Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 28. Oktober 2014

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

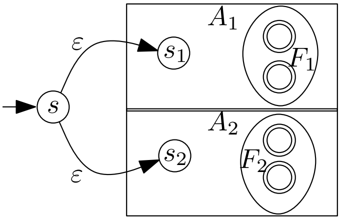
- Erinnerung:
  - $L := L(\alpha)$ reguläre Sprache über Σ, die durch α beschreibbar ist
  - Beweis per Induktion über $n =$Anzahl der $\cup$, $\cdot$ und *-Zeichen in α
  - Induktionsanfang bereits gezeigt
  - noch zu zeigen: Induktionsschritt für reguläre Sprachen $L = L_1 \cup L_2$, $L = L_1 \cdot L_2$ und $L = L_1^*$
- Seien L_1 und L_2 reguläre Sprachen, die von $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ erkannt werden
- Baue aus $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ NEA's, die $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ und L_1^* erkennen
- Aus diesen können äquivalente DEA's konstruiert werden

Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

- Fall 1: $L = L_1 \cup L_2$
- NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der $L_1 \cup L_2$ erkennt:
  - $Q := Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$ $(s \notin Q_i)$
  - $F = F_1 \cup F_2$
  - δ :

$$\delta(q,a) := \begin{cases} \{\delta_i(q,a)\} & , q \in Q_i,\ a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q \setminus \{s\},\ a = \varepsilon \\ \{s_1, s_2\} & , q = s,\ a = \varepsilon \\ \emptyset & , q = s,\ a \neq \varepsilon \end{cases}$$

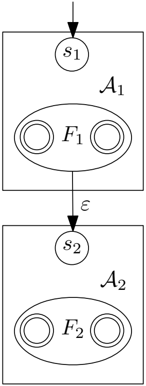


Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

- Fall 2: $L = L_1 \cdot L_2$
- NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der $L_1 \cdot L_2$ erkennt:
  - $Q := Q_1 \cup Q_2$, $s := s_1$, $F := F_2$
  - $s := s_1$
  - $F := F_2$
  - δ:

$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_i(q, a)\} & , q \in Q_i,\ a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q \setminus F_1,\ a = \varepsilon \\ \{s_2\} & , q \in F_1,\ a = \varepsilon \end{cases}$$

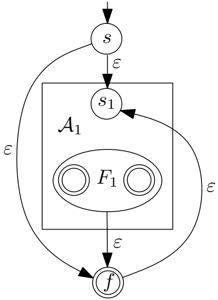


Satz:
Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

- Fall 3: $L = L_1^*$
- NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der L_1^* erkennt:
  - $Q := Q_1 \cup \{s, f\}$
  - s: neu
  - $F := \{f\}$ neuer Zustand
  - δ:

$$\delta(q,a) := \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\} & , q \in Q_1,\ a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q_1 \setminus F_1,\ a = \varepsilon \\ \{f\} & , q \in F_1 \cup \{s\},\ a = \varepsilon \\ \emptyset & , q \in \{s,f\},\ a \neq \varepsilon \\ \{s_1\} & , q \in \{s,f\},\ a = \varepsilon \end{cases}$$



Entfernen von ϵ-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Entfernen von ϵ-Übergängen

Satz:
Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ε-Übergängen gibt es einen NEA $\widetilde{\mathcal{A}}$ ohne ε-Übergänge, der dieselbe Sprache akzeptiert und nicht mehr Zustände hat.

Beweis: Sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein NEA mit ε–Übergängen.
Wir konstruieren $\widetilde{\mathcal{A}} := (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$ wie folgt:

- $\widetilde{Q} := (Q \backslash F) \cup \widetilde{F}$
- $\widetilde{s} := s$
- $$\widetilde{\delta}(q, a) = \begin{cases} \{q\} & \text{falls } a = \varepsilon \\ \delta(E(q), a) & \text{sonst} \end{cases}$$
- $\widetilde{F} := \{q \in Q \mid E(q) \cap F \neq \emptyset\}$

Damit akzeptiert $\widetilde{A}$ dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$, und $|\widetilde{Q}| \leq |Q|$.

EA $\rightarrow$ Regularität

Satz:
Jede Sprache, die von einem endlichen Automaten erkannt wird, ist regulär.

Beweis: EA $\to$ Regularität

- Sei DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben.
- Es ist zu zeigen, dass $L(\mathcal{A})$ regulär ist.

Es gilt:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in einem Zustand aus } F\}$$

- Die Abarbeitung eines Wortes $w = a_1 \dots a_k$ bewirkt das Durchlaufen einer Folge von Zuständen $s, q_1, \dots, q_k$, wobei nicht notwendig $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$ gilt.
- Wir suchen die Wörter, so dass der letzte Zustand in F ist.
- Betrachte für jeden Zustand $f \in F$ getrennt die Wörter, deren Abarbeitung in f endet.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

- Sei DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ gegeben.
- Es ist zu zeigen, dass $L(\mathcal{A})$ regulär ist.

Es gilt:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in einem Zustand aus } F\}$$

Zu $f \in F$ definiere:

$$\begin{aligned} L_f &:= \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ endet nach Abarbeitung von } w \text{ in } f\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ überführt } s \text{ in } f \text{ (im Automaten } \mathcal{A})\} \end{aligned}$$

- Damit ist $L = \bigcup_{f \in F} L_f$.
- Wenn wir zeigen können, dass für alle $f \in F$ die Sprache L_f regulär ist, so ist auch L regulär.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

$$L_f := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ überführt } s \text{ in } f \text{ (im Automaten } \mathcal{A})\}$$

Ab jetzt sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.
Wir definieren zu

$$q_r, q_t \in Q\colon L_{q_r,q_t} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ überführt } q_r \text{ in } q_t\} \ .$$

Insbesondere gilt also: $L_f = L_{s,f}$. Unterteile L_{q_r,q_t}:

$$L_{q_r,i,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Abarbeitung von } w \text{ aus } q_r \text{ nach } q_t \text{ hat nur} \\ \text{Zwischenzustände } \{q_1, \ldots, q_i\} \end{array} \right\}$$

(also w bewirkt: $q_r \rightarrow \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\in\{q_1,\ldots,q_i\}} \rightarrow q_t$.)

Damit gilt $L_{q_r,q_t} = L_{q_r,n,q_t}$.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

$$L_{q_r,i,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Abarbeitung von } w \text{ aus } q_r \text{ nach } q_t \text{ hat nur} \\ \text{Zwischenzustände } \{q_1, \ldots, q_i\} \end{array} \right\}$$

Wir zeigen, dass L_{q_r,i,q_t} für $q_r, q_t \in Q$ und $1 \leq i \leq n$ regulär sind:

- Zunächst betrachten wir direkte Überführungen, also $i = 0$:

  $$L_{q_r,0,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Abarbeitung von } w \text{ führt von } q_r \text{ nach } q_t \\ \text{ohne Zwischenzustand} \end{array} \right\}$$

  Falls $r = t$ und somit $q_r = q_t$ ist, ist

  $$L_{q_r,0,q_t} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_t, a) = q_t\} \cup \{\varepsilon\}\ .$$

  Andernfalls betrachten wir alle w mit $q_r \xrightarrow{w} q_t$, ohne Zwischenzustände, also

  $$L_{q_r,0,q_t} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_r, a) = q_t\}\ .$$

  Diese Sprachen sind jeweils regulär.

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

- Betrachte nun $i = 1$:

$$L_{q_r,1,q_t} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} w \text{ überführt } q_r \text{ in } q_t \text{ entweder direkt oder} \\ \text{unter Benutzung nur von } q_1 \end{array} \right\}$$

  Es gilt dann:

$$L_{q_r,1,q_t} = L_{q_r,0,q_t} \cup \left(L_{q_r,0,q_1} \cdot L^*_{q_1,0,q_1} \cdot L_{q_1,0,q_t} \right)$$

  Also ist $L_{q_r,1,q_t}$ auch wieder regulär.

- Es gilt allgemein:

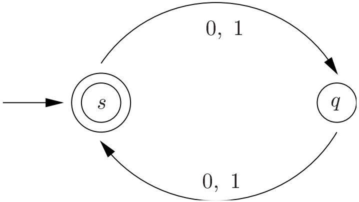
$$L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup \left(L_{q_r,i,q_{i+1}} \left(L_{q_{i+1},i,q_{i+1}} \right)^* L_{q_{i+1},i,q_t} \right)$$

Beweis: EA $\rightarrow$ Regularität

- Es wurden für $L_{\cdot,i+1,\cdot}$ nur die Sprachen $L_{\cdot,i,\cdot}$ und $\cup, \cdot, *$ verwendet.
- Damit ist gezeigt (per Induktion), dass $L_{\cdot,i+1,\cdot}$ regulär ist für beliebiges i $(1 \leq i+1 \leq n)$ und alle Zustandspaare aus Q^2.
- Damit ist gezeigt, dass insbesondere $L_f = L_{s,n,f}$ regulär ist für jedes $f \in F$.

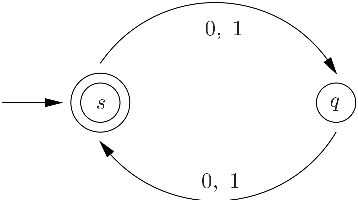
Beispiel

Sei $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $Q := \{q_1 := s, q_2 := q\}, \Sigma := \{0, 1\}, F := \{s\}$



Gesucht: $L(Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Es gilt $L = L_{q_1,2,q_1}$.

Beispiel



Gesucht: $L(Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Es gilt $L = L_{q_1,2,q_1}$.

Dann ist

$$L_{q_i,0,q_i} = \varepsilon$$

$$L_{q_i,0,q_j} = (0 \cup 1) \text{ für } i, j \in \{1,2\}, i \neq j$$

$$L_{q_1,1,q_1} = L_{q_1,0,q_1} \cup L_{q_1,0,q_1} \left(L_{q_1,0,q_1}\right)^* L_{q_1,0,q_1} = \varepsilon$$

$$L_{q_1,1,q_2} = L_{q_1,0,q_2} \cup L_{q_1,0,q_1} (L_{q_1,0,q_1})^* L_{q_1,0,q_2} = (0 \cup 1) \cup \varepsilon\varepsilon^* (0 \cup 1) = 0 \cup 1$$

$$L_{q_2,1,q_1} = (0 \cup 1) \cup (0 \cup 1)\varepsilon^*\varepsilon = 0 \cup 1$$

$$L_{q_2,1,q_2} = \varepsilon \cup (0 \cup 1)\varepsilon^*(0 \cup 1) = \varepsilon \cup (0 \cup 1)(0 \cup 1)$$

$$\begin{aligned} L = L_{q_1,2,q_1} &= L_{q_1,1,q_1} \cup (L_{q_1,1,q_2} (L_{q_2,1,q_2})^* L_{q_2,1,q_1}) \\ &= \varepsilon \cup (0 \cup 1) \left((0 \cup 1)(0 \cup 1)\right)^* (0 \cup 1) = ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^* \end{aligned}$$

Satz von Kleene

- Wir haben gezeigt, dass die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen genau die regulären Sprachen sind.
- Dies wird auch als der **Satz von Kleene** bezeichnet.

Satz (Satz von Kleene):
Die von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel:
Die Sprache L der korrekten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{(,)\}$.
Etwa

$$\Big(()()\Big), \left(()()\Big(()\Big)\right) \in L \qquad ((()), (()))()(\notin L$$

Frage: Was können endliche Automaten nicht?

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel:
Die Sprache L der korrekten Klammerausdrücke über $\Sigma = \{(,)\}$.
Etwa

$$\Big(()()\Big), \left(()()\Big(()\Big)\right) \in L \qquad ((()), (()))()(\notin L$$

- Die Klammerung ist genau dann korrekt, wenn w gleich viele öffnende wie schließende Klammern enthält, und wenn man w von links nach rechts liest, so gibt es nie mehr „)“ als „(“ bis dahin.
- Ein Automat, der L erkennen kann, muss in der Lage sein, sich für ein beliebiges Wort $w \in L$ die Anzahl von (gegenüber) zu merken.
- Dies kann aber beliebig groß werden, und der Automat müsste über unendliche viele Zustände verfügen.
- Die Sprache der Klammerausdrücke ist also zwar simpel, aber wohl nicht regulär.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

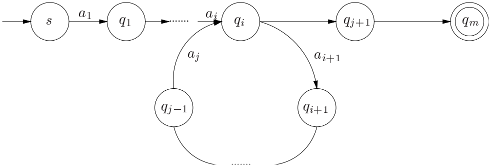
- Sei L eine reguläre Sprache.
- Dann existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.
- Sei Q dessen Zustandsmenge und $n := |Q|$.
- Sei $w \in L$ mit $|w| > n$, etwa $w = a_1 \dots a_n \dots a_m$ mit $m > n$.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Beweis:

- Sei L eine reguläre Sprache.
- Dann existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.
- Sei Q dessen Zustandsmenge und $n := |Q|$.
- Sei $w \in L$ mit $|w| > n$, etwa $w = a_1 \ldots a_n \ldots a_m$ mit $m > n$.

Bei der Abarbeitung von w werden dann die Zustände $q_0, \ldots, q_m$ durchlaufen mit $q_m \in F$.
Dann gibt es i, j mit $0 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$, so dass $q_i = q_j$. Œ gelte $i < j$.

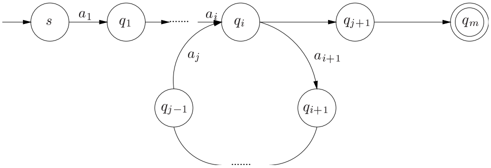


Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.



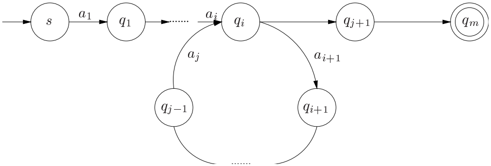
Dann kann der Zykel $q_i, q_{i+1}, \ldots, q_j = q_i$ auch gar nicht oder beliebig oft bei der Abarbeitung eines Wortes aus L durchlaufen werden so dass der Zustand $q_m \in F$ erreicht wird.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\; v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.



Also gibt es eine Zerlegung $w = \underbrace{(a_1 \ldots a_i)}_{u} \cdot \underbrace{(a_{i+1} \ldots a_j)}_{v} \cdot \underbrace{(a_{j+1} \ldots a_m)}_{x}$

mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so dass auch $uv^ix \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung

- Das Pumping-Lemma liefert nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Regularität von Sprachen.

Beispiel (1) zum PL

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Gegeben sei

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält 10 nicht als Teilwort }\} = 0^*1^*$

Betrachte

- $n = 1, \qquad w = uvx, \qquad u = \varepsilon$

Dann

- entspricht v also dem ersten Buchstaben von w
- kann uv^ix auch 10 nicht als Teilwort besitzen.

Beispiel (2) zum PL

Satz:
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{0^i1^i \mid i \geq 0\}$. Wir zeigen: L ist nicht regulär.

- Für ein n wähle $w = 0^n1^n$
- Dann ist $|w| > n$
- Für jede Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ ist aber

$$uv^0x = 0^l1^n \notin L \qquad (l < n)$$

Beispiel (3) zum PL

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w = 1^k \ (k > 0) \text{ oder } w = 0^j 1^{k^2} \ (j \geq 1,\ k \geq 0) \right\}.$$

Dann erfüllt L die Darstellung des PL:

- Sei $n = 1$ und $w \in L$ mit $|w| > 1$.
- w habe eine Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$.

Setze $u = \varepsilon$ und $|v| = 1$ das erste Symbol von w.

- Falls $w = 1^k$, so ist auch $uv^i x$ vom Typ $1^\ell \in L$.
- Falls $w = 0^j 1^{k^2}$, so ist auch $uv^0 x \in L$ (für $j = 1$ ist $uv^0 x = x = 1^{k^2}$). Für $i \geq 1$ gilt $uv^i x = 0^{j+i} 1^{k^2} \in L$.

Trotzdem ist L nicht regular. Dies lässt sich mit dem verallgemeinertem Pumping Lemma zeigen.