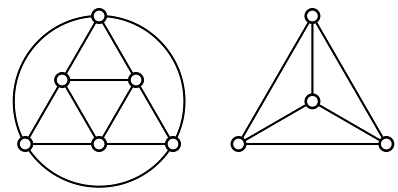
Algorithmische Graphentheorie
Wintersemester 2015/2016
Marcel Radermacher, Ignaz Rutter

Übungsblatt 6

Besprechung in der Übung am 27. Januar 2016

Aufgabe 1: Berechnung einer G-Zerlegung ⋆

Führen Sie den Algorithmus zur Berechnung einer G-Zerlegung an den beiden nebenstehenden Graphen aus.



Geben Sie zusätzlich für jeden Schritt alle Implikationsklassen an und beobachten Sie, wie sich diese verändern, wenn die Kanten einer Farbklasse entfernt werden.

Aufgabe 2: Laufzeit der G-Zerlegung ⋆⋆

Sei Δ der maximale Knotengrad. Zeigen Sie, dass somit die G-Zerlegung in $O(\Delta|E|)$ Zeit und mit $O(|V| + |E|)$ Speicherplatz implementiert werden kann. Zeigen Sie dazu, dass die Berechnung einer Implikationsklasse B_i in $O(\Delta|B_i|)$ Zeit implementiert werden kann.

Aufgabe 3: Berechnung der Höhenfunktion ⋆

Sei $G = (V, F)$ ein gerichteter, azyklischer Graph. Die Höhenfunktion h ist definiert als $h(v) = 0$ falls v eine Senke ist und $h(v) = 1 + \max\{h(w) \mid vw \in F\}$. Geben Sie einen Algorithmus an, der $h(v)$ für alle Knoten v in linearer Zeit berechnet.

Aufgabe 4: Farbklassen in Kompositionsgraphen ⋆⋆

Seien $G_0, G_1, \dots, G_n$ Graphen, sodass G_0 gerade n Knoten $v_1, \dots, v_n$ hat. Der *Kompositionsgraph* $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ ist definiert als die Vereinigung der Graphen $G_1, \dots, G_n$, wobei ein Knoten aus G_i genau dann zu einem Knoten aus G_j adjazent ist, wenn v_i und v_j in G_0 adjazent sind. Der Graph G_0 heißt *äußerer Faktor*; die Graphen $G_1, \dots, G_n$ sind *innere Faktoren*.

Sei $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ ein Kompositionsgraph und sei $\hat{A}$ eine Farbklasse von G. Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ entweder vollständig innerhalb eines inneren Faktors $G_1, \dots, G_n$ liegt oder ausschließlich äußere Kanten enthält (also Kanten, die Knoten aus unterschiedlichen inneren Faktoren verbinden).

Aufgabe 5: Module ⋆⋆⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *Modul*, wenn jeder Knoten $x \in V - V'$ entweder zu allen oder zu keinem Knoten aus V' benachbart ist. Ein Modul V' ist *trivial*, wenn $V' = V$ oder $V' = \emptyset$.

Für eine Farbklasse $\hat{A}$ von G sei $V(\hat{A})$ die Menge der Knoten, die zu einer Kante aus $\hat{A}$ inzident sind. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Innere Faktoren eines Kompositionsgraphen sind Module.

(b) Für eine Farbklasse $\hat{A}$ ist $V(\hat{A})$ ein Modul.

(c) G hat maximal eine Farbklasse $\hat{A}$, für die $V(\hat{A}) = V$ gilt.

(d) Ist G ein Vergleichbarkeitsgraph, so hat G genau dann eine eindeutige transitive Orientierung (bis auf Invertierung), wenn jeder nicht-triviale Modul eine unabhängige Menge induziert.

Aufgabe 6: Viele Graphklassen ⋆⋆

Ein Graph kann chordal, co-chordal sowie ein Vergleichbarkeitsgraph oder ein co-Vergleichbarkeitsgraph sein. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaften unabhängig voneinander sind, indem Sie für jede der 16 möglichen Kombinationen einen Beispielgraphen angeben.