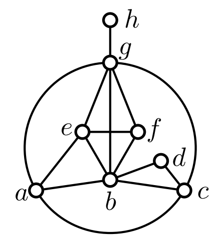
Übungsblatt 8

Eine Besprechung in der Übung findet nicht statt.

Aufgabe 1: Intervallgraphen und Cliquenordnungen ⋆

Gegeben sei der nebenstehende Graph G. Geben Sie alle inklusionsmaximalen Cliquen von G an und stellen Sie die zugehörige Cliquenmatrix auf.



Zeigen Sie, dass diese Matrix die Konsekutive-Einsen-Eigenschaft hat und konstruieren Sie daraus eine Intervallrepräsentation von G.

Aufgabe 2: Echte Intervallgraphen und konsekutive Einsen ⋆⋆⋆

Sei G ein Graph und sei A seine erweiterte Adjazenzmatrix (Adjazenzmatrix mit Einsen auf der Diagonalen). Zeigen Sie, dass G genau dann ein echter Intervallgraph ist, wenn A die Konsekutive-Einsen-Eigenschaft für Spalten (und Zeilen) hat.

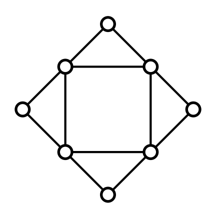
Aufgabe 3: Intervallüberdeckung ⋆

Sei I eine Menge von Intervallen auf der reellen Geraden $\mathbb{R}$, sodass jede Teilmenge paarweise disjunkter Intervalle maximal k Elemente enthält. Zeigen Sie, dass es k Punkte in $\mathbb{R}$ gibt, sodass jedes Intervall in I mindestens einen dieser Punkte enthält.

Aufgabe 4: Einheits- und echte Kreisbogengraphen ⋆⋆

Ein Graph ist ein Einheits-Kreisbogengraph, wenn er eine Kreisbogenrepräsentation besitzt, bei der alle Kreisbögen Länge 1 haben (die Größe des Kreises ist variabel).

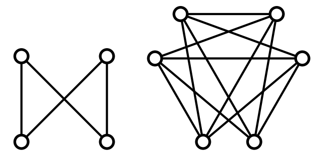
Ein Graph ist ein echter Kreisbogengraph, wenn er eine Kreisbogenrepräsentation besitzt, sodass kein Kreisbogen einen anderen enthält.



Zeigen Sie, dass der nebenstehende Graph ein echter Kreisbogengraph aber kein Einheits-Kreisbogengraph ist.

Aufgabe 5: Cliquen in Kreisbogengraphen ⋆⋆

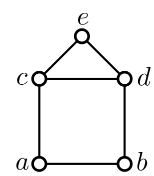
Sei G_n der Graph, den man aus K_{2n} erhält, indem man ein Matching der Größe n löscht. Die Graphen G_2 und G_3 sind rechts dargestellt.



Zeigen Sie, dass G_n exponentiell viele inklusionsmaximale Cliquen hat. Zeigen Sie außerdem, dass G_n ein Kreisbogengraph ist.

Aufgabe 6: Permutationsgraphen ⋆

Sei H der nebenstehende Hüttengraph. Zeigen Sie, dass H ein Permutationsgraph ist, indem Sie eine Matching-Repräsentation für H angeben. Zeigen Sie außerdem, dass H und sein Komplement $\bar{H}$ Vergleichbarkeitsgraphen sind.



Hat H auch eine Matching-Repräsentation, bei der die Knoten in der oberen Zeile die Reihenfolge a, b, c, d, e haben?

Aufgabe 7: Permutationsbeschriftung ⋆⋆⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $L\colon V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine bijektive Knotenbeschriftung. Dann ist L eine *Permutationsbeschriftung*, wenn eine Bijektion $L'\colon V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existiert, sodass zwei Knoten x und y genau dann adjazent sind, wenn $\big(L(x) - L(y)\big) \cdot \big(L'(x) - L'(y)\big) < 0$.

Zeigen Sie, dass L genau dann eine Permutationsbeschriftung ist, wenn $F\colon x \mapsto L(x) - d^-(x) + d^+(x)$ injektiv ist, wobei $d^-(x) = |\{y \in \operatorname{Adj}(x) \mid L(y) < L(x)\}|$ und $d^+(x) = |\{y \in \operatorname{Adj}(x) \mid L(y) > L(x)\}|$.

Hinweis: Setzen Sie $L' = F$.

Aufgabe 8: Sortieren mit Stacks ⋆⋆

In der Vorlesung wurde die Sortierung einer Permutation π mittels k paralleler Warteschlangen (Queues) untersucht. Betrachten Sie analog dazu die Sortierung einer Permutation mit k parallelen Stacks, die nach dem LIFO-Prinzip (last-in-first-out) arbeiten.

Zeigen Sie, dass die folgenden Zahlen gleich sind, wenn alle `push`-Operationen zu Beginn und alle `pop`-Operationen am Ende stattfinden müssen.

(a) Die Clique-Cover-Zahl von $G[\pi]$,

(b) die minimale Zahl von Stacks um π zu sortieren,

(c) die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge in π.

Gilt die Gleichheit auch ohne diese Einschränkung?