

# Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 04. Dezember 2014

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Problem 3-SAT

**Gegeben:** Menge  $U$  von Variablen  
Menge  $C$  von Klauseln über  $U$   
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

**Frage:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für  $C$ ?

## Problem 3-SAT

**Gegeben:** Menge  $U$  von Variablen  
Menge  $C$  von Klauseln über  $U$   
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

**Frage:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für  $C$ ?

**Satz:**  
Das Problem 3SAT ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

$3\text{SAT} \in \mathcal{NP}$ :

- Für eine feste Wahrheitsbelegung  $t$  kann in polynomialer Zeit  $O(|C|)$  überprüft werden, ob  $t$  alle Klauseln aus  $C$  erfüllt.

SAT  $\propto$  3SAT:

- Wir geben eine polynomiale Transformation  $f$  von SAT zu 3SAT an.
- Gegeben sei eine SAT-Instanz  $I$

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz  $f(I)$  indem wir jede Klausel  $c$  in  $I$  einzeln auf Klausel(n)  $f(c)$  in  $f(I)$  abbilden:

- Besteht die Klausel  $c = x$  aus **einem** Literal, so wird  $c$  auf  $x \vee x \vee x$  abgebildet.
- Besteht die Klausel  $c = x \vee y$  aus **zwei** Literalen, so wird  $c$  auf  $x \vee y \vee x$  abgebildet.
- Besteht die Klausel  $c$  aus **drei** Literalen, so wird  $c$  auf sich selbst abgebildet.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz  $f(I)$  indem wir jede Klausel  $c$  in  $I$  einzeln auf Klausel(n)  $f(c)$  in  $f(I)$  abbilden:

- Besteht die Klausel  $c = x_1 \vee \dots \vee x_k$  aus  $k > 3$  Literalen, bilde  $c$  wie folgt ab:
  - Führe  $k - 3$  neue Variablen  $y_{c,1}, \dots, y_{c,k-3}$  ein.
  - Bilde  $c$  auf die folgenden  $k - 2$  Klauseln ab:

$$\begin{aligned} & x_1 \vee x_2 \vee y_{c,1} \\ & \overline{y_{c,1}} \vee x_3 \vee y_{c,2} \\ & \vdots \\ & \overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} \vee y_{c,k-3} \\ & \overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k \end{aligned}$$

- Diese Klauseln lassen sich in Zeit  $\mathcal{O}(|C| \cdot |U|)$  konstruieren.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Noch zu zeigen:

- $I$  ist erfüllbar  $\Leftrightarrow f(I)$  ist erfüllbar

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

$I$  ist erfüllbar  $\Rightarrow f(I)$  ist erfüllbar

- Sei die SAT-Instanz  $I$  erfüllbar.
- Wir setzen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von  $I$  auf  $f(I)$  fort.
- Wir untersuchen jede Klausel  $c = x_1 \vee \dots \vee x_k$  in  $I$  einzeln.
- Es ist mindestens ein  $x_j$  wahr.
- Fall  $k \leq 3$ : Damit ist auch  $f(c)$  wahr.
- Fall  $k > 3$ : Falls  $x_1 = \text{wahr}$  oder  $x_2 = \text{wahr}$  ist, setze

$$y_{c,j} \equiv \text{falsch}$$

sonst setze, für ein  $i > 2$  mit  $x_i = \text{wahr}$ ,

$$y_{c,j} = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } 1 \leq j \leq i-2 \\ \text{falsch} & \text{falls } i-1 \leq j \leq k-3 \end{cases}$$

- Diese Erweiterung erfüllt alle Klauseln in  $f(c)$ .



# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

$I$  ist erfüllbar  $\Leftrightarrow f(I)$  ist erfüllbar

- Wir zeigen:  $I$  ist nicht erfüllbar  $\Rightarrow f(I)$  ist nicht erfüllbar.
- Sei also die SAT-Instanz  $I$  nicht erfüllbar.
- Wir betrachten eine beliebige Belegung der Variablen von  $f(I)$ .
- Da  $I$  nicht erfüllbar ist, gibt es eine Klausel  $c = x_1 \vee \dots \vee x_k$  in  $I$  bei der alle Literale  $x_i$  auf falsch gesetzt sind.

■  $c$  wird abgebildet auf

$$\begin{aligned} & x_1 \vee x_2 \vee y_{c,1} \\ & \overline{y_{c,1}} \vee x_3 \vee y_{c,2} \\ & \quad \vdots \\ & \overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} \vee y_{c,k-3} \\ & \overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k \end{aligned}$$

- Um  $f(c)$  zu erfüllen, müßten alle  $y_{c,j}$  wahr sein.
- Dann ist die letzte Klausel  $\overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k$  nicht erfüllt.
- Also ist die 3SAT-Instanz  $f(I)$  nicht erfüllbar.

## Problem 2SAT

**Gegeben:** Menge  $U$  von Variablen  
Menge  $C$  von Klauseln über  $U$   
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält

**Frage:** Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für  $C$ ?

**Satz:**  
Das Problem 2SAT liegt in  $\mathcal{P}$ .

Beweis: Übung

## Problem MAX2SAT

**Gegeben:** Menge  $U$  von Variablen  
Menge  $C$  von Klauseln über  $U$   
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält  
Zahl  $K \in \mathbb{N}$

**Frage:** Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens  $K$  Klauseln erfüllt?

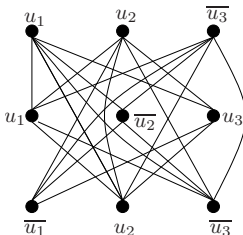
**Satz:**  
Das Problem MAX2SAT ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

Beweis: Übung

Eine **Clique** in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Menge  $V' \subseteq V$  so, dass für alle  $i, j \in V', i \neq j$ , gilt:  $\{i, j\} \in E$ .

## Problem CLIQUE

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $K \leq |V|$   
**Frage:** Gibt es in  $G$  eine Clique der Größe mindestens  $K$ ?



# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

**Satz:**

Das Problem CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

CLIQUE  $\in \mathcal{NP}$

Beweis: Übung.

## 3SAT $\propto$ CLIQUE

- Sei  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  eine 3SAT-Instanz mit  
 $c_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3}$  und  $x_{ij} \in \{u_1, \dots, u_m, \overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ .

Wir transformieren  $C$  in eine CLIQUE-Instanz  $(G = (V, E), K)$ .

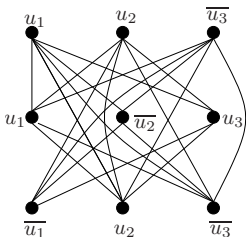
- $V$  enthält  $3n$  Knoten  $v_{ij}$  für  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq 3$ .
- $v_{ij}$  und  $v_{kl}$  sind durch Kanten aus  $E$  verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$  (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$  (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)
- Wir setzen  $K := n$

# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- $V$  enthält  $3n$  Knoten  $v_{ij}$  für  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq 3$ .
- $v_{ij}$  und  $v_{kl}$  sind durch Kanten aus  $E$  verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$  (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$  (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)

**Beispiel:** Sei  $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3}, u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3, \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$ .

Knotennummer	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{21}$	$v_{22}$	$v_{23}$	$v_{31}$	$v_{32}$	$v_{33}$
Literal	$u_1$	$u_2$	$\overline{u_3}$	$u_1$	$\overline{u_2}$	$u_3$	$\overline{u_1}$	$u_2$	$\overline{u_3}$ .



# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- Die Transformation kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Noch zu zeigen:

- 3SAT-Instanz  $C$  ist erfüllbar  $\Leftrightarrow$  CLIQUE-Instanz  $(G, K)$  ist erfüllbar



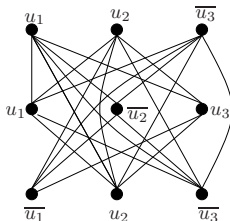
# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

3SAT-Instanz  $C$  ist erfüllbar  $\Rightarrow$  CLIQUE-Instanz  $(G, K)$  ist erfüllbar:

- Wähle eine beliebige erfüllende Wahrheitsbelegung von  $C$ .
- Wähle in jeder Klausel ein wahres Literal.
- Die entsprechenden Knoten in  $G$  bilden eine Clique der Größe  $n$ .

**Beispiel:** Sei  $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \bar{u}_3, u_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3, \bar{u}_1 \vee u_2 \vee \bar{u}_3\}$ .

Knotennummer	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{21}$	$v_{22}$	$v_{23}$	$v_{31}$	$v_{32}$	$v_{33}$
Literal	$u_1$	$u_2$	$\bar{u}_3$	$u_1$	$\bar{u}_2$	$u_3$	$\bar{u}_1$	$u_2$	$\bar{u}_3$ .



# Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

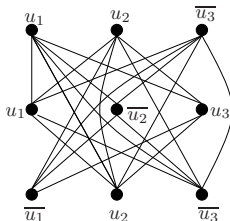
3SAT-Instanz  $C$  ist erfüllbar  $\Leftrightarrow$  CLIQUE-Instanz  $(G, K)$  ist erfüllbar:

- Wähle eine Clique  $V'$  der Größe  $n$  in  $G$ .
- Die entsprechenden Literale sind
  - gleichzeitig erfüllbar
  - decken alle Klauseln ab

und induzieren deswegen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von  $C$ .

**Beispiel:** Sei  $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3}, u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3, \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$ .

Knotennummer	$V_{11}$	$V_{12}$	$V_{13}$	$V_{21}$	$V_{22}$	$V_{23}$	$V_{31}$	$V_{32}$	$V_{33}$
Literal	$u_1$	$u_2$	$\overline{u_3}$	$u_1$	$\overline{u_2}$	$u_3$	$\overline{u_1}$	$u_2$	$\overline{u_3}$ .



## Problem COLOR

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E)$  und ein Parameter  $K \in \mathbb{N}$ .

**Frage:** Gibt es eine Knotenfärbung von  $G$  mit höchstens  $K$  Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

3COLOR bezeichnet das Problem COLOR mit festem Parameter  $k = 3$ .

## Satz:

Das Problem 3COLOR ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

$3\text{COLOR} \in \mathcal{NP}$

- Es kann in Zeit  $\mathcal{O}(|E|)$  überprüft werden, ob eine Färbung von Graph  $G = (V, E)$  mit drei Farben zulässig ist.

# Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

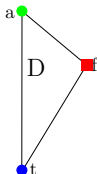
3SAT  $\propto$  3COLOR

- Sei  $I$  eine 3SAT-Instanz mit Variablen  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  und Klauseln  $\{c_1, \dots, c_n\}$ .
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine 3COLOR-Instanz  $G$ .
- Es soll gelten:  $I$  ist erfüllbar  $\Leftrightarrow G$  ist 3-färbbar.

# Konstruktion von 3COLOR-Instanz $G$

Der Graph  $G$  enthält:

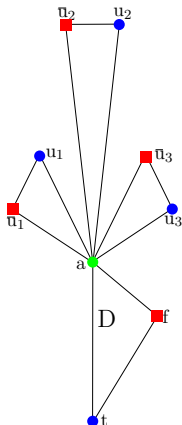
- Ein 'Hauptdreieck' aus Knoten  $\{t, f, a\}$  und Kanten  $\{\{t, f\}, \{f, a\}, \{t, a\}\}$
- Interpretation:  $t, f, a$  sind die drei Farben mit denen  $G$  gefärbt wird.
- Interpretation:  $t$ : wahr,  $f$ : falsch



# Konstruktion von 3COLOR-Instanz $G$

Der Graph  $G$  enthält:

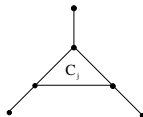
- Für jede Variable  $u \in U$  ein Dreieck  $D_u$  mit Eckknoten  $u, \bar{u}, a$ .
- Interpretation: Falls  $u$  mit  $t$  gefärbt ist, muss  $\bar{u}$  mit  $f$  gefärbt sein.



# Konstruktion von 3COLOR-Instanz $G$

Der Graph  $G$  enthält für jede Klausel  $c_j = x \vee y \vee z$  eine Komponente  $C_j$  wie folgt:

- $C_j$  besteht aus sechs Knoten: einem „inneren Dreieck“ und drei „Satelliten“.

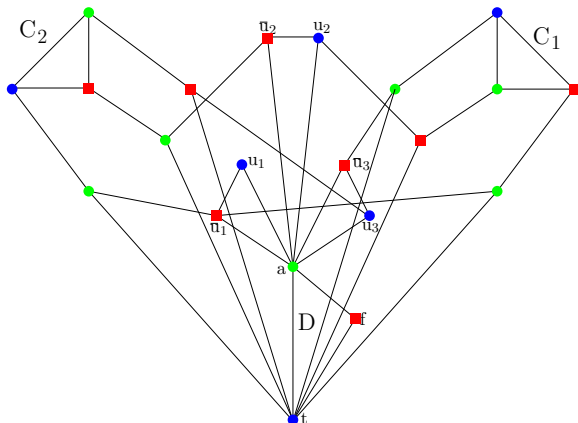


- Jeder der drei Satelliten wird mit einem der Literale  $x, y, z$  verbunden.
- Alle drei Satelliten werden mit dem Eckknoten  $t$  in  $D$  verbunden.



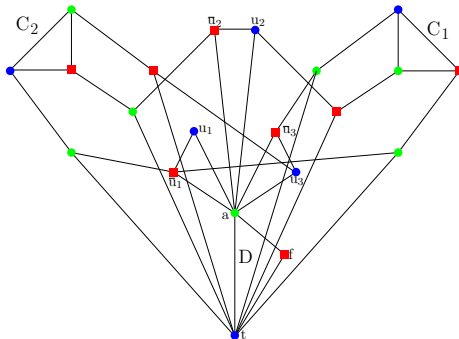
# Beispielgraph zur Reduktion

$$c_1 = \bar{u}_1 \vee u_2 \vee \bar{u}_3, c_2 = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3$$



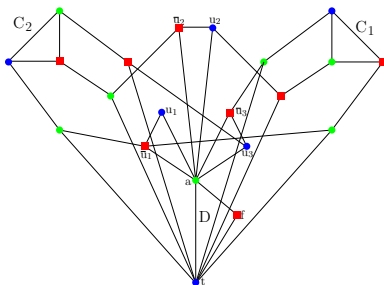
# Polynomialität der Reduktion

- Die Knotenanzahl von  $G$  liegt in  $\mathcal{O}(n + m)$ .
- Deswegen ist die Transformation polynomial.



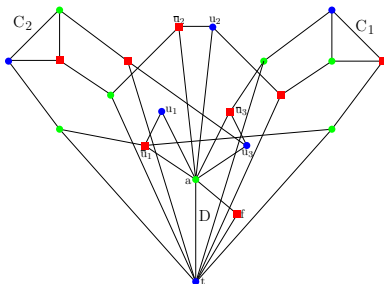
# Instanz I erfüllbar $\Rightarrow$ Instanz G erfüllbar

- Betrachte zulässige Wahrheitsbelegung für  $I$ .
- Färbe wahre Literale mit t, falsche Literale mit f.
- Im Klausel-Gadget:
  - Färbe Satelliten zu einem beliebigen wahren Literal mit f.
  - Färbe die beiden anderen Satelliten mit a.
  - Inneres Dreieck kann dann zulässig gefärbt werden.



# Instanz $I$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Instanz $G$ erfüllbar

- Betrachte Dreifärbung von  $G$ .
- Färbung von Literal-Knoten induziert eine gültige Wahrheitsbelegung von  $I$ .



## Problem EXACT COVER

**Gegeben:** Eine endliche Menge  $X$  und eine Familie  $\mathcal{S}$  von Teilmengen von  $X$ .

**Frage:** Existiert eine Menge  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ , so dass jedes Element aus  $X$  in genau einer Menge aus  $\mathcal{S}'$  liegt?

## Problem EXACT COVER

**Gegeben:** Eine endliche Menge  $X$  und eine Familie  $\mathcal{S}$  von Teilmengen von  $X$ .

**Frage:** Existiert eine Menge  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ , so dass jedes Element aus  $X$  in genau einer Menge aus  $\mathcal{S}'$  liegt?

## Beispiel:

$$X = \{1, 2, \dots, 7\}$$

$$\mathcal{S} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3\}, \\ \{5, 6, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{4, 6, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$$

Ist  $(X, \mathcal{S})$  eine Ja-Instanz?

## Problem EXACT COVER

**Gegeben:** Eine endliche Menge  $X$  und eine Familie  $\mathcal{S}$  von Teilmengen von  $X$ .

**Frage:** Existiert eine Menge  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ , so dass jedes Element aus  $X$  in genau einer Menge aus  $\mathcal{S}'$  liegt?

## Beispiel:

$$X = \{1, 2, \dots, 7\}$$

$$\mathcal{S} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3\}, \\ \{5, 6, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{4, 6, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$$

$$\mathcal{S}' = \{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{6, 7\}\}$$

Ja.

## Problem EXACT COVER

**Gegeben:** Eine endliche Menge  $X$  und eine Familie  $\mathcal{S}$  von Teilmengen von  $X$ .

**Frage:** Existiert eine Menge  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ , so dass jedes Element aus  $X$  in genau einer Menge aus  $\mathcal{S}'$  liegt?

**Satz:**  
Problem EXACT COVER ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.



# Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

EXACT COVER  $\in \mathcal{NP}$

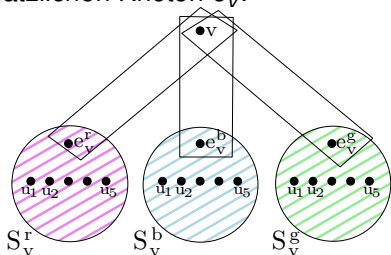
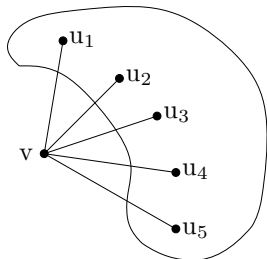
- Es kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob eine Teilmenge  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$  aus disjunkten Mengen besteht und  $X$  überdeckt.

## 3COLOR $\propto$ EXACT COVER

- Sei  $G = (V, E)$  eine 3COLOR-Instanz.
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine EXACT COVER-Instanz  $(X, S)$ .
- Es soll gelten:  $G$  ist 3-färbbar  $\Leftrightarrow (X, S)$  ist erfüllbar

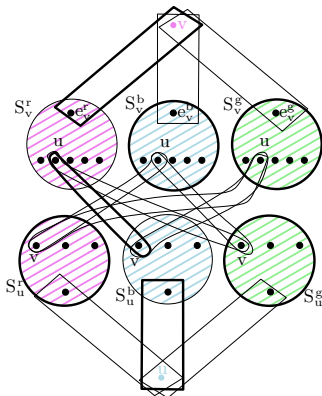
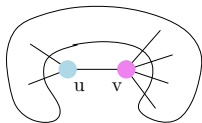
## Konstruktion von $(X,S)$

- Sei  $C = \{r(\text{ot}), b(\text{lau}), g(\text{rün})\}$
- Sei  $N(v) := \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$  die Nachbarschaft von  $v$ .
- Für jedes  $v \in V$  enthalte  $X$  ein „Element“  $v$  und jeweils  $3 \cdot |N(v)| + 3$  zusätzliche Elemente.
- Zu jedem  $v \in V$  gebe es in  $S$  drei disjunkte Mengen  $S_v^r, S_v^b, S_v^g$  mit jeweils  $|N(v)| + 1$  Elementen.
- Außerdem enthalte  $S$  für jedes  $v$  drei zweielementige Mengen  $\{v, e_v^r\}, \{v, e_v^b\}$  und  $\{v, e_v^g\}$  mit  $e_v^r \in S_v^r, e_v^b \in S_v^b$  und  $e_v^g \in S_v^g$ .
- **Interpretation:**  $S_v^r$  entspricht der „Farbe“  $r$ , enthält für jeden Knoten aus  $N(v)$  eine Kopie und einen zusätzlichen Knoten  $e_v^r$ .



# Konstruktion von $(X,S)$

- Außerdem enthält  $S$  für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  und je zwei  $c, c' \in C$ ,  $c \neq c'$ , die zweielementigen Mengen  $\{u_v^c, v_u^{c'}\}$ ,  $u_v^c \in S_v^c$  „Kopie“ von  $u$ ,  $v_u^{c'} \in S_u^{c'}$  „Kopie“ von  $v$ .



# Konstruktion von $(X, S)$

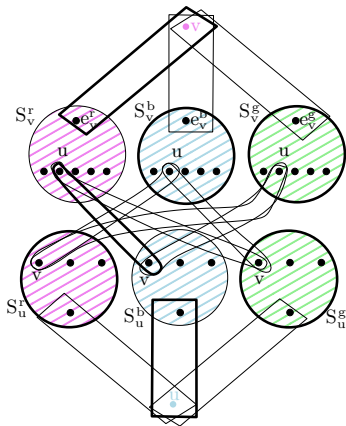
- Die Konstruktion ist polynomial.

Noch zu zeigen:

- $G$  ist 3-färbbar  $\Leftrightarrow (X, S)$  ist erfüllbar

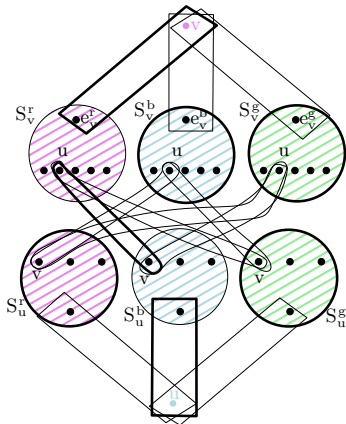
# G dreifärbbar $\Rightarrow (X,S)$ hat exakte Überdeckung

- Sei  $\chi : V \rightarrow C$  eine zulässige Dreifärbung.
- $S'$  enthalte für jedes  $v \in V$  die Mengen  $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$  und  $S_v^c$  mit  $c \neq \chi(v)$ .
- Diese Mengen überdecken alle Elemente exakt, außer den Elementen der Form  $u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}$  für  $\{u, v\} \in E$ .
- Daher enthalte  $S'$  für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  die Menge  $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$ .
- Diese Menge existiert, da  $\chi(u) \neq \chi(v)$ , und damit überdeckt  $S'$  jedes Element aus  $X$  genau einmal.



# G dreifärbbar $\Leftrightarrow (X, S)$ hat exakte Überdeckung

- Sei also  $S'$  eine exakte Überdeckung.
- Jedes Element  $v$  muss von genau einer Menge der Form  $\{v, e_v^c\}$  überdeckt sein.
- Dies induziert eine Färbung  $\chi$  von  $G$  mit den Farben  $r, b$  und  $g$ .
- Wir müssen beweisen, dass diese Färbung zulässig ist
- Da für jedes  $v$  bereits  $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$ , kann  $e_v^c$  mit  $c \neq \chi(v)$  nur durch die Menge  $S_v^c$  überdeckt werden.



# G dreifärbbar $\Leftrightarrow (X,S)$ hat exakte Überdeckung

- Da für jedes  $v$  bereits  $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$ , kann  $e_v^c$  mit  $c \neq \chi(v)$  nur durch die Menge  $S_v^c$  überdeckt werden.
- Da die Mengen der Form  $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$  und  $S_v^c$ ,  $c \neq \chi(v)$ , alle Elemente außer den  $u^{\chi(v)}$  mit  $\{u, v\} \in E$  überdecken, müssen auch die Mengen  $\{u^{\chi(v)}, v^{\chi(u)}\}$  für  $\{u, v\} \in E$  in  $S'$  enthalten sein.
- Für diese gilt per Konstruktion  $\chi(v) \neq \chi(u)$ .

