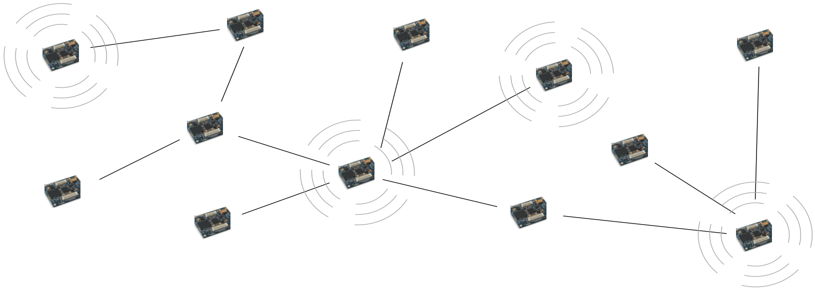
Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

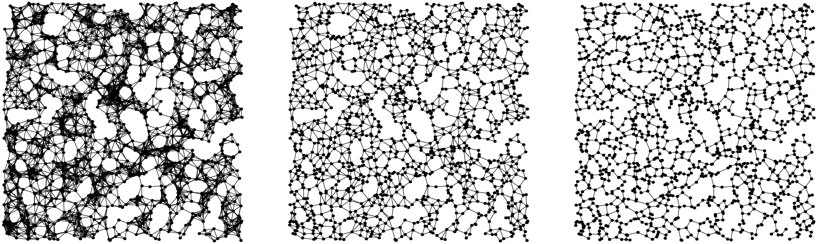
VL 04 – Topologiekontrolle

Fabian Fuchs | 04. Nov. 2015 (Version 2)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)



Topologiekontrolle



Was kann man gewinnen, indem man Kommunikation einschränkt?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Topologiekontrolle

Topologiekontrolle

Topologiekontrolle bezeichnet alle Techniken, die die Menge der aktiven Links zwischen Knoten verringern, um Eigenschaften des Kommunikationsnetzes herzustellen, ohne andere Eigenschaften zu zerstören.

Zwei grundsätzliche Ansätze

- Verringern der Sendeleistung der Knoten
- Beschränkung auf ausgewählten Subgraphen

Ziel: Genug, aber nicht zu viel abschalten!

- In der Regel Balance zwischen mehreren Eigenschaften.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Überblick

- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung

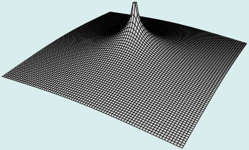
- Lokale Topologiekontrolle und Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokale Topologiekontrolle

- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen...

Wiederholung: Sendeleistung

Erinnerung

Sendet ein Knoten mit Sendeleistung P, empfängt ein Knoten in Entfernung d das Signal mit einer Stärke P/d^α ($2 < \alpha \leq 6$). Ein Knoten kann ein ungestörtes Signal dekodieren, wenn eine bestimmte Stärke überschritten wird.



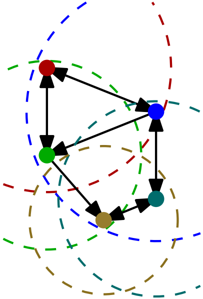
- Geeignet normiert heißt das: Knoten u erreicht Knoten v genau dann, wenn $P_u \geq d(u, v)^\alpha$.

Kommunikationsgraph

Definition

Zu einer Menge von Knoten V in der Ebene ist eine *Reichweitenzuweisung* eine Abbildung $\mathrm{RA} : V \to \mathbb{R}_+$. Sie induziert einen gerichteten Kommunikationsgraphen $G_{\mathrm{RA}} = (V, E)$ mit $(u, v) \in E \Leftrightarrow d(u, v) \leq \mathrm{RA}(u)$

- entspricht Sendeleistungszuordnung $\mathrm{PA}(v) = \mathrm{RA}(v)^\alpha$
- eine Reichweitenzuordnung heißt *uniform*, wenn allen Knoten dieselbe Reichweite zugeordnet wird.
- Kommunikationsgraph dann symmetrisch!



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

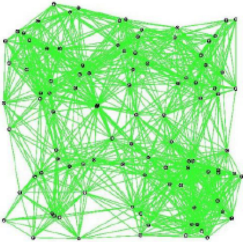
Maxpower-Graph

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Der Maxpower-Graph ist der Graph der sich ergibt, wenn man jeden Knoten mit allen Knoten verbindet, mit denen er kommunizieren kann, wenn beide mit maximaler Sendeleistung $P_{\max}$ (d.h. maximaler Reichweite) senden.

- Maxpower-Graph ist Unit-Disk-Graph
- Topologiekontrolle macht vor allem dann Sinn, wenn man davon ausgeht, dass der Maxpower-Graph „zu dicht“ ist.



Sendeleistung vs. Zusammenhang

Wie stark kann man die Reichweite der Knoten verringern, ohne dass der Kommunikationsgraph unzusammenhängend wird?

Minimale uniforme Sendeleistung für Zusammenhang

Gegeben: Zusammenhängender Maxpower-Graph $G = (V, E)$.

Gesucht: Minimale uniforme Reichweitenzuordnung RA, so dass G_{RA} zusammenhängend ist.

Minimale Spannbäume

Minimaler Spannbaum

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $w : E \to \mathbb{R}_+$ eine Gewichtsfunktion. Ein Minimaler Spannbaum (MST) ist ein Spannbaum $T \subseteq E$, der $\sum_T w(E)$ minimiert.

Lemma

Die minimale uniforme Reichweite für Zusammenhang entspricht der maximalen Länge einer Kante in einem minimalen Spannbaum T mit euklidischem Abstand als Gewichtsfunktion.

- Gibt es einen zusammenhängenden Graphen nur mit kürzeren Kanten, dann gibt es auch einen Spannbaum T' nur mit kürzeren Kanten. Entferne die längste Kante aus T und füge die Kante aus T' hinzu, die die beiden Teilbäume verbindet. Das verringert das Gesamtgewicht in T im Widerspruch zu „T ist MST“.

MSTs verteilt berechnen

Bestimmung minimale uniforme Sendeleistung für Zusammenhang?

- Berechne MST, propagiere maximale Kantenlänge

Satz (vorerst ohne Beweis...)

Es gibt einen verteilten Algorithmus zur Bestimmung eines Minimalen Spannbaums mit Laufzeit in $O(n)$ und Nachrichtenkomplexität $O(n \log n + m)$.

- MSTs sind extrem wertvoll, im Hinterkopf behalten!

Das löst das Reichweitenzuordnungsproblem für uniforme Reichweiten. Was ist, wenn wir unterschiedliche Sendeleistungen zulassen und den Durchschnitt minimieren wollen?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Reichweitenzuordnung

Problem: Energieoptimale Reichweitenzuordnung

Gegeben: Zusammenhängender Maxpower-Graph $G = (V, E)$

Gesucht: (Nicht-uniforme) Reichweitenzuordnung RA mit minimaler Gesamtleistung $\sum_{v \in V} \mathrm{RA}(v)^{\alpha}$, bei der G_{RA} stark zusammenhängend ist.

- minimiert auch durchschnittliche Sendeleistung
- muss nicht unbedingt symmetrisch sein (nicht-uniform!)

Gute und schlechte Nachricht...

Karlsruher Institut für Technologie

Die schlechte zuerst...

Satz (ohne Beweis)

Die Bestimmung einer energieoptimalen Reichweitenzuordnung ist NP-schwer.

...und jetzt die gute:

Satz

Ist T ein minimaler Spannbaum in G für $w(\{u, v\}) = d(u, v)^\alpha$, dann approximiert

$$\mathrm{RA}_T(u) := \max_{\{u,v\} \in T} d(u, v)$$

eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

Beweis, Teil I

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma

Sei T ein MST und $\overline{\mathrm{RA}}$ eine optimale Lösung für die energieoptimale Reichweitenzuordnung. Es gilt

$$\sum_{v \in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha > \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha \quad .$$

- Gewicht eines MSTs ist untere Schranke für optimale Lösung
- Beweis:
  - Betrachte gerichteten Graphen $G_{\overline{\mathrm{RA}}}$
  - wähle bel. Knoten u und zu u gerichteten Baum $T_{\overline{\mathrm{RA}}}$ in $G_{\overline{\mathrm{RA}}}$.
  - Für jede Kante in $(u,v) \in T_{\overline{\mathrm{RA}}}$ ist $\overline{\mathrm{RA}}(u) \geq d(u,v)$.
  - $\sum_{v \in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha > \sum_{(u,v) \in T_{\overline{\mathrm{RA}}}} d(u,v)^\alpha \geq \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha$
  - (ungerichtet ist $T_{\overline{\mathrm{RA}}}$ ein Spannbaum)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beweis, Teil II

Lemma

Sei T ein (beliebiger) Baum in G. Dann ist

$$\sum_{v \in V} \mathrm{RA}_T(u)^\alpha \leq 2 \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha$$

- Erinnerung: $\mathrm{RA}_T(u) = \max_{\{u,v\} \in T} d(u,v)$
- Beweis:
  - für jedes $v \in V$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{RA}_T(v)^\alpha &= \Big(\max_{\{u,v\} \in T} d(u,v)\Big)^\alpha \\ &= \max_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha \leq \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \mathrm{RA}_T(v)^\alpha \leq \sum_{v \in V, \{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha = 2 \sum_{\{u,v\} \in T} d(u,v)^\alpha$$

Beweis (Zusammenbau)

Satz

Ist T ein minimaler Spannbaum in G für $w(\{u,v\}) = d(u,v)^\alpha$, dann approximiert

$$\mathrm{RA}_T(u) := \max_{\{u,v\}\in T} d(u,v)$$

eine optimale Lösung bis auf einen Faktor 2.

- Aus Teil I: $\sum_{v\in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha > \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$
- Aus Teil II: $\sum_{v\in V} \mathrm{RA}_T(u)^\alpha \leq 2 \sum_{\{u,v\}\in T} d(u,v)^\alpha$

$\Rightarrow$

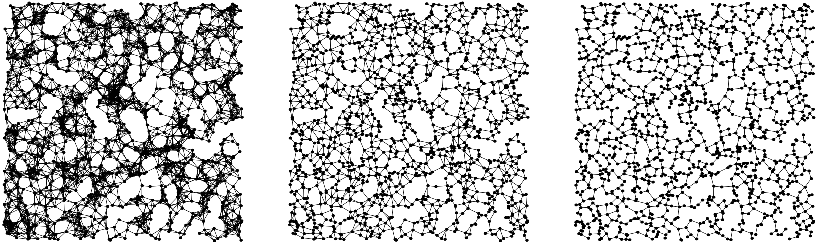
$$\sum_{v\in V} \mathrm{RA}_T(u)^\alpha < 2 \sum_{v\in V} \overline{\mathrm{RA}}(v)^\alpha$$

Überblick

- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung
- Lokale Topologiekontrolle und Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokale Topologiekontrolle
- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen...

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

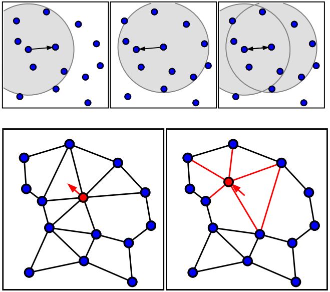
TK durch Auswahl von aktiven Links



Topologiekontrolle durch Beschränkung auf Kommunikationsteilgraphen G'

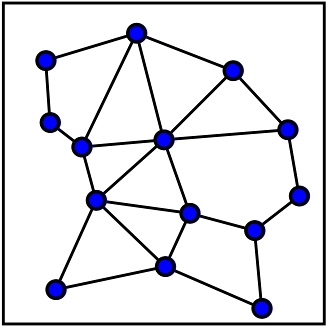
Gegeben einen Maxpower-Graph, was spricht dafür bestimmte Kanten zu ignorieren? Was spricht dagegen?

„Neutrale Anforderungen“



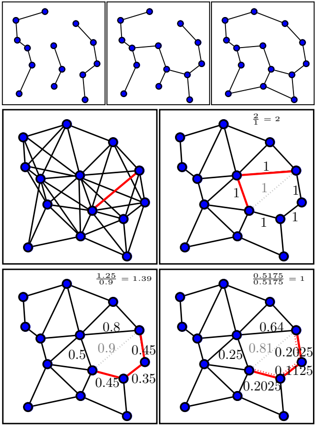
- Symmetrie
  - Voraussetzung für viele Protokolle
  - Einfach herzustellen?
- Lokale Definition
  - Verteilte Berechnung
  - schnelle Anpassung bei Mobilität

Gründe für Einschränkungen



- Planarität
  - Vereinfacht Routing
- Geringer Knotengrad
  - Senkt Overhead
  - durchschnittlich oder im Maximum

Gründe gegen Einschränkungen



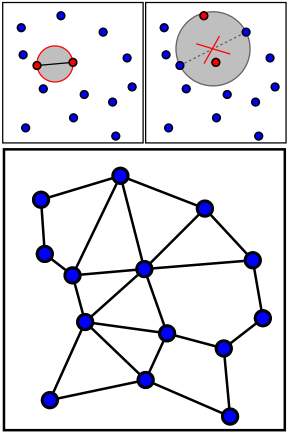
- Erhalt von Zusammenhang
- Wege können sich verlängern

Definition

Der Spannfaktor eines Teilgraphen G' ist maximale Verhältnis der Längen der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten a, b in G' und G.

- *Länge* eines Pfades P dabei
  - Anzahl der Kanten $\sum_P 1$
  - Euklidische Länge $\sum_P d(u, v)$
  - Kosten (Energie) $\sum_P d(u, v)^\alpha$
- Nachbarn in G zu betrachten reicht

Erinnerung: Gabriel Graph



Gabriel Graph

Eine Kante ist im GG gdw. der Umkreis der Kante keine weiteren Knoten enthält.

GG von *UDG*:

- einfach lokal zu entscheiden
- planar, zshg., Durchschnittsgrad?
- Maximalgrad $n-1$! (Warum?)
- Entfernungsspannfaktor $O(\sqrt{n})$ (o.B.)
- Energiespannfaktor 1! (für $\alpha \geq 2$)

Energiespannfaktor *GG*-Einschränkung

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Schränkt man einen zusammenhängenden UDG (V, E) auf Kanten des GG ein, bleiben (für $\alpha \geq 2$) alle energieoptimalen Pfade erhalten.

Beweis:

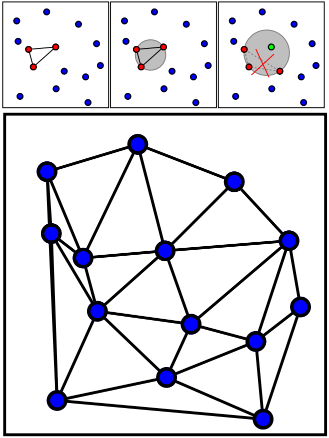
- Annahme: Es gibt $\{u, v\} \in E$, so dass günstigster Pfad wegfällt
- wähle solches Paar mit minimalem Abstand
- günstigster Pfad muss direkte Verbindung gewesen sein

$\Rightarrow$ $\{u, v\}$ ist weggefallen wegen eines Knotens im Umkreis

- dann war die direkte Verbindung nicht der günstigster Weg ($\alpha \geq 2$!)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Delaunay-Triangulierung



Delaunay-Triangulierung

Ein Dreieck ist in der DT gdw. der Umkreis keine weiteren Knoten enthält.

DT von *UDG*:

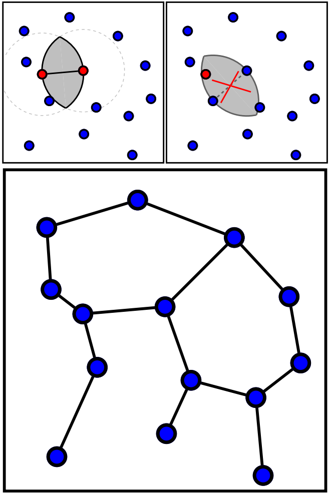
- nicht lokal konstruierbar
- planar und trianguliert (ohne Beweis)

$\Rightarrow$ Durchschnittsgrad konstant

- *GG* ist Teilgraph von *DT* (o.B.)
- Entfernungsspannfaktor $O(1)$ (o.B.)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Relative-Neighborhood-Graphen



Relative-Neighborhood-Graph

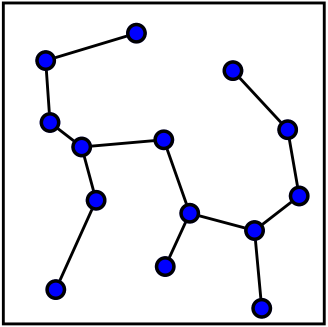
Eine Kante $\{u, v\}$ ist im RNG gdw. beide Knoten keinen gemeinsamen, näheren Nachbarn haben.

RNG von *UDG*:

- einfach lokal zu entscheiden
- Maximalgrad 6 (mit Tie-Breaking)
- Entfernungs- und Energiespannfaktor $n - 1$
- *RNG* ist Teilgraph von *GG*

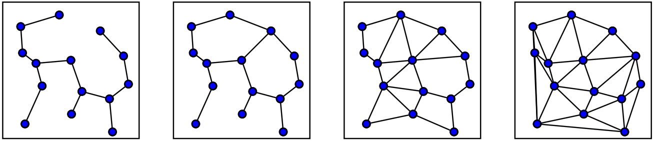
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Euklidischer MST



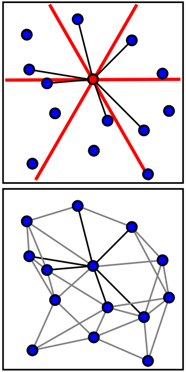
- EMST
  - MST mit euklidischen Abständen
  - zusammenhängend
  - Teilgraph des *RNG*:
    Kanten, die nicht im *RNG* sind, sind auch nicht im *MST*

Geometrische Graphen, Inklusionen



	MST	RNG	GG	DT
	planar	planar	planar	planar
	zshg	zshg	zshg	zshg
DurGrad	2	$O(1)$	$O(1)$	6
MaxGrad	6	6	$n-1$	$n-1$
Entf.	n-1	n-1	$O(\sqrt{n})$	$O(1)$
Energ.	n-1	n-1	1	1
lokal	—	✓	✓	—

(Noch mehr Graphen: Yao-Graph)



Yao-Graph

Jeder Knoten partitioniert Nachbarn in k Segmente und wählt dichtesten in jedem Segment. Kantenrichtungen werden dann symmetrisch ergänzt.

- lokal konstruierbar
- Maximalgrad $n - 1$
- Konstante Spannfaktoren

Lokale Protokolle

Braucht man unbedingt Knotenpositionen, um von diesen Überlegungen zu profitieren?

- Was, wenn Knoten nur *irgendein symmetrisches* Maß für die Güte ihrer Nachbarn kennen?
  - Entfernung (dicht=gut)
  - Energie (billig=gut)
  - Verbindungsqualität (gut=gut)
- Was, wenn die Kosten nicht nur von den Positionen abhängen, sondern es Hindernisse gibt?

- MST gehen immer noch (aber nicht schnell), was geht sonst?

XTC: RNG ohne Geometrie

XTC-Algorithmus

1. Jeder Knoten erstellt ein Ranking seiner Nachbarn nach Güte
2. Knoten teilen ihre Rankings den Nachbarn mit
3. ein Link $\{u, v\}$ wird ignoriert, wenn es einen Knoten w gibt, den u besser rankt als v und umgekehrt.

- für euklidische Abstände: Teilgraph des RNG
  - $\Rightarrow$ planar, Maximalgrad,...
  - Exakt RNG, falls keine Ties
- symmetrisch (per Definition)
- zusammenhängend
- sehr einfach umzusetzen

Überblick

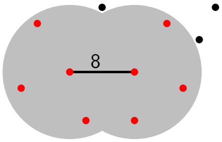
- Topologiekontrolle zur Sendeleistungsminimierung
- Lokale Topologiekontrolle und Spannereigenschaften
  - Geometrisch definierte Graphen und ihre Eigenschaften
  - XTC — Lokale Topologiekontrolle
- Topologiekontrolle zur Interferenzminimierung
  - Von leichten und schweren Problemen...

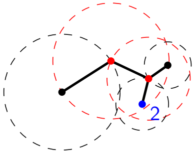
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Interferenz vs. Zusammenhang

Erinnerung Interferenz

Wenn Knoten senden, dann stören sie den Empfang anderer Knoten. Ziel von Topologiekontrolle kann auch sein, *interferenzminimale* Teilgraphen zu identifizieren.



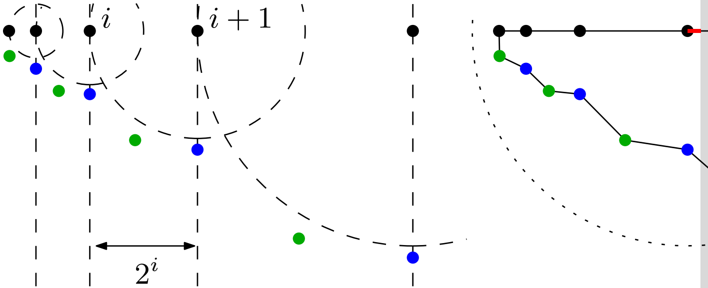


- Wie viele Knoten „stört“ eine Kante?
- Wieviele Senderadien überdecken einen Knoten?

Welcher symmetrische, zusammenhängende Graph minimiert die maximale Interferenz?

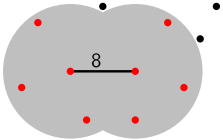
Ein böses Beispiel

- Alle bisherigen Topologien enthalten Verbindungen zu dichtesten Nachbarn, wie schlecht kann das sein?

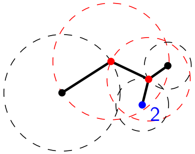


Place your bets!

Gesucht: Ungerichteter zusammenhängender Graph auf einer Menge von Punkten, der die maximale Interferenz / Summe der Interferenz minimiert. Wo ist das leicht, wo ist das NP-schwer? Bei Kanten- oder Knoteninterferenz?



- Wie viele Knoten „stört“ eine Kante?
- Leicht! MST mit Interferenz als Kantengewicht!



- Wieviele Senderadien überdecken einen Knoten?
- NP-schwer! (ohne Beweis)

Zusammenfassung

- Topologiekontrolle ist Kompromiss widersprüchlicher Ziele
  - manchmal sind die Ziele noch nicht einmal klar formuliert!
- Topologiekontrolle zum Energiesparen
  - Wahl minimaler Sendeleistungen, ohne Zusammenhang zu verlieren
- TK durch lokale Entscheidungen gegen unnötige Links
  - Spanner-Eigenschaften vs. Grad, Planarität, ..
  - Schnitt geometrischer Graphen mit MaxPower-Graph
  - RNG/XTC: auch ohne Geometrie noch hilfreich
- Topologiekontrolle zur Minimierung der Interferenz
  - selbst bei einfachen Modellen überraschend schwer

Literatur

1. Paolo Santi: *Topology Control in Wireless Ad Hoc and Sensor Networks*, Wiley, 2005
2. L. Kirouses, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc: *Power consumption in packet radio networks*. In: Theoretical Computer Science **243**, 289–305, 2000
3. R. Wattenhofer, A. Zollinger: *XTC: A practical topology control algorithm for ad-hoc networks*. In: 18th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'04), IEEE Press, 2004
4. M. Burhart, P. von Rickenbach, R. Wattenhofer, A. Zollinger: *Does Topology Control Reduce Interference?*. In Proceedings of The 5th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc '04)