# Theoretische Grundlagen der Informatik

## Vorlesung am 27. Januar 2015

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Greibach Normalform

**Greibach Normalform**

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Greibach-Normalform**, wenn alle Ableitungsregeln von der Form

$$A \rightarrow a\alpha \text{ mit } A \in V, a \in \Sigma \text{ und } \alpha \in V^*$$

sind.

**Satz**:

Für jede kontextfreie Grammatik $G$, für die $L(G)$ das leere Wort nicht enthält, kann eine (äquivalente) kontextfreie Grammatik $G'$ mit $L(G) = L(G')$ in Greibach-Normalform konstruiert werden.

# Beweis - Ersetzung (i)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

**Ersetzung (i).** Eine Regel

$$A \to \alpha_1 B \alpha_2$$

wobei

$$B \to \beta_1, \quad B \to \beta_2, \quad \dots, \quad B \to \beta_r$$

alle Regeln sind, deren linke Seite $B$ ist, kann durch die Regeln

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \\ A &\to \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \\ &\dots \\ A &\to \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \end{aligned}$$

ersetzt werden.



INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Beweis - Ersetzung (ii)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

**Ersetzung (ii).** Seien

$$\begin{array}{rcl} A & \to & A\alpha_1, \dots, A \to A\alpha_r \\ A & \to & \beta_1, \dots, A \to \beta_s \end{array}$$

alle Regeln, deren linke Seite A ist, wobei $\beta_i$ nicht mit $A$ beginnen. Dann können die Regeln

$$A \to A\alpha_1, \dots, A \to A\alpha_r$$

durch die Regeln

$$\begin{array}{rcl} A & \to & \beta_1 B, \dots, A \to \beta_s B \\ B & \to & \alpha_1, \dots, B \to \alpha_r, \\ B & \to & \alpha_1 B, \dots, B \to \alpha_r B \end{array}$$

ersetzt werden. Dabei sei $B$ eine neu eingeführte Variable.

# Beweis - Definitionen

Annahme $G$ ist in Chomsky-Normalform mit

$$V = \{A_1, \ldots, A_m\}$$
$$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

und damit ausschließlich Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Die Grammatik in Greibach-Normalform wird zusätzlich die Variablen $\{B_1, \ldots, B_m\}$ benutzen. Sei

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\}$$

# Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

**1.Invariante**
Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

# Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

**2.Invariante**
Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

# Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

**3.Invariante**
Symbole aus $\Sigma$ kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

# Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \; .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

**4.Invariante**
Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus $V$ beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus $V$.

# Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \rightarrow A_j A_k$$
$$A_i \rightarrow a_j \; .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

**5.Invariante**
Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \ldots, B_m\}$ ist, besteht nur aus Variablen aus $V'$.

# Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \; .$$

Wir formen $G$ zunächst so um, dass außer Invarianten 1-5 noch die nächste Invariante gilt:

**6.Invariante**
Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

# Beweis - Übersicht Invarianten

Karlsruher Institut für Technologie

**1.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

**2.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus $V = \{A_1, \dots, A_m\}$.

**3.Invariante** Symbole aus $\Sigma$ kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

**4.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus $V$ beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus $V$.

**5.Invariante** Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \dots, B_m\}$ ist, besteht nur aus Variablen aus $V'$.

**6.Invariante** Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

# Beweis: Beispielgrammatik

$$\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\
&\quad A_3 \to A_1 A_2,\ A_3 \to 0\}
\end{aligned}$$

# Beweis - Verfahren - Schritt 1

**Vorher:** Grammatik in Chomsky-Normalform
**Nachher:** 6. Invariante hält: Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

**Aktion:** Dabei wenden wir (in dieser Reihenfolge)

| | |
|---|---|
| Ersetzung (ii) | zur Ersetzung aller Regeln $A_1 \to A_1\alpha$ |
| Ersetzung (i) | zur Ersetzung aller Regeln $A_2 \to A_1\alpha$ |
| Ersetzung (ii) | zur Ersetzung aller Regeln $A_2 \to A_2\alpha$ |
| Ersetzung (i) | zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_1\alpha$ |
| Ersetzung (i) | zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_2\alpha$ |
| Ersetzung (ii) | zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_3\alpha$ |
| | $\vdots$ |

# Beweis - Schritt 1 - Beispiel

## Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\rightarrow \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \ldots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\ B &\rightarrow \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \rightarrow A_3 A_1,\ A_2 \rightarrow 1, \\ &\quad A_3 \rightarrow A_1 A_2,\ A_3 \rightarrow 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \rightarrow A_3 A_1,\ A_2 \rightarrow 1, \\ &\quad A_3 \rightarrow A_2 A_3 A_2,\ A_3 \rightarrow 0\} \end{aligned}$$

# Beweis - Schritt 1 - Beispiel

## Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ &\quad A_3 \to A_2 A_3 A_2,\ A_3 \to 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \dots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \beta_2, \dots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ &\quad A_3 \to A_3 A_1 A_3 A_2 | 1 A_3 A_2, \\ &\quad A_3 \to 0\} \end{aligned}$$

# Beweis - Schritt 1 - Beispiel

## Ersetzung (ii)

$$\begin{aligned} A &\to A\alpha_1, \ldots, A \to A\alpha_r \\ A &\to \beta_1, \ldots, A \to \beta_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\to \beta_1 B, \ldots, A \to \beta_s B \\ B &\to \alpha_1, \ldots, B \to \alpha_r, \\ B &\to \alpha_1 B, \ldots, B \to \alpha_r B \\ A &\to \beta_1, \ldots, A \to \beta_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ &\quad A_3 \to A_3 A_1 A_3 A_2, \\ &\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ &\quad A_3 \to 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\ &\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3 \\ &\quad A_3 \to 0 | 1 A_3 A_2\} \end{aligned}$$

# Beweis - Verfahren - Schritt 2

**Vorher:** Alle Regeln sind von der Form

$$\begin{aligned} A &\to a\alpha \\ A &\to \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*, a \in \Sigma \end{aligned}$$

wobei es keine $\varepsilon$-Regeln oder Kettenregeln mit linker Seite $A \in V$ gibt.
Wegen Invariante 6

- gibt es keine Regel $A_m \to \alpha$
- beginnen alle $A_{m-1} \to \alpha$-Regeln mit $A_m$.

**Aktion:** Ersetze mit absteigenden $k$ alle Regeln der Form

$$A_k \to \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*$$

mittels Ersetzung (i).

**Nachher:** Regeln mit linker Seite in $V$ in Form $A_k \to a\alpha$, $a \in \Sigma, \alpha \in (V')^*$.

# Beweis - Schritt 2 - Beispiel

## Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\rightarrow \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \rightarrow A_3 A_1, \\ &\quad A_2 \rightarrow 1, \\ &\quad A_3 \rightarrow 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\ &\quad A_3 \rightarrow 0 | 1 A_3 A_2\} \\ &\quad B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \ldots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\ B &\rightarrow \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \rightarrow 0 B_3 A_1 | 1 A_3 A_2 B_3 A_1 \\ &\quad A_2 \rightarrow 0 A_1 | 1 A_3 A_2 A_1 \\ &\quad A_2 \rightarrow 1, \\ &\quad A_3 \rightarrow 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\ &\quad A_3 \rightarrow 0 | 1 A_3 A_2\} \\ &\quad B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3 \end{aligned}$$

# Beweis - Schritt 2 - Beispiel

## Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to 0 B_3 A_1 \mid 1 A_3 A_2 B_3 A_1 \\ &\quad A_2 \to 0 A_1 \mid 1 A_3 A_2 A_1 \mid 1 \\ &\quad A_3 \to 0 B_3 \mid 1 A_3 A_2 B_3, \\ &\quad A_3 \to 0 \mid 1 A_3 A_2\} \\ &\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 \mid A_1 A_3 A_2 B_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to 0 B_3 A_1 A_3 \\ &\quad A_1 \to 1 A_3 A_2 B_3 A_1 A_3, \\ &\quad A_1 \to 0 A_1 A_3 \mid 1 A_3 A_2 A_1 A_3 \mid 1 A_3, \\ &\quad A_2 \to 0 B_3 A_1 \mid 1 A_3 A_2 B_3 A_1 \\ &\quad A_2 \to 0 A_1 \mid 1 A_3 A_2 A_1 \mid 1 \\ &\quad A_3 \to 0 B_3 \mid 1 A_3 A_2 B_3, \\ &\quad A_3 \to 0 \mid 1 A_3 A_2\} \\ &\quad B_3 \to A_1 A_3 A_2 \mid A_1 A_3 A_2 B_3 \end{aligned}$$

# Beweis - Verfahren - Schritt 3

**Vorher:** Rechte Seiten von Regeln, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \ldots, B_m\}$ ist, beginnen mit einer Variablen aus $\{A_1, \ldots, A_m\}$ (wegen Invarianten 2 und 5).

**Aktion:** Ersetze Regeln $B_i \to A_j\alpha, \qquad \alpha \in (\Sigma \cup V')^*$ mit Ersetzung (i).

**Nachher:** $G$ ist in Greibach-Normalform.

# Beweis - Schritt 3 - Beispiel

## Ersetzung (i)

$$A_1 \rightarrow 0B_3A_1A_3$$
$$A_1 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$
$$A_1 \rightarrow 0A_1A_3 | 1A_3A_2A_1A_3 | 1A_3,$$
$$A_2 \rightarrow 0B_3A_1 | 1A_3A_2B_3A_1$$
$$A_2 \rightarrow 0A_1 | 1A_3A_2A_1 | 1$$
$$A_3 \rightarrow 0B_3 | 1A_3A_2B_3,$$
$$A_3 \rightarrow 0 | 1A_3A_2\}$$
$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2 | A_1A_3A_2B_3$$

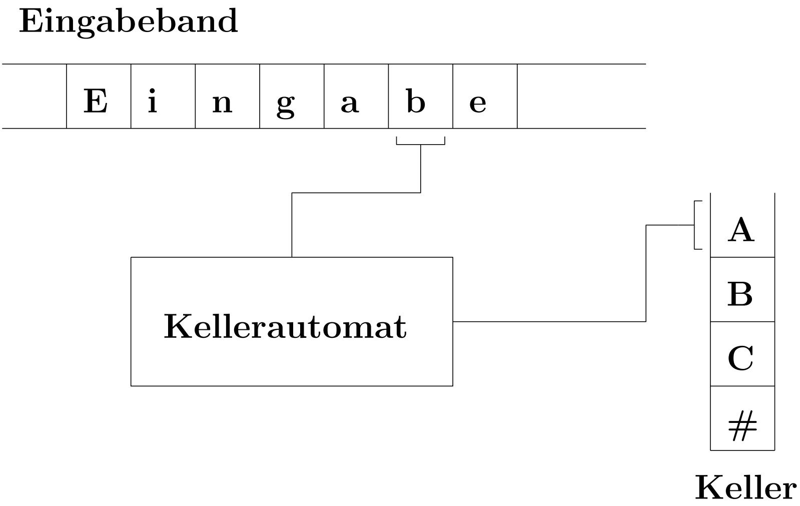
$$A_1 \rightarrow 0B_3A_1A_3$$
$$A_1 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3,$$
$$A_1 \rightarrow 0A_1A_3 | 1A_3A_2A_1A_3 | 1A_3,$$
$$A_2 \rightarrow 0B_3A_1 | 1A_3A_2B_3A_1$$
$$A_2 \rightarrow 0A_1 | 1A_3A_2A_1 | 1$$
$$A_3 \rightarrow 0B_3 | 1A_3A_2B_3,$$
$$A_3 \rightarrow 0 | 1A_3A_2\}$$
$$B_3 \rightarrow 1A_3A_3A_2 | 0B_3A_1A_3A_3A_2$$
$$B_3 \rightarrow 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2 | 0A_1A_3A_3A_2$$
$$B_3 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2 | 1A_3A_3A_2B_3$$
$$B_3 \rightarrow 0B_3A_1A_3A_3A_2B_3 | 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3$$
$$B_3 \rightarrow 0A_1A_3A_3A_2B_3$$
$$B_3 \rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3$$

# Kellerautomaten

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat** (NPDA bzw. PDA, Push-down Automaton) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$, wobei

- $Q$ endliche Zustandsmenge
- $\Sigma$ endliches Eingabealphabet
- $\Gamma$ endliches STACK-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des STACK
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Endzustände, $F = \emptyset$ ist möglich.

# Kellerautomaten - Visualisierung



# Kellerautomaten - Arbeitsweise

Eine **Konfiguration eines PDA** ist ein Tripel $(q, w, \alpha)$ mit

- $q \in Q$,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Zu Konfiguration $(q, w_1 \dots w_k, Z_1 \dots Z_m)$ gibt es die **Nachfolgekonfigurationen**:

$$(q', w_2 \dots w_k, Z_1' \dots Z_r' Z_2 \dots Z_m) \text{ für alle } (q', Z_1' \dots Z_r') \in \delta(q, w_1, Z_1)$$

und

$$(q', w_1 \dots w_k, Z_1' \dots Z_r' Z_2 \dots Z_m) \text{ für alle } (q', Z_1' \dots Z_r') \in \delta(q, \varepsilon, Z_1).$$

# Kellerautomaten - Arbeitsweise

Karlsruher Institut für Technologie

Ein PDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch leeren Stack**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration $(q_0, w, Z_0)$ in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Ein PDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch einen akzeptierenden Endzustand**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration $(q_0, w, Z_0)$ in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \gamma)$ mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Ein PDA ist **deterministisch** (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$.

# Kellerautomaten - Beispiel

**Ein DPDA für $L = \{w\#w^R | w \in \{0,1\}^*\}$. Informelle Beschreibung:**

- Betrachte beliebiges Wort $w_1 \dots w_n \# w_n \dots w_1 \in L$.

### Phase 1

- Lies $w_1 \dots w_n$ und schreibe jeweils $w_i$ auf den STACK bis $\#$ gelesen.

### Phase 2

- Lies $w_n \dots w_1$ und vergleiche den jeweils gelesenen Buchstaben mit dem jeweils obersten Buchstaben auf dem STACK.
  - Gleichheit: Nimm obersten Buchstaben vom STACK
  - Sonst: Stoppe in nichtakzeptierenden Zustand

### Phase 3

- Ist nur noch $Z_0$ auf dem STACK
  - Entferne $Z_0$
  - Akzeptiere die Eingabe „mit leerem STACK“

# Kellerautomaten - Beispiel

**Ein DPDA für $L = \{w\#w^R | w \in \{0,1\}^*\}$.**

$$(Q = \{q_0, q_1, q_2\},\ \Sigma = \{0, 1, \#\},\ \Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}),\ q_0,\ Z_0,\ \delta,\ \emptyset)$$

$$\begin{array}{lcll}
\delta(q_0, 0, Z_0) & = & (q_1, 0Z_0) & \text{Phase 1} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) & = & (q_1, 1Z_0) & \\
\delta(q_1, 0, 0) & = & (q_1, 00) & \\
\delta(q_1, 0, 1) & = & (q_1, 01) & \\
\delta(q_1, 1, 0) & = & (q_1, 10) & \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & (q_1, 11) & \\
\delta(q_1, \#, 0) & = & (q_2, 0) & \text{Trennzeichen gelesen} \Rightarrow \text{Zu Phase 2} \\
\delta(q_1, \#, 1) & = & (q_2, 1) & \\
\delta(q_2, 0, 0) & = & (q_2, \varepsilon) & \text{Phase 2} \\
\delta(q_2, 1, 1) & = & (q_2, \varepsilon) & \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) & = & (q_2, \varepsilon) & \text{Phase 3}
\end{array}$$

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0) \\
\\
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11) \\
\\
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1) \\
\\
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon) \\
\\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
| --- | --- | --- |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |



INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0) \\[6pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11) \\[6pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1) \\[6pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon) \\[6pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[4pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[4pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[4pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[4pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |
| $q_1$ | $1\#100$ | $00Z_0$ |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0)\\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0)\\[4pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00)\\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01)\\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10)\\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11)\\[4pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0)\\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1)\\[4pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon)\\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon)\\[4pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |
| $q_1$ | $1\#100$ | $00Z_0$ |
| $q_1$ | $\#100$ | $100Z_0$ |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(q_0, 0, Z_0) & = & (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) & = & (q_1, 1Z_0) \\
\\
\delta(q_1, 0, 0) & = & (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) & = & (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) & = & (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & (q_1, 11) \\
\\
\delta(q_1, \#, 0) & = & (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) & = & (q_2, 1) \\
\\
\delta(q_2, 0, 0) & = & (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) & = & (q_2, \varepsilon) \\
\\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) & = & (q_2, \varepsilon)
\end{array}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |
| $q_1$ | $1\#100$ | $00Z_0$ |
| $q_1$ | $\#100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $00$ | $00Z_0$ |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0) \\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11) \\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1) \\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon) \\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |
| $q_1$ | $1\#100$ | $00Z_0$ |
| $q_1$ | $\#100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $00$ | $00Z_0$ |
| $q_2$ | $0$ | $0Z_0$ |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0) \\[4pt]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11) \\[4pt]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1) \\[4pt]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon) \\[4pt]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |
| $q_1$ | $1\#100$ | $00Z_0$ |
| $q_1$ | $\#100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $00$ | $00Z_0$ |
| $q_2$ | $0$ | $0Z_0$ |
| $q_2$ | | $Z_0$ |

# Beispiel - Berechnung für Eingabe 001#100

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= (q_1, 0Z_0) \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= (q_1, 1Z_0) \\[1ex]
\delta(q_1, 0, 0) &= (q_1, 00) \\
\delta(q_1, 0, 1) &= (q_1, 01) \\
\delta(q_1, 1, 0) &= (q_1, 10) \\
\delta(q_1, 1, 1) &= (q_1, 11) \\[1ex]
\delta(q_1, \#, 0) &= (q_2, 0) \\
\delta(q_1, \#, 1) &= (q_2, 1) \\[1ex]
\delta(q_2, 0, 0) &= (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_2, 1, 1) &= (q_2, \varepsilon) \\[1ex]
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

| Zustand | Eingabe | Stack |
|---|---|---|
| $q_0$ | $001\#100$ | $Z_0$ |
| $q_1$ | $01\#100$ | $0Z_0$ |
| $q_1$ | $1\#100$ | $00Z_0$ |
| $q_1$ | $\#100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $100$ | $100Z_0$ |
| $q_2$ | $00$ | $00Z_0$ |
| $q_2$ | $0$ | $0Z_0$ |
| $q_2$ | | $Z_0$ |

akzeptiert durch leeren Stack

# Kellerautomaten - Beispiel 2

**Ein NPDA für $L = \{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$. Informelle Beschreibung:**

- In diesem Fall fehlt das Trennzeichen.
- Der NPDA funktioniert wie der DPDA aus dem letzten Beispiel
- Der Übergang in Phase 2 funktioniert allerdings nichtdeterministisch.

**Bemerkung:**

- Für die Sprache $L = \{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$ gibt es keinen DPDA.
- NPDAs können also mehr als DPDAs.

# Kellerautomaten - Beispiel 2

Karlsruher Institut für Technologie

**Ein NPDA für $L = \{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$.**

$$(Q = \{q_0, q_1, q_2\},\ \Sigma = \{0, 1, \#\},\ \Gamma = \Sigma \cup \{Z_0\}),\ q_0,\ Z_0,\ \delta,\ \emptyset)$$

$$\begin{array}{lcll}
\delta(q_0, 0, Z_0) & = & \{(q_1, 0Z_0)\} & \text{Phase 1} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) & = & \{(q_1, 1Z_0)\} & \\
\delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, 00), (q_2, \epsilon)\} & \\
\delta(q_1, 0, 1) & = & \{(q_1, 01)\} & \\
\delta(q_1, 1, 0) & = & \{(q_1, 10)\} & \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & \{(q_1, 11), (q_2, \epsilon)\} & \\
\delta(q_2, 0, 0) & = & \{(q_2, \varepsilon)\} & \text{Phase 2} \\
\delta(q_2, 1, 1) & = & \{(q_2, \varepsilon)\} & \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) & = & \{(q_2, \varepsilon)\} & \text{Phase 3}
\end{array}$$

**Satz**:
Zu einem PDA, der eine Sprache $L$ durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert, kann ein PDA konstruiert werden, der $L$ mit leerem STACK akzeptiert.

# Beweis - Beschreibung

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ PDA, der $L$ durch Übergang in einen Zustand aus $F_1$ akzeptiert.
- Wir konstruieren dazu einen PDA $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, der $L$ durch leeren STACK akzeptiert.
- Sei $q_E$ ein neuer Zustand
- Sei $Z_0^2$ ein neues Stack-Symbol

**Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$.**

- Lege zu Beginn $Z_0^2$ vor $Z_0^1$ auf den Stack, so dass der Stack nicht „versehentlich“ geleert werden kann.
- Dann Verfahre wie in $\mathcal{A}_1$.
- Wenn Zustand in $F_1$ erreicht wird: Gehe zu $q_E$ und leere den Stack

# Beweis - Konstruktion

- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ akzeptiert durch Endzustand
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, akzeptiert durch leeren Stack
- Sei $q_E$ ein neuer Zustand
- Sei $Z_0^2$ ein neues Stack-Symbol

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= Q_1 \cup \{q_0^2, q_E\} \\
\Gamma_2 &= \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\} \\
\delta_2(q_0^2, \varepsilon, Z_0^2) &= \{(q_0^1, Z_0^1 Z_0^2)\} \\
\delta_2(q, a, Z) &= \delta_1(q, a, Z) \text{ für } q \in Q_1,\ a \neq \varepsilon,\ Z \in \Gamma_1 \\
&\qquad\qquad q \in Q_1 \setminus F_1,\ a = \varepsilon,\ Z \in \Gamma_1 \\
\delta_2(q, \varepsilon, Z) &= \delta_1(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } q \in F_1,\ Z \in \Gamma_2 \\
\delta_2(q_E, \varepsilon, Z) &= \{(q_E, \varepsilon)\} \text{ für } Z \in \Gamma_2 \\
\delta(\cdot) &= \emptyset \text{ sonst}
\end{aligned}
$$

**Satz**:
Zu einem PDA, der eine Sprache $L$ mit leerem STACK akzeptiert, kann ein PDA konstruiert werden, der $L$ durch einen akzeptierenden Endzustand akzeptiert.

# Beweis - Beschreibung

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1)$, ein PDA der $w \in L$ mit leerem STACK akzeptiert
- Wir konstruieren dazu einen PDA $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2, F_2)$, der genau die $w \in L$ durch Übergang in einen Zustand $q \in F_2$ akzeptiert.
- Sei $Z_0^2$ ein neues Stack-Symbol
- Sei $q_F$ ein neuer (End-)Zustand
- Sei $q_0^2$ ein neuer (Anfangs-)Zustand

**Idee der Konstruktion von $\mathcal{A}_2$.**

- Lege zu Beginn $Z_0^2$ vor $Z_0^1$ auf den Stack, und lösche $Z_0^2$ nur, wenn die Abarbeitung von $\mathcal{A}_1$ durch leeren Stack akzeptiert hätte.
- Gehe in Endzustand $q_F$, wenn $\mathcal{A}_1$ durch leeren Stack akzeptiert hätte.

# Beweis - Konstruktion

- $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, Z_0^1, F_1)$ akzeptiert durch leeren Stack
- $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_0^2, Z_0^2)$, akzeptiert durch Endzustand
- $q_0^2$ neuer Anfangszustand
- $q_F$ neuer (End-)Zustand
- $Z_0^2$ ein neues Stack-Symbol

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \cup \{q_0^2, q_F\}, \\ F_2 &= \{q_F\} \\ \Gamma_2 &= \Gamma_1 \cup \{Z_0^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2(q_0^2, a, X) &= \begin{cases} \{q_0^1, Z_0^1 Z_0^2\} & \text{falls } a = \varepsilon \text{ und } X = Z_0^2 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \\ \delta_2(q, a, Z) &= \delta_1(q, a, Z), \text{ falls } q \in Q_1, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ und } Z \in \Gamma_1 \\ \delta_2(q, \varepsilon, Z_0^2) &= \{(q_F, \varepsilon)\} \text{ für } q \in Q_1. \end{aligned}$$


INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

**Satz**:
Für eine Grammatik $G$ in Greibach-Normalform kann ein PDA konstruiert werden, der $L(G)$ mit leerem STACK akzeptiert.

# Beweis

- Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine Grammatik in Greibach Normalform
- Konstruiere gewünschten Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$

$$
\begin{aligned}
Q &:= \{q_0\} \\
\Gamma &:= V \\
Z_0 &:= S \\
\delta(q_0, a, A) &:= \{(q_0, \alpha) | (A \to a\alpha) \in R\}
\end{aligned}
$$

Per Induktion über die Länge $i$ einer Ableitung beweisen wir:

- $S \xrightarrow{*} w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}$ kann beim Lesen von $w_1 \dots w_i$ den STACK-Inhalt $A_1 \dots A_m$ erzeugen. Möglicherweise ist $A_1 \dots A_m = \epsilon$.

Daraus folgt:

- $\mathcal{A}$ erkennt $w_1 \dots w_n$ mit leerem STACK $\Leftrightarrow S \xrightarrow{*} w_1 \dots w_n$ in $G$

# Beweis

$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S$$
$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \alpha) | (A \to a\alpha) \in R\}$$

**Induktionsanfang** ist mit $i = 0$ trivialerweise erfüllt.
**Induktionsschritt:**
Sei $i \geq 1$ und „$\xrightarrow{j}$“ stehe für eine Ableitung der Länge $j$. Dann gilt

$$S \xrightarrow{i} w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \iff \begin{array}{l} \exists A' \in V, r \in \{1, \dots, m\} \text{ mit} \\ S \xrightarrow{i-1} w_1 \dots w_{i-1} A' A_r \dots A_m \\ \to w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m. \end{array}$$

Mit Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu

$\exists A' \in V, r \in \{1, \dots, m\}$ so, dass

- $\mathcal{A}$ das Wort $w_1 \dots w_{i-1}$ lesen und dabei STACK-Inhalt $A' A_r \dots A_m$ erzeugen kann, und
- $A' \to w_i A_1 \dots A_{r-1}$ Regel von $G$ ist.


INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Beweis

$$Q := \{q_0\} \quad \Gamma := V \quad Z_0 := S$$
$$\delta(q_0, a, A) := \{(q_0, \alpha) | (A \to a\alpha) \in R\}$$

**Induktionsanfang** ist mit $i = 0$ trivialerweise erfüllt.
**Induktionsschritt:**
Sei $i \geq 1$ und „$\xrightarrow{j}$“ stehe für eine Ableitung der Länge $j$.
Mit Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu

$\exists A' \in V, r \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass

- $\mathcal{A}$ das Wort $w_1 \ldots w_{i-1}$ lesen und dabei STACK-Inhalt $A'A_r \ldots A_m$ erzeugen kann, und
- $A' \to w_i A_1 \ldots A_{r-1}$ Regel von $G$ ist.

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\mathcal{A}$ das Wort $w_1 \ldots w_i$ lesen und dabei den STACK-Inhalt $A_1 \ldots A_m$ erzeugen kann.