Es gibt  $\{u, v\} \in E$ , so dass günstigster Pfad wegfällt
  - wähle solches Paar mit minimalem Abstand
  - günstigster Pfad muss direkte Verbindung gewesen sein
- $\Rightarrow \{u, v\}$  ist weggefallen wegen eines Knotens im Umkreis
- dann war die direkte Verbindung nicht der günstigster Weg ( $\alpha \geq 2!$ )



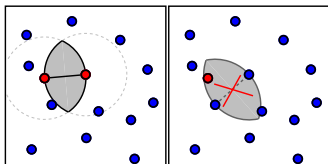
## Delaunay-Triangulierung

Ein Dreieck ist in der DT gdw. der Umkreis keine weiteren Knoten enthält.

*DT* von *UDG*:

- nicht lokal konstruierbar
  - planar und trianguliert (ohne Beweis)
- ⇒ Durchschnittsgrad konstant
- *GG* ist Teilgraph von *DT* (o.B.)
  - Entfernungsspannfaktor  $O(1)$  (o.B.)



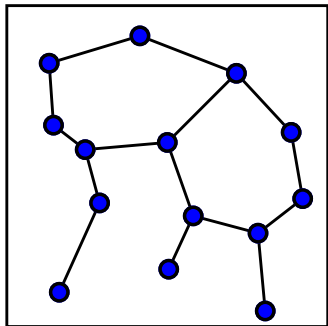


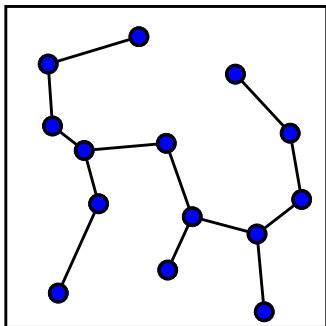
## Relative-Neighborhood-Graph

Eine Kante  $\{u, v\}$  ist im RNG gdw. beide Knoten keinen gemeinsamen, näheren Nachbarn haben.

*RNG* von *UDG*:

- einfach lokal zu entscheiden
- Maximalgrad 6 (mit Tie-Breaking)
- Entfernungs- und Energiespannfaktor  $n - 1$
- *RNG* ist Teilgraph von *GG*

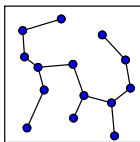




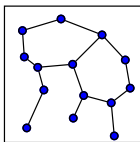
## ■ EMST

- MST mit euklidischen Abständen
- zusammenhängend
- Teilgraph des *RNG*:  
Kanten, die nicht im *RNG* sind, sind auch nicht im *MST*

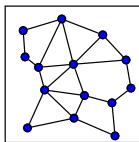
# Geometrische Graphen, Inklusionen



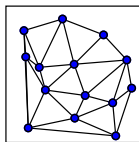
MST



RNG

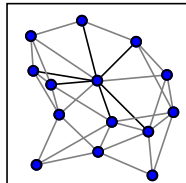
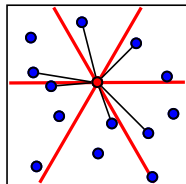


GG



DT

	MST	RNG	GG	DT
	planar	planar	planar	planar
	zshg	zshg	zshg	zshg
DurGrad	2	$O(1)$	$O(1)$	6
MaxGrad	6	6	$n - 1$	$n - 1$
Entf.	$n-1$	$n-1$	$O(\sqrt{n})$	$O(1)$
Energ.	$n-1$	$n-1$	1	1
lokal	—	✓	✓	—



## Yao-Graph

Jeder Knoten partitioniert Nachbarn in  $k$  Segmente und wählt dichtesten in jedem Segment. Kantenrichtungen werden dann symmetrisch ergänzt.

- lokal konstruierbar
- Maximalgrad  $n - 1$
- Konstante Spannfaktoren

Braucht man unbedingt Knotenpositionen, um von diesen Überlegungen zu profitieren?

- Was, wenn Knoten nur *irgendein* *symmetrisches* Maß für die Güte ihrer Nachbarn kennen?
  - Entfernung (dicht=gut)
  - Energie (billig=gut)
  - Verbindungsqualität (gut=gut)
- Was, wenn die Kosten nicht nur von den Positionen abhängen, sondern es Hindernisse gibt?
- MST gehen immer noch (aber nicht schnell), was geht sonst?

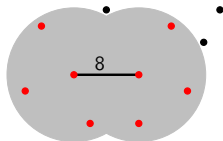
## XTC-Algorithmus

- 1 Jeder Knoten erstellt ein Ranking seiner Nachbarn nach Güte
  - 2 Knoten teilen ihre Rankings den Nachbarn mit
  - 3 ein Link  $\{u, v\}$  wird ignoriert, wenn es einen Knoten  $w$  gibt, den  $u$  besser rankt als  $v$  und umgekehrt.
- für euklidische Abstände: Teilgraph des RNG
    - ⇒ planar, Maximalgrad,...
    - Exakt RNG, falls keine Ties
  - symmetrisch (per Definition)
  - zusammenhängend
  - sehr einfach umzusetzen

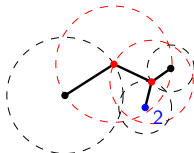
- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung
- Lokale Topologiekontrolle und Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokale Topologiekontrolle
- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen...

## Erinnerung Interferenz

Wenn Knoten senden, dann stören sie den Empfang anderer Knoten. Ziel von Topologiekontrolle kann auch sein, *interferenzminimale* Teilgraphen zu identifizieren.



- Wie viele Knoten „stört“ eine Kante?



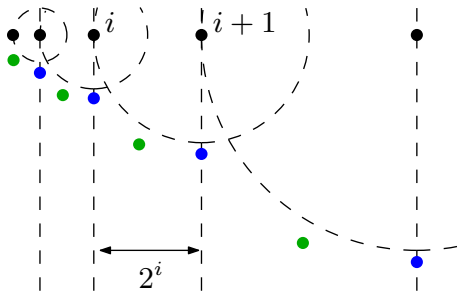
- Wieviele Senderradien überdecken einen Knoten?

Welcher symmetrische, zusammenhängende Graph minimiert die maximale Interferenz?



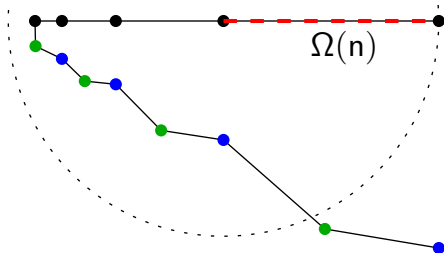
# Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?



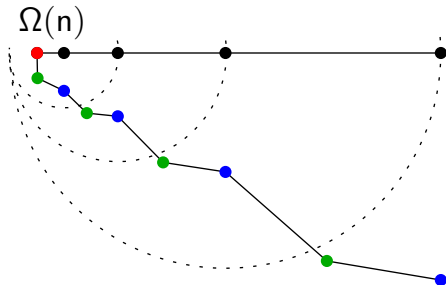
# Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?



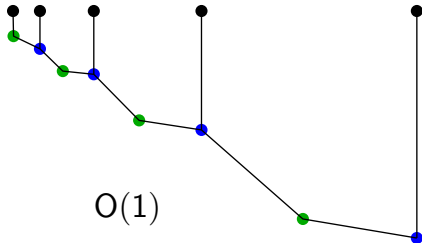
# Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?



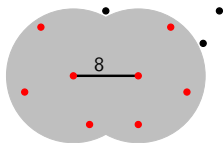
# Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?

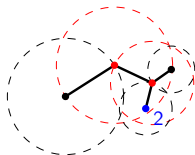


# Place your bets!

*Gesucht:* Ungerichteter zusammenhängender Graph auf einer Menge von Punkten, der die maximale Interferenz / Summe der Interferenz minimiert. Wo ist das leicht, wo ist das NP-schwer? Bei Kanten- oder Knoteninterferenz?

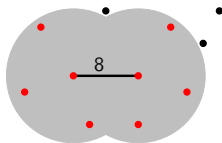


- Wie viele Knoten „stört“ eine Kante?

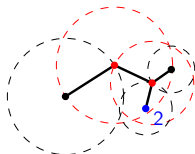


- Wieviele Senderradien überdecken einen Knoten?

*Gesucht:* Ungerichteter zusammenhängender Graph auf einer Menge von Punkten, der die maximale Interferenz / Summe der Interferenz minimiert. Wo ist das leicht, wo ist das NP-schwer? Bei Kanten- oder Knoteninterferenz?



- Wie viele Knoten „stört“ eine Kante?
- Leicht! MST mit Interferenz als Kantengewicht!



- Wieviele Senderradien überdecken einen Knoten?
- NP-schwer! (ohne Beweis)

- Topologiekontrolle ist Kompromiss widersprüchlicher Ziele
  - manchmal sind die Ziele noch nicht einmal klar formuliert!
- Topologiekontrolle zum Energiesparen
  - Wahl minimaler Sendeleistungen, ohne Zusammenhang zu verlieren
- TK durch lokale Entscheidungen gegen unnötige Links
  - Spanner-Eigenschaften vs. Grad, Planarität, ..
  - Schnitt geometrischer Graphen mit MaxPower-Graph
  - RNG/XTC: auch ohne Geometrie noch hilfreich
- Topologiekontrolle zur Minimierung der Interferenz
  - selbst bei einfachen Modellen überraschend schwer

- 1 Paolo Santi: *Topology Control in Wireless Ad Hoc and Sensor Networks*, Wiley, 2005
- 2 L. Kirouses, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc: *Power consumption in packet radio networks*. In: *Theoretical Computer Science* **243**, 289–305, 2000
- 3 R. Wattenhofer, A. Zollinger: *XTC: A practical topology control algorithm for ad-hoc networks*. In: 18th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'04), IEEE Press, 2004
- 4 M. Burhart, P. von Rickenbach, R. Wattenhofer, A. Zollinger: *Does Topology Control Reduce Interference?*. In *Proceedings of The 5th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc '04)*