

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 15.01.2015

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Syntaxbäume visualisieren die Ableitung eines einzelnen Wortes.

- An der Wurzel eines Syntaxbaumes steht das Startsymbol.
- Jeder innere Knoten enthält eine Variable.
- Die Blätter sind Symbole aus Σ oder ε .
- Wenn ein innerer Knoten A als Nachfolger von links nach rechts $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V \cup \Sigma$ hat, so muss $A \rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_r$ eine Ableitungsregel der Grammatik sein.

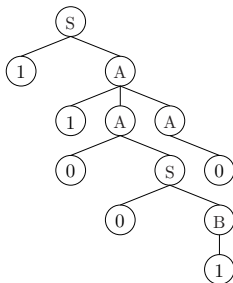
Syntaxbäume - Beispiel

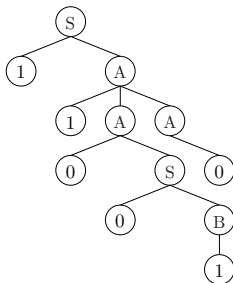
Zu den Regeln

$$R = \{S \rightarrow 0B \mid 1A, A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA, B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

betrachte die Ableitung

$$S \rightarrow 1A \rightarrow 11AA \rightarrow 11A0 \rightarrow 110S0 \rightarrow 1100B0 \rightarrow 110010.$$





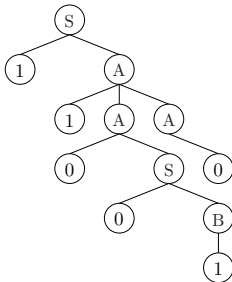
- Zu jeder Ableitung gehört genau ein Syntaxbaum.
- Zu jedem Syntaxbaum gehören jedoch verschiedene Ableitungen des gleichen Wortes.

Syntaxbäume - Beispiel

$$R = \{S \rightarrow 0B \mid 1A, A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA, B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

$$S \rightarrow 1A \rightarrow 11AA \rightarrow 110SA \rightarrow 1100BA \rightarrow 11001A \rightarrow 110010$$

$$S \rightarrow 1A \rightarrow 11AA \rightarrow 11A0 \rightarrow 110S0 \rightarrow 1100B0 \rightarrow 110010$$



Für Chomsky-2 Grammatiken gilt:

- Wegen der Kontextfreiheit ist die Reihenfolge, in der abgeleitet wird, für das Ergebnis unerheblich.

Eine **Linksableitung** (**Rechtsableitung**) ist eine Ableitung, bei der in jedem Schritt die linkeste (rechtste) Variable abgeleitet wird.

Eine kontextfreie Grammatik G heißt **eindeutig**, wenn es für jedes Wort $w \in L(G)$ genau einen Syntaxbaum gibt.

Eine kontextfreie Sprache L heißt **eindeutig**, wenn es eine eindeutige Grammatik G mit $L(G) = L$ gibt. Ansonsten heißt L **inhärent mehrdeutig**.

Beispiel

Die Sprache

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

erzeugt durch die Grammatik

$$V = \{S\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$R = \{S \rightarrow 01 \mid 0S1\}$$

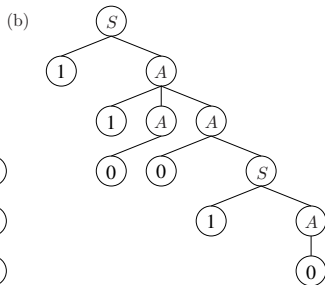
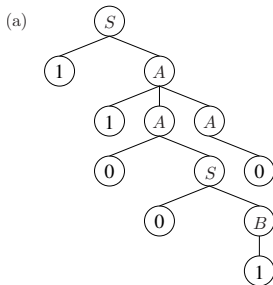
ist eindeutig.

Beispiel

Die Sprache gegeben durch die Regeln

$$R = \{S \rightarrow 0B \mid 1A, A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA, B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

ist nicht eindeutig.



Eine kontextfreie Grammatik ist in **Chomsky-Normalform**, wenn alle Regeln von der Form:

$$A \rightarrow BC \quad \text{oder} \quad A \rightarrow a$$

sind, mit $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$.

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Chomsky-Normalform**, wenn alle Regeln von der Form:

$$A \rightarrow BC \quad \text{oder} \quad A \rightarrow a$$

sind, mit $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$.

- Grammatiken in Chomsky-Normalform können also nicht das Wort ε erzeugen.
- Für kontextfreie Sprachen, die ε enthalten, lässt sich eine Grammatik leicht ergänzen durch die Regeln

$$S' \rightarrow \varepsilon \quad \text{und} \quad S' \rightarrow S,$$

wobei S' ein neues Startsymbol zur Erzeugung von ε ist.

Satz:

Jede kontextfreie Grammatik, die nicht das leere Wort erzeugt, kann in eine Grammatik in Chomsky–Normalform überführt werden.

Beweis (konstruktiv):

- Wir geben eine Schritt–für–Schritt–Überführung der Regeln in Regeln in Normalform an.
- Großbuchstaben repräsentieren immer Nichtterminale.
- Kleinbuchstaben repräsentieren immer Terminale.

Wir veranschaulichen den Beweis an folgendem Beispiel:
Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$V = \{A, B, C, D, E, S\}$$

und der folgenden Regelmenge R :

$$S \rightarrow A \mid aAa \mid bBb \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid CDE \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid ab$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

Ziel:

- Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus V oder nur ein Symbol aus Σ .

Vorgehen:

- Ersetze dazu in allen rechten Seiten von Regeln Symbole aus $a \in \Sigma$ durch neue Variablen Y_a und füge die Regeln $Y_a \rightarrow a$ hinzu.

Ziel:

- Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus V oder nur ein Symbol aus Σ .

Vorgehen:

- Ersetze dazu in allen rechten Seiten von Regeln Symbole aus $a \in \Sigma$ durch neue Variablen Y_a und füge die Regeln $Y_a \rightarrow a$ hinzu.

$$S \rightarrow A \mid aAa \mid bBb \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid CDE \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid ab$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

 \Rightarrow

$$S \rightarrow A \mid Y_aAY_a \mid Y_bBY_b \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid CDE \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid Y_aY_b$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_b \rightarrow b$$

Schritt 2

Ziel:

- Alle rechten Seiten haben Länge ≤ 2 .

Vorgehen:

- Sei $A \rightarrow B_1 \dots B_m$ Regel mit $m > 2$.
- Führe $m - 2$ neue Variablen C_1, \dots, C_{m-2} ein, und ersetze die Regel

$$A \rightarrow B_1 \dots B_m$$

durch neue Regeln

$$\begin{aligned} A &\rightarrow B_1 C_1 \\ C_i &\rightarrow B_{i+1} C_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq m-3 \\ C_{m-2} &\rightarrow B_{m-1} B_m \end{aligned}$$

Ziel:

- Alle rechten Seiten haben Länge ≤ 2 .

$$S \rightarrow A \mid Y_a A Y_a \mid Y_b B Y_b \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid CDE \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

\Rightarrow

$$S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid C C_3 \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

$$C_1 \rightarrow A Y_a$$

$$C_2 \rightarrow B Y_b$$

$$C_3 \rightarrow DE$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_b \rightarrow b$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_b \rightarrow b$$

Ziel:

- Es kommen keine Regeln $A \rightarrow \varepsilon$ vor.

Vorgehen, Phase 1:

Finde die Menge V' aller Variablen A für die $A \xrightarrow{*} \varepsilon$ existiert:

- Es werden erst alle A mit $A \rightarrow \varepsilon$ in V' aufgenommen.
- Dann wird geprüft, ob neue Regeln $B \rightarrow \varepsilon$ entstehen, wenn man A in allen Regeln auf der rechten Seite A durch ε ersetzt.
- Ist dies der Fall, so werden die entsprechenden Variablen B in V' aufgenommen und genauso behandelt.
- Das Verfahren hört auf, wenn V' sich nicht mehr ändert.

Ziel:

- Es kommen keine Regeln $A \rightarrow \varepsilon$ vor.

Vorgehen, Phase 1:

Finde die Menge V' aller Variablen A für die $A \xrightarrow{*} \varepsilon$ existiert:

- Bemerkung: In Phase 1 werden noch keine Regeln geändert.
- Die Ersetzung ist also nur „testweise“.
- Am Ende enthält V' alle Variablen A mit $A \xrightarrow{*} \varepsilon$.

Ziel:

- Es kommen keine Regeln $A \rightarrow \varepsilon$ vor.

Vorgehen, Phase 2: Ersetzung.

- Gegeben V' aus Phase 1.
 - Streiche alle Regeln $A \rightarrow \varepsilon$.
 - Für $A \rightarrow BC$ füge die zusätzliche Regel
 - $A \rightarrow B$ falls $C \in V'$,
 - $A \rightarrow C$ falls $B \in V'$
- ein.
- (Die Regel $A \rightarrow BC$ wird nicht gestrichen).

- Initialisierung
 $V' = \{A \mid A \rightarrow \varepsilon\} = \{S, C\}$
- Erster Durchlauf liefert: A
 $\Rightarrow V' = \{A, C, S\}$
- Zweiter Durchlauf liefert: D
 $\Rightarrow V' = \{A, C, D, S\}$
- Dritter Durchlauf liefert: F
 $\Rightarrow V' = \{A, C, D, F, S\}$
- Vierter Durchlauf liefert nichts neues

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow C \mid a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow AF \mid CC_3 \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b \\ E &\rightarrow B \\ F &\rightarrow D \mid E \\ C_1 &\rightarrow AY_a \\ C_2 &\rightarrow BY_b \\ C_3 &\rightarrow DE \\ Y_a &\rightarrow a \\ Y_b &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Streiche ε -Produktionen
- Simuliere Ableitungen $A \xrightarrow{*} \varepsilon$ auf den verbleibenden Regeln
 $V' = \{A, C, D, F, S\}$

$$S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid F \mid A \mid CC_3 \mid C_3$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

$$C_1 \rightarrow AY_a \mid Y_a$$

$$C_2 \rightarrow BY_b$$

$$C_3 \rightarrow DE \mid E$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_b \rightarrow b$$

Ziel

- Die Grammatik enthält keine (Ketten-)Regeln der Form $A \rightarrow B$.
- Beispiel

$$A \rightarrow B \mid C$$

$$B \rightarrow C$$

$$C \rightarrow c$$

Ziel

- Die Grammatik enthält keine (Ketten-)Regeln der Form $A \rightarrow B$.

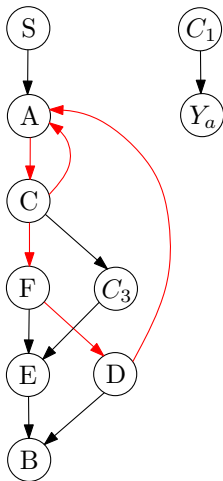
Vorgehen

- **Phase 1:** Finde alle Kreise $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1$.
Ersetze alle A_j durch A_1 .
- **Phase 2:** Betrachte die Regeln der Form $A \rightarrow B$ in umgekehrt topologischer Reihenfolge.
 - Für Regel $A \rightarrow B$ und jede Regel $B \rightarrow b$ füge Regel $A \rightarrow b$ hinzu.
 - Lösche Regel $A \rightarrow B$.

Topologische Sortierung der Regelmenge

- V_1, \dots, V_k Menge von Variablen aus Kettenregeln
- V_1, \dots, V_k topologisch sortiert, wenn gilt:
- $V_i \xrightarrow{*} V_j \Rightarrow i < j$
- Voraussetzung: Es gibt keine zyklischen Abhängigkeiten

Abhängigkeitsgraph



$$S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2$$

$$A \rightarrow C \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow AF \mid F \mid A \mid CC_3 \mid C_3$$

$$D \rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b$$

$$E \rightarrow B$$

$$F \rightarrow D \mid E$$

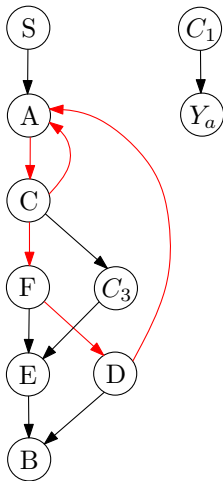
$$C_1 \rightarrow AY_a \mid Y_a$$

$$C_2 \rightarrow BY_b$$

$$C_3 \rightarrow DE \mid E$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_b \rightarrow b$$



- Zyklen $A \rightarrow C$ und $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow A$
- $\Rightarrow A, C, F, D$ äquivalent
- Entferne an Zyklen beteiligte Regeln
- Ersetze Vorkommen von C, F, D in allen Regeln durch A
- Lösche Regeln der Form $A \rightarrow A$

Schritt 4 – Phase 1

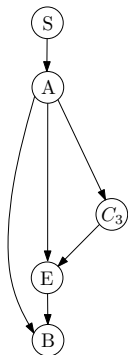
Zyklus: $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow A$

$S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2$
 $A \rightarrow C \mid a$
 $B \rightarrow b$
 $C \rightarrow AF \mid F \mid A \mid C C_3 \mid C_3$
 $D \rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b$
 $E \rightarrow B$
 $F \rightarrow D \mid E$
 $C_1 \rightarrow A Y_a \mid Y_a$
 $C_2 \rightarrow B Y_b$
 $C_3 \rightarrow D E \mid E$
 $Y_a \rightarrow a$
 $Y_b \rightarrow b$

\Rightarrow

$S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow b$
 $A \rightarrow AA \mid A C_3 \mid C_3$
 $A \rightarrow B \mid Y_a Y_b$
 $E \rightarrow B$
 $A \rightarrow E$
 $C_1 \rightarrow A Y_a \mid Y_a$
 $C_2 \rightarrow B Y_b$
 $C_3 \rightarrow A E \mid E$
 $Y_a \rightarrow a$
 $Y_b \rightarrow b$

Schritt 4 - Phase 2



$$S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2$$

$$A \rightarrow a \mid AA \mid AC_3 \mid C_3 \mid B \mid Y_a Y_b \mid E$$

$$B \rightarrow b$$

$$E \rightarrow B$$

$$C_1 \rightarrow AY_a \mid Y_a$$

$$C_2 \rightarrow BY_b$$

$$C_3 \rightarrow AE \mid E$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_b \rightarrow b$$

Topologische Sortierung: $S, A, C_3, E, B, C_1, Y_a$

Schritt 4 - Phase 2

- Gehe in umgekehrter topologischer Sortierung vor
- Ersetze $A \rightarrow B$ durch $A \rightarrow \beta$, falls Regel $B \rightarrow \beta$ existiert
- Topologische Sortierung: $S, A, C_3, E, B, C_1, Y_a$

$$\begin{array}{l} S \rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\ A \rightarrow a \mid AA \mid AC_3 \mid C_3 \mid \\ \quad B \mid Y_a Y_b \mid E \\ B \rightarrow b \\ E \rightarrow B \\ C_1 \rightarrow AY_a \mid Y_a \\ C_2 \rightarrow BY_b \\ C_3 \rightarrow AE \mid E \\ Y_a \rightarrow a \\ Y_b \rightarrow b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} S \rightarrow Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \mid a \mid AA \\ \quad AC_3 \mid AE \mid b \mid Y_a Y_b \\ A \rightarrow a \mid AA \mid AC_3 \mid AE \mid \\ \quad b \mid Y_a Y_b \\ B \rightarrow b \\ E \rightarrow b \\ C_1 \rightarrow AY_a \mid a \\ C_2 \rightarrow BY_b \\ C_3 \rightarrow AE \mid b \\ Y_a \rightarrow a \\ Y_b \rightarrow b \end{array}$$

Sonderbehandlung von ε -Produktionen

- Grammatik ist nun in Chomsky-Normalform, aber
- G enthält Ableitungsfolge $S \xrightarrow{*} \varepsilon$ (haben wir entfernt).
- Erweitere Grammatik um Regeln $S' \rightarrow S$ und $S' \rightarrow \varepsilon$ für neues Startsymbol S' .

Satz:

Es gibt einen Algorithmus (den Cocke–Younger–Kasami Algorithmus), der für eine kontextfreie Grammatik G in Chomsky–Normalform und ein Wort $w \in \Sigma^*$ in Zeit $\mathcal{O}(|R| \cdot n^3)$ entscheidet, ob $w \in L(G)$, wobei $n = |w|$ und $|R|$ die Anzahl der Regeln von G ist.

- Sei $w = w_1 \dots w_n$.
- Sei $V_{ij} \subseteq V$ so dass $A \xrightarrow{*} w_i \dots w_j$ impliziert $A \in V_{ij}$.
- Für alle $1 \leq i \leq j \leq n$ berechne die Menge $V_{ij} \subseteq V$.
- Dann ist $w \in L(G)$ genau dann, wenn $S \in V_{1n}$ ist.

- Die Tabelle der V_{ij} wird nach wachsendem $\ell := j - i$ aufgebaut, beginnend mit $\ell = 0$.
- Für $j - i = \ell > 0$ wird die Berechnung von V_{ij} systematisch auf zuvor berechnete V_{ik}, V_{k+1j} mit $i \leq k < j$ zurückgeführt.

Bemerkung

- Wir benutzen dynamische Programmierung.

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

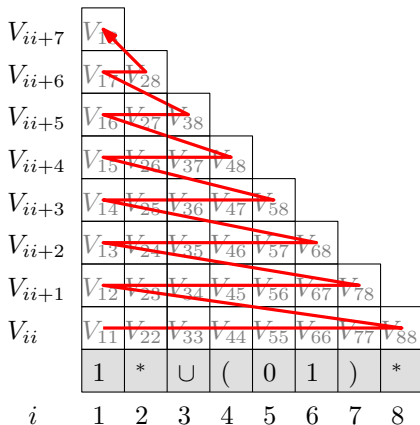
$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y_{\cup} &\rightarrow \cup \\
 Y_{(} &\rightarrow (\\
 Y_{)} &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	V_{11}	V_{22}	V_{33}	V_{44}	V_{55}	V_{66}	V_{77}	V_{88}
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y_{\cup} &\rightarrow \cup \\
 Y_{(} &\rightarrow (\\
 Y_{)} &\rightarrow)
 \end{aligned}$$



Fall $\ell = 0$:

- Konstruiere die Mengen V_{ij} , d.h. alle $A \in V$ mit $A \xrightarrow{*} w_i$.
- Da G in Chomsky–Normalform ist, gilt $A \xrightarrow{*} w_i$ nur, wenn $(A \rightarrow w_i) \in R$.
- Die Berechnung von V_{ij} ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ in $\mathcal{O}(|R|)$ möglich.

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	V_{11}	V_{22}	V_{33}	V_{44}	V_{55}	V_{66}	V_{77}	V_{88}
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

Fall $\ell > 0$:

- Jede Ableitung von $w_i \dots w_j$ muss mit einer Regel der Form

$$A \rightarrow BC$$

beginnen, wobei ein $k \in \{i, \dots, j - 1\}$ existiert mit

- $B \xrightarrow{*} w_i \dots w_k$ und
- $C \xrightarrow{*} w_{k+1} \dots w_j$.

Verfahren

- Speichere alle Mengen V_{rs} als Arrays der Länge $|V|$, in denen für jedes $A \in V$ markiert ist, ob $A \in V_{rs}$.
- **Berechnung von V_{ij} :**
Überprüfe für jede Regel $(A \rightarrow BC) \in R$ und jedes k , ob

$$B \xrightarrow{*} w_j \dots w_k$$

$$C \xrightarrow{*} w_{k+1} \dots w_j$$

durch Ansehen der Stelle

- B im Array zu V_{jk} und
- C im Array zu $V_{k+1 j}$.

Verfahren

- Speichere alle Mengen V_{rs} als Arrays der Länge $|V|$, in denen für jedes $A \in V$ markiert ist, ob $A \in V_{rs}$.
- **Berechnung von V_{ij} :**
Überprüfe für jede Regel $(A \rightarrow BC) \in R$ und jedes k , ob

$$B \xrightarrow{*} w_j \dots w_k$$

$$C \xrightarrow{*} w_{k+1} \dots w_j$$

durch Ansehen der Stelle

- B im Array zu V_{jk} und
- C im Array zu $V_{k+1 j}$.

Bemerkung

- Dies benötigt Aufwand in $\mathcal{O}(n \cdot |R|)$

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	S	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	C_2	\emptyset	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	C_2	\emptyset		
V_{ii+1}	S	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	C_2	\emptyset	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

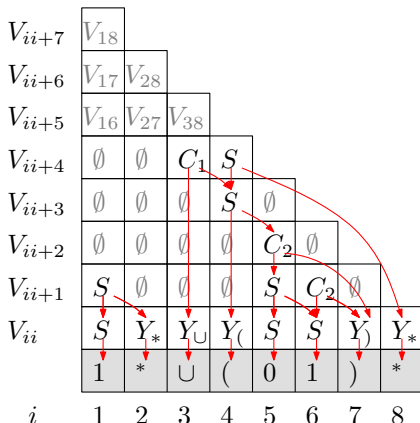
V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	\emptyset			
V_{ii+2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	C_2	\emptyset		
V_{ii+1}	S	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	C_2	\emptyset	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	\emptyset	\emptyset	C_1	S				
V_{ii+3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	\emptyset			
V_{ii+2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	C_2	\emptyset		
V_{ii+1}	S	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	C_2	\emptyset	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8



CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

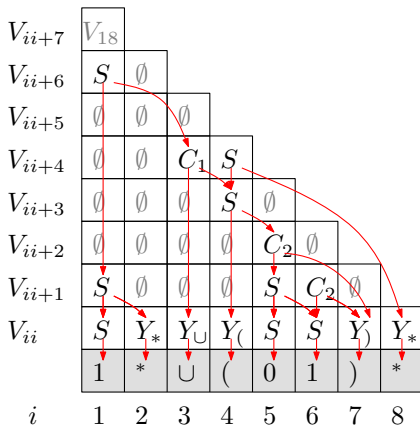
$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	\emptyset	\emptyset	\emptyset					
V_{ii+4}	\emptyset	\emptyset	C_1	S				
V_{ii+3}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	\emptyset			
V_{ii+2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	C_2	\emptyset		
V_{ii+1}	S	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S	C_2	\emptyset	
V_{ii}	S	Y_*	$Y \cup$	$Y($	S	S	$Y)$	Y_*
	1	*	\cup	(0	1)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

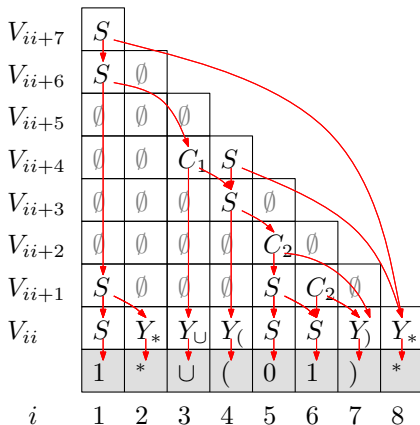
$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$



CYK-Algorithmus – Beispiel

$$w = 1^* \cup (01)^*$$

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
 &\quad SS \mid Y(C_2 \mid \\
 &\quad e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
 C_1 &\rightarrow Y \cup S \\
 C_2 &\rightarrow SY) \\
 Y_* &\rightarrow * \\
 Y \cup &\rightarrow \cup \\
 Y(&\rightarrow (\\
 Y) &\rightarrow)
 \end{aligned}$$



Ergebnisse zum Wortproblem

- **Typ-0 Grammatik.** Das Wortproblem ist nicht entscheidbar.
- **Typ-1 Grammatik.** Das Wortproblem ist NP-vollständig.
- **Typ-2 Grammatik.** Das Wortproblem ist in polynomieller Zeit lösbar.
- **Typ-3 Grammatik.** Das Wortproblem ist in linearer Zeit lösbar.