Algorithmische Graphentheorie
Wintersemester 2015/2016
Marcel Radermacher, Ignaz Rutter

Übungsblatt 5

Besprechung in der Übung am 14. Januar 2016

Aufgabe 1: Knotenüberdeckung in chordalen Graphen ⋆

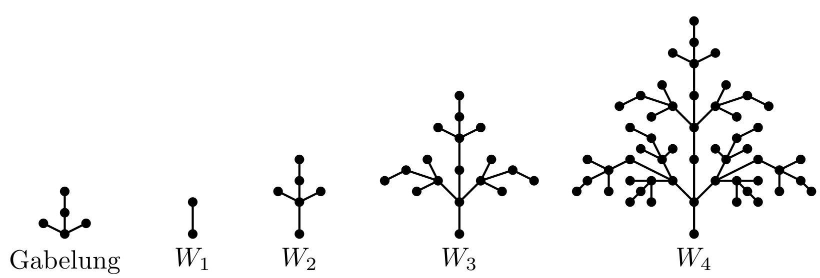
Zeigen Sie, dass eine minimale Knotenüberdeckung in chordalen Graphen effizient berechnet werden kann.

Aufgabe 2: Färbung chordaler Graphen ⋆⋆

Sei G ein chordaler Graph. Da G perfekt ist und $\omega(G)$ effizient berechnet werden kann, kann auch $\chi(G)$ effizient berechnet werden. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der eine Färbung von G mit $\chi(G)$ Farben berechnet.

Aufgabe 3: Weihnachtsbäume ⋆⋆⋆

Wie jeder weiß, taugt nicht jeder Baum als Weihnachtsbaum. Formal ist ein *perfekter Weihnachtsbaum* wie folgt definiert. Der perfekte Weihnachtsbaum W_1 ist eine einzelne Kante, gewurzelt an einem der beiden Knoten. Man erhält den perfekten Weihnachtsbaum W_{k+1} aus W_k, indem man jedes Blatt (die Wurzel ausgenommen) wie unten dargestellt durch eine Gabelung ersetzt.



Jeder chordale Graph kann als Schnittgraph von Teilbäumen eines Baumes dargestellt werden. Zeigen Sie, dass man jeden chordalen Graphen auch als Schnittgraph von Teilbäumen eines perfekten Weihnachtsbaums darstellen kann.

Funktioniert das noch immer, wenn man zusätzlich fordert, dass diese Teilbäume wiederum perfekte Weihnachtsbäume sind? Anders ausgedrückt: Kann man jeden chordalen Graphen als Schnittgraph von perfekten Teilweihnachtsbäumen eines perfekten Weihnachtsbaums darstellen?

Aufgabe 4: Dominanz und Bäume ★★

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und Startknoten $s \in V$, in dem jeder Knoten v von s aus erreichbar ist. Ein Knoten $u \in V$ *dominiert* einen Knoten $v \in V$, falls jeder sv-Pfad über u verläuft. Sind u und v verschiedene Knoten, dann ist u strikt dominierend bzgl. v. Der Knoten v wird von u direkt dominiert, falls v von u strikt dominiert wird und u keinen Knoten w dominiert der ebenfalls v strikt dominiert.

Die Dominanzrelation induziert einen neuen gerichteten Graphen $G_{\text{dom}} = (V, E')$. Die Kante uv ist in E' enthalten, falls v von u direkt dominiert wird. Zeigen Sie, dass G_{dom} ein in s gewurzelter Baum ist, d.h. G_{dom} ist Kreisfrei und zu jedem Knoten v existiert genau ein gerichteter einfacher sv-Pfad in G_{dom}.

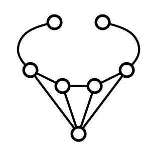
Aufgabe 5: Implikationsklassen und ihre Komplemente ★

Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen.

$$ab \; \Gamma \; a'b' \Leftrightarrow ba \; \Gamma \; b'a'$$
$$ab \; \Gamma^* \; a'b' \Leftrightarrow ba \; \Gamma^* \; b'a'$$

Aufgabe 6: Transitive Orientierbarkeit des Bullenkopfes ★

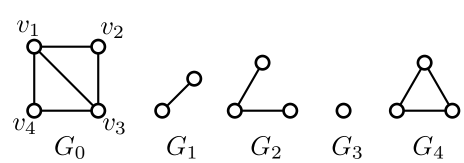
Zeigen Sie, dass der „Bullenkopf“ nicht transitiv orientierbar ist. Zeigen Sie dazu, dass es eine Implikationsklasse A gibt, mit $A = A^{-1}$.



Aufgabe 7: Graphkomposition ★★

Seien $G_0, G_1, \dots, G_n$ Graphen, sodass G_0 gerade n Knoten $v_1, \dots, v_n$ hat. Der *Kompositionsgraph* $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ ist definiert als die Vereinigung der Graphen $G_1, \dots, G_n$, wobei ein Knoten aus G_i genau dann zu einem Knoten aus G_j adjazent ist, wenn v_i und v_j in G_0 adjazent sind. Der Graph G_0 heißt *äußerer Faktor*; die Graphen $G_1, \dots, G_n$ sind *innere Faktoren*.

Geben Sie $G = G_0[G_1, G_2, G_3, G_4]$ für die nebenstehenden Graphen $G_0, \dots, G_4$ an. Wählen Sie für jeden der Graphen $G_0, \dots, G_4$ eine transitive Orientierung. Erhält man dadurch auch eine transitive Orientierung von G?



Zeigen Sie, dass ein Kompositionsgraph $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ genau dann transitiv orientierbar ist, wenn jeder der Graphen $G_0, \dots, G_n$ transitiv orientierbar ist.