Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 5

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 14/15

Ausgabe 15. Dezember 2014
Abgabe 12. Januar 2015, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass falls das Komplement eines NP-vollständigen Problems in NP liegt, dann gilt NP =co-NP.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Falls $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, so gibt es keinen absoluten Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für Clique.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Geben Sie den Pseudocode eines pseudopolynomialen Algorithmus für SubsetSum an. Geben Sie eine obere Schranke für die Laufzeit an, die polynomiell in der Anzahl der Zahlen in der Eingabe und der größten vorkommenden Zahl ist. Dazu müssen Sie nicht auf Turingmaschinenebene argumentieren, sondern können sich am RAM-Modell orientieren. Das bedeutet, dass Sie zum Beispiel annehmen dürfen, dass die Addition und der Vergleich von zwei Zahlen in $O(1)$ Zeit ausgeführt werden können. (*Hinweis:* dynamische Programmierung)

Aufgabe 4 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Das Problem IndependentSquares sei wie folgt definiert:

> **Gegeben:** Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleichgroßer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene.
> **Gesucht:** Möglichst große unabhängige Menge $S \subseteq Q$. Dabei heißt $S \subseteq Q$ *unabhängig*, falls für alle $q_i, q_j \in S$ mit $i \neq j$ gilt, dass q_i und q_j sich nicht schneiden.

Betrachten Sie den Algorithmus SweepLine, der eine inklusionsmaximale unabhängige Teilmenge $S \subseteq Q$ berechnet.

Algorithmus 1 : SweepLine

Eingabe : Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleichgroßer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene mit Mittelpunkten $c_1, \ldots, c_n$, sodass für die x-Koordinaten der Mittelpunkte gilt $x(c_1) < \ldots < x(c_n)$.
Ausgabe : Unabhängige Menge $S \subseteq Q$.

```
S ← ∅;
für i = 1, ..., n tue
    wenn q_i ∈ Q dann
        S ← S ∪ {q_i};
        Q ← Q \ ({q_i} ∪ {q_j ∈ Q | q_j und q_i schneiden sich.})
return S;
```

(a) Geben Sie eine Instanz von IndependentSquares an, sodass SweepLine nicht die größte mögliche unabhängige Menge zurück liefert. Geben Sie für diese Instanz ebenfalls eine größte mögliche unabhängige Menge an.

(b) Geben Sie eine Familie $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ gleichgroßer, achsenparalleler Quadrate an, sodass gilt $|Q_n| \in \Theta(n)$ und $|\text{SweepLine}(Q_n)| = \frac{1}{2}|\text{OPT}(Q_n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet $\text{OPT}(Q)$ die kardinalitätsmaximale unabhängige Menge von Q. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass SweepLine für IndependentSquares ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 ist.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Ein gerichteter Graph heißt *azyklisch*, falls er keinen gerichteten Kreis enthält.

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $G_1 = (V, E_1 \subseteq E)$ ein inklusionsmaximaler azyklischer Teilgraph von G. Des Weiteren sei $G_2 = (V, E_2 = E \setminus E_1)$ das Komplement zu G_1.

(a) Zeigen Sie: Für jede Kante $(u, v) \in E_2$ gibt es in G_1 einen gerichteten Pfad von v nach u.

(b) Zeigen Sie: G_2 ist azyklisch.

(c) Betrachten Sie das Problem Maximum Acyclic Graph:

> **Gegeben:** Gerichteter Graph $G = (V, E)$.
> **Gesucht:** Kardinalitätsmaximaler azyklischer Teilgraph von G.

Skizzieren Sie einen Approximationsalgorithmus für Maximum Acyclic Graph mit relativer Gütegarantie 2. Beweisen Sie diese Gütegarantie.

Aufgabe 6 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Problem PlätzchenVerpacken:

> **Gegeben:** Endliche Menge M an Plätzchen und Gewicht $w\colon M \to (0, 1]$ für jedes Plätzchen.
> **Aufgabe:** Weise die Plätzchen aus M einer minimalen Anzahl Schachteln $S_1, \ldots, S_m$ zu, sodass für jede Schachtel S_i gilt
> $$\sum_{p \in S_i} w(p) \leq 1.$$

Geben Sie für das Problem PlätzchenVerpacken einen polynomiellen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ mit relativer Gütegarantie 2 an.

(a) Geben Sie Ihren Algorithmus in Pseudocode an.

(b) Geben Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus an und begründen Sie diese.

(c) Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus die relative Gütegarantie 2 besitzt.

Aufgabe 7 (Zusatz: 3 + 3 + 1 = 7 Punkte)

Ein Ganzzahliges Lineares Programm (Integer Linear Programm, kurz ILP) wird zur mathematische Optimierung von Problemen verwendet, bei dem alle Variablen ganzzahlig sind und die Zielfunktion sowie die Einschränkungen linear sind. Ganzzahlige lineare Programmierung ist NP-schwer. Die Standardform eines ILPs ist wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \underset{x}{\text{Minimiere}} & c^T x & \left.\right\} \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & Ax \leq b, & \left.\right\} \text{Einschränkungen} \\ & x \geq 0, & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}$ Schranken} \\ & x \in \mathbb{Z}, & \end{array} \tag{1}$$

wobei c und b zwei Vektoren sind und A eine Matrix ist. Jedes NP-schwere Problem läßt sich auf ein ILP zurückführen. Dabei stellt ein ILP eine andere Möglichkeit dar ein Problem formal zu beschreiben. Es existieren Lösungsverfahren für ILPs, die häufig in der Praxis Verwendung finden. Damit sind ILPs eine gute generische Möglichkeit NP-schwere Probleme anzugehen bzw. zu modellieren.

(a) Formulieren Sie das Problem Unabhängige Menge als ILP und kommentieren Sie Ihr Vorgehen.

(b) Formulieren Sie das Problem Max2SAT als ILP und kommentieren Sie Ihr Vorgehen.

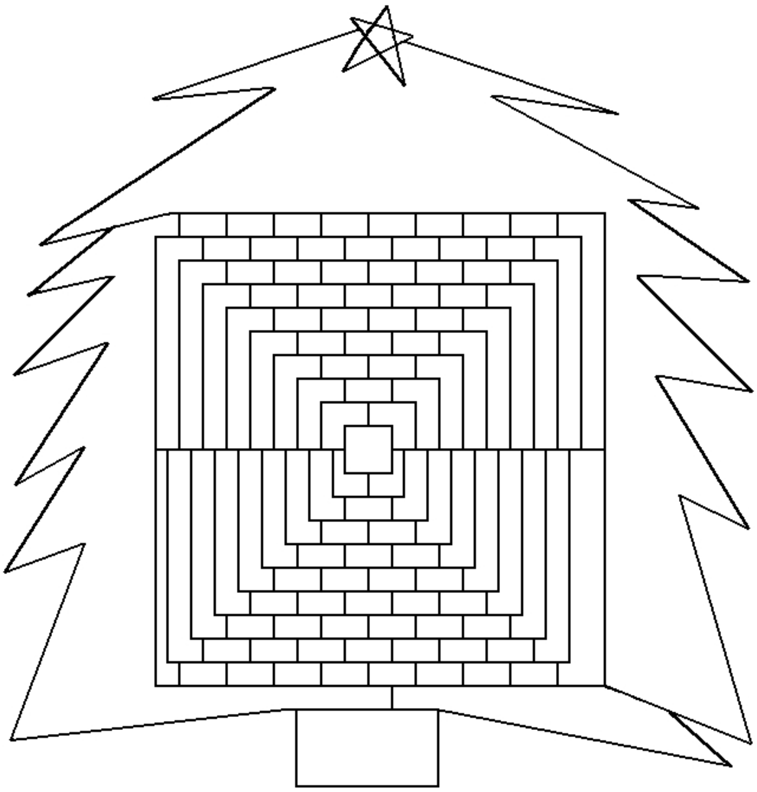
(c) Lösen Sie Clique mit Hilfe der Unabhängige Menge

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Ein *planarer Graph* ist ein Graph, der so in der Ebene gezeichnet werden kann, dass sich keine zwei Kanten kreuzen. Die *Facetten* eines planaren Graphen bezüglich einer gegebenen Einbettung sind die 'maximalen, durch Kanten abgeschlossenen Flächen'. Insbesondere wird das 'den Graphen umgebende Gebiet' als *Äußere Facette* bezeichnet. Zwei Facetten sind *adjazent*, falls sie durch eine gemeinsame Kante begrenzt werden.

Die nachfolgende Zeichnung ist als planarer Graph zu betrachten, wobei die Knoten implizit als Schnitt- bzw. Berührungspunkte der Kanten gegeben seien.

Färben Sie die Facetten des Graphen mit vier Farben so, dass keine zwei adjazenten Facetten dieselbe Farbe haben.



FROHE WEIHNACHTEN, einen BRAUSENDEN JAHRESWECHSEL und ein ERFOLGREICHES JAHR 2015