Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 6. November 2014

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Organisatorisches

- ***Dauerhafte Raumverlegung:***
  Tutorium 21 findet *ab heute* im Raum -107 statt (Stefan Rettenmayr, Donnerstag um 15:45 Uhr).
- ***Temporäre Raumverlegung:***
  Im Zeitraum vom 12.11 bis zum 14.11 werden die Seminarräume für die Fachschaftkonferenz genutzt. Daher werden die Tutorien in andere Räume verlegt. Informationen folgen, sobald vorhanden, über die TGI Hauptseite und über das TGI Forum.

Frage

Karlsruher Institut für Technologie

Frage:
Ist der Äquivalenzklassenautomat zu einem deterministischen endlichen Automaten schon der äquivalente Automat mit der minimalen Anzahl von Zuständen?

Frage

Frage:
Ist der Äquivalenzklassenautomat zu einem deterministischen endlichen Automaten schon der äquivalente Automat mit der minimalen Anzahl von Zuständen?

Antwort:
Ja, wir zeigen dies wie folgt:

- Zuerst konstruieren wir den minimalen Automaten zur Sprache L (Automat der Nerode-Relation)
- Anschließend zeigen wir, dass $\mathcal{A}^{\equiv}$ höchstens soviele Zustände hat wie der Automat der Nerode-Relation.

Definitionen: Rechtsinvarianz und Index

Definition (Rechtsinvarianz und Index):
Eine Äquivalenzrelation R über Σ^* heißt **rechtsinvariant**, wenn

für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt: falls $x \; R \; y$ so gilt auch $xz \; R \; yz$ für alle $z \in \Sigma^*$.

Den **Index** von R bezeichnen wir mit **ind(R)**; er ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von Σ^* bezüglich R.

Nerode-Relation

Definition (Nerode-Relationen):
Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist die **Nerode–Relation** R_L definiert durch: für $x, y \in \Sigma^*$ ist $x\ R_L\ y$ genau dann wenn $(xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ für alle $z \in \Sigma^*$ gilt.

Die Nerode–Relation R_L zu einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation. Es gilt:

$$\begin{aligned} x\ R_L\ y &\Rightarrow (xw \in L \Leftrightarrow yw \in L) \text{ für alle } w \in \Sigma^* \\ &\Rightarrow (xzw \in L \Leftrightarrow yzw \in L) \text{ für alle } w,\ z \in \Sigma^* \\ &\Rightarrow (xz\ R_L\ yz) \text{ für alle } z \in \Sigma^*. \end{aligned}$$

Satz von Nerode

Satz (von Nerode):
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt bzw. akzeptiert.
2. L ist die Vereinigung von (einigen) Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation mit endlichem Index.
3. Die Nerode–Relation hat endlichen Index.

Beweis zu Satz von Nerode: (1) $\rightarrow$ (2)

(1) $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt bzw. akzeptiert.

(2) L ist die Vereinigung von (einigen) Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation mit endlichem Index.

Beweis: Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der deterministische endliche Automat, der L akzeptiert, und $R_{\mathcal{A}}$ wie folgt definiert:

$$\forall\, x, y \in \Sigma^*\colon x\ R_{\mathcal{A}}\ y \iff \delta(s, x) = \delta(s, y).$$

- $R_{\mathcal{A}}$ ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation.
- Der Index von $R_{\mathcal{A}}$ ist die Anzahl der nicht überflüssigen Zustände von $\mathcal{A}$, also endlich.
- Also ist L die Vereinigung der Äquivalenzklassen von $R_{\mathcal{A}}$, die zu den Endzuständen von $\mathcal{A}$ gehören.

Beweis zu Satz von Nerode: (2) $\rightarrow$ (3)

(2) L ist die Vereinigung von (einigen) Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation R mit endlichem Index.

(3) Die Nerode–Relation hat endlichen Index.

Beweis:

- Wir zeigen $x\ R\ y$ impliziert $x\ R_L\ y$ (R_L eine Vergröberung von R)
- Dann gilt $\text{ind}(R_L) \leq \text{ind}(R) < \infty$.

Sei also $x\ R\ y$.

- Da R rechtsinvariant ist, gilt für alle $z \in \Sigma^*$: $xz\ R\ yz$.
- Voraussetzung: Jede Äquivalenzklasse von R gehört entweder ganz oder gar nicht zu L
- Also: $xz, yz \in L$ oder $xz, yz \notin L$.
- Damit folgt $x\ R_L\ y$.

Beweis zu Satz von Nerode: (3) $\to$ (1)

(3) Die Nerode–Relation hat endlichen Index.

(1) $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten erkannt bzw. akzeptiert.

Beweis: Wir konstruieren zu R_L einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q := \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$, Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R_L. Es ist also $|Q| = \text{ind}(R_L) < \infty$.
- $s := [\varepsilon]_{R_L}$,
- $F := \{[w]_{R_L} \mid w \in L\}$ (wohldefiniert)
- $\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$

Beweis zu Satz von Nerode: (3) $\rightarrow$ (1)

Karlsruher Institut für Technologie

Beweis: Wir konstruieren zu R_L einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q := \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$, Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R_L. Es ist also $|Q| = \text{ind}(R_L) < \infty$.
- $s := [\varepsilon]_{R_L}$,
- $F := \{[w]_{R_L} \mid w \in L\}$ (wohldefiniert)
- $\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$

δ ist wohldefiniert:

- Falls $[w]_{R_L} = [w']_{R_L}$ dann gilt $w \; R_L \; w'$ und wegen Rechtsinvarianz von R_L auch $wa \; R_L \; w'a$.
- Also ist $[wa]_{R_L} = [w'a]_{R_L}$.

Beweis zu Satz von Nerode: (3) $\rightarrow$ (1)

Karlsruher Institut für Technologie

Beweis: Wir konstruieren zu R_L einen deterministischen endlichen Automaten, der L akzeptiert. Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit:

- $Q := \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$, Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R_L. Es ist also $|Q| = \mathrm{ind}(R_L) < \infty$.
- $s := [\varepsilon]_{R_L}$,
- $F := \{[w]_{R_L} \mid w \in L\}$ (wohldefiniert)
- $\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ genau L akzeptiert.

- Nach Konstruktion ist $\delta(s, w) = \delta([\varepsilon], w) = [\varepsilon w]_{R_L} = [w]_{R_L}$.
- Also wird w von $\mathcal{A}$ akzeptiert genau dann, wenn $[w] \in F$ gilt, d.h. wenn $w \in L$.

Korollar

Korollar
Der im dritten Beweisteil zum Satz von Nerode konstruierte Automat $\mathcal{A}$ zu R_L — der **Automat der Nerode–Relation** — ist minimal.

Korollar

Korollar
Der im dritten Beweisteil zum Satz von Nerode konstruierte Automat $\mathcal{A}$ zu R_L — der **Automat der Nerode–Relation** — ist minimal.

Beweis: Sei $\mathcal{A}' := (Q', \Sigma, \delta', s', F')$ ein deterministischer endlicher Automat, der L akzeptiert.

- Aus 1 $\Rightarrow$ 2 folgt, dass eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation $R_{\mathcal{A}'}$ mit $\text{ind}(R_{\mathcal{A}'}) \leq |Q'|$ existiert.
- Wegen 2 $\Rightarrow$ 3 gilt: $\text{ind}(R_L) \leq \text{ind}(R_{\mathcal{A}'})$.
- Mit 3 $\Rightarrow$ 1 folgt

$$|Q| = \text{ind}(R_L) \leq \text{ind}(R_{\mathcal{A}'}) \leq |Q'|,$$

für den Nerode–Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$.

Minimalität des Äquivalenzklassenautomats

Satz (Minimalität des Äquivalenzklassenautomats):
Der Äquivalenzklassenautomat $A^{\equiv}$ zu einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ ohne überflüssige Zustände ist minimal.

Minimalität des Äquivalenzklassenautomats

Satz (Minimalität des Äquivalenzklassenautomats):
Der Äquivalenzklassenautomat $A^{\equiv}$ zu einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ ohne überflüssige Zustände ist minimal.

Beweis: Sei L die vom Automaten $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}^{\equiv}$ akzeptierte Sprache.

- $A^{\equiv}$ hat keine überflüssigen Zustände.
- Letzter Korollar: Es genügt zu zeigen, dass $|Q^{\equiv}| = \text{ind}(\text{R}_L)$.
- Es bleibt zu zeigen, dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:
  $x\ R_L\ y \Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(s, y)$.

$$
\begin{aligned}
x\ R_L\ y &\Rightarrow \forall\, z \in \Sigma^*:\ (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L) \\
&\Rightarrow \forall\, z \in \Sigma^*:\ (\delta(s, xz) \in F \Leftrightarrow \delta(s, yz) \in F) \\
&\Rightarrow \forall\, z \in \Sigma^*:\ (\delta(\delta(s, x), z) \in F \Leftrightarrow \delta(\delta(s, y), z) \in F) \\
&\Rightarrow \delta(s, x) \equiv \delta(s, y)
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

- Ein DEA ist ein Modell für einen sehr einfachen Computer
- Folgende Mengen sind gleich
  - Die Menge der regulären Sprachen
  - Die Menge aller Sprachen, die von einem DEA erkannt werden.
  - Die Menge aller Sprachen, die von einem NEA erkannt werden.
- Mit Potenzmengenkonstruktion kann ein zu einem NEA äquivalenter DEA konstruiert werden.
- Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen und das Verallgemeinerte Pumping-Lemma für reguläre Sprachen sind Hilfsmittel, mit denen für manche Sprachen gezeigt werden kann, dass sie nicht regulär sind.
- Der Äquivalenzklassenautomat zu einem DEA ohne überflüssige Zustände akzeptiert die gleiche Sprache und ist zustandsminimal.
- Der Automat der Nerode-Relation zu einem DEA akzeptiert die gleiche Sprache und ist zustandsminimal