Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 4

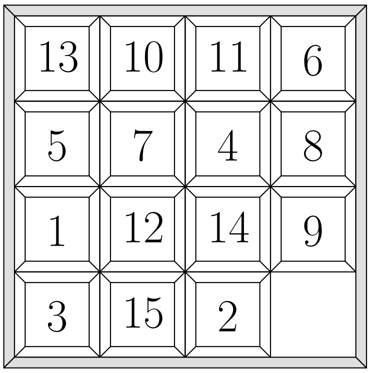
Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 14/15

Ausgabe 01. Dezember 2014
Abgabe 15. Dezember 2014, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

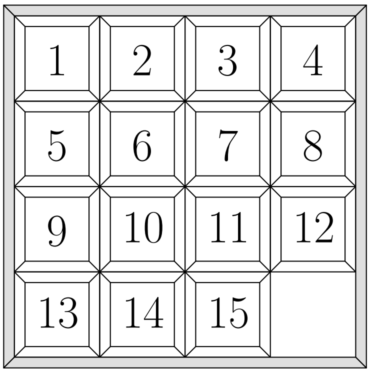
Aufgabe 1

(3 + 2 = 5 Punkte)

Geben ist das Problem 15-Puzzle. Das Spiel besteht aus 15 Kacheln, die von 1 bis 15 durchnummeriert sind und auf den 16 Feldern eines Vier-mal-vier-Quadrats angebracht sind. Ein spezielles Feld bleibt frei. Eine (vertikal oder horizontal) benachbarte Kachel kann jeweils in das freie Feld hineingeschoben werden. Die Aufgabe besteht nun darin, durch Verschieben der Kacheln die Zahlen von 1 bis 15 aufsteigend anzuordnen (von links nach rechts).



Mögliche Anfangskonfiguration
(nicht lösbar)



Zielkonfiguration

(a) Formulieren Sie Problem 15-Puzzle als Optimierungs-, Optimalwert und Entscheidungsproblem.

(b) Geben Sie ein Kodierungsschema an und bestimmen Sie die Kodierungslänge der Instanzen.

Aufgabe 2

(2+ 2 + 3 = 7 Punkte)

In der Vorlesung wurde ohne Beweis behauptet, dass 2SAT in P liegt und dass Max2SAT NP-vollständig ist.

(a) Zeigen Sie, dass 2SAT in P liegt.

(b) Sei f eine Abbildung, die eine Klausel $c = (x \vee y \vee z)$ mit drei Literalen auf die Klauselmenge

$$F_c = \{x, y, z, w_c, \neg x \vee \neg y, \neg y \vee \neg z, \neg x \vee \neg z, x \vee \neg w_c, y \vee \neg w_c, z \vee \neg w_c\},$$

abbildet. Dabei ist w_c eine neu eingeführte boolesche Variable.

i. Zeigen Sie, dass F_c nicht erfüllbar ist.

ii. Geben Sie für jede Wahrheitsbelegung von x, y und z die maximale Anzahl an Klauseln von F_c an, die gleichzeitig erfüllt werden können. Geben Sie insbesondere an, wie Sie w_c belegen, um die maximale Anzahl an Klauseln zu erfüllen.

(c) Zeigen Sie, dass Max2SAT NP-vollständig ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien L_1 die Sprache der ungeraden Zahlen in Dezimaldarstellung über $\Sigma_1 = \{0, \ldots, 9\}$ und L_2 die Sprache der Wörter gerader Länge über $\Sigma_2 = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass L_1 polynomial in L_2 transformiert werden kann ($L_1 \propto L_2$).

Hinweis: Sie müssen die DTM, die die Transformation berechnet, nicht explizit angeben, sondern lediglich kurz in Worten beschreiben, wie sie arbeitet, und begründen, warum ihre Laufzeit polynomial ist.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 4 + 4 = 14 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Probleme NP-vollständig sind.
Hinweis: Folgende Probleme könnten für die Beweise hilfreich sein. Clique, 3Color, 3SAT, Max2SAT, ExactCover

(a) Problem Unabhängige Menge
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, so dass $|V'| \geq k$ gilt?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \notin E$.

(b) Problem KnotenÜberdeckung
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$?
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung*, falls für jede Kante $\{u, v\}$ gilt $u \in V'$ oder $v \in V'$.

(c) Problem MengenÜberdeckung
Gegeben: Universum $\mathcal{U} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{U}$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|C| \leq k$, sodass $\bigcup_{i \in C} S_i = \mathcal{U}$?
Hinweis: Verwenden Sie das Problem KnotenÜberdeckung für die Reduktion.

(d) Problem Klausurplan
Gegeben: Gegeben ist eine Menge K von Kursen, die von jedem Student besucht werden. Am Ende jedes Semesters wird zu jedem Kurs eine Klausur geschrieben. Weiterhin ist ein Menge T von Zeitbereichen, die für die Klausuren zur Verfügung stehen, gegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.
Frage: Gibt es einen Zeitplan S für die Klausuren, der maximal k zeitliche Überschneidungen (Konflikte) der Klausuren besitzt?