Algorithmische Graphentheorie
Wintersemester 2014/2015
Thomas Bläsius, Ignaz Rutter

Übungsblatt 6

Besprechung in der Übung am 29. Januar 2015

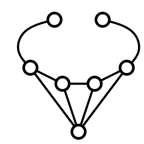
Aufgabe 1: Implikationsklassen und ihre Komplemente ⋆

Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen.

$$ab \;\Gamma\; a'b' \Leftrightarrow ba \;\Gamma\; b'a'$$
$$ab \;\Gamma^*\; a'b' \Leftrightarrow ba \;\Gamma^*\; b'a'$$

Aufgabe 2: Transitive Orientierbarkeit des Bullenkopfes ⋆

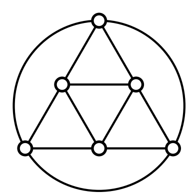
Zeigen Sie, dass der „Bullenkopf“ nicht transitiv orientierbar ist. Zeigen Sie dazu, dass es eine Implikationsklasse A gibt, mit $A = A^{-1}$.

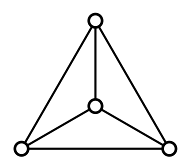


Aufgabe 3: Berechnung einer transitiven Orientierung ⋆

Führen Sie den Algorithmus zur Berechnung einer transitiven Orientierung an den beiden nebenstehenden Graphen aus.

Geben Sie zusätzlich für jeden Schritt alle Implikationsklassen an und beobachten Sie, wie sich diese verändern, wenn die Kanten einer Farbklasse entfernt werden.





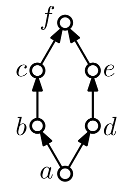
Aufgabe 4: Laufzeit der transitiven Orientierung ⋆⋆

Zeigen sie, dass der Algorithmus zur Berechnung einer transitiven Orientierung in $O(\Delta \cdot |E|)$ Zeit und mit $O(|V| + |E|)$ Speicherplatz implementiert werden kann. Dabei ist Δ der maximale Knotengrad.

Aufgabe 5: Berechnung der Höhenfunktion ⋆

Sei $G = (V, F)$ ein gerichteter, azyklischer Graph. Die Höhenfunktion h ist definiert als $h(v) = 0$ falls v eine Senke ist und $h(v) = 1 + \max\{h(w) \mid vw \in F\}$. Geben Sie einen Algorithmus an, der $h(v)$ für alle Knoten v in linearer Zeit berechnet.

Aufgabe 6: Posets mit Dimension 2 ⋆



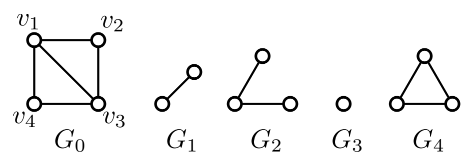
Das poset (X, P) sei durch den nebenstehenden azyklisch gerichteten Graphen gegeben. Geben Sie lineare Ordnungen L_1 und L_2 an, die zusammen einen Realisierer für P bilden.

Sei G der zu P gehörende Vergleichbarkeitsgraph. Konstruieren Sie aus L_1 bzw. L_2 eine transitive Orientierung für den Komplementgraphen $\bar{G}$.

Aufgabe 7: Graphkomposition ⋆⋆

Seien $G_0, G_1, \ldots, G_n$ Graphen, sodass G_0 gerade n Knoten $v_1, \ldots, v_n$ hat. Der *Kompositionsgraph* $G = G_0[G_1, \ldots, G_n]$ ist definiert als die Vereinigung der Graphen $G_1, \ldots, G_n$, wobei ein Knoten aus G_i genau dann zu einem Knoten aus G_j adjazent ist, wenn v_i und v_j in G_0 adjazent sind. Der Graph G_0 heißt *äußerer Faktor*; die Graphen $G_1, \ldots, G_n$ sind *innere Faktoren*.

Geben Sie $G = G_0[G_1, G_2, G_3, G_4]$ für die nebenstehenden Graphen $G_0, \ldots, G_4$ an. Wählen Sie für jeden der Graphen $G_0, \ldots, G_4$ eine transitive Orientierung. Erhält man dadurch auch eine transitive Orientierung von G?



Zeigen Sie, dass ein Kompositionsgraph $G = G_0[G_1, \ldots, G_n]$ genau dann transitiv orientierbar ist, wenn jeder der Graphen $G_0, \ldots, G_n$ transitiv orientierbar ist.

Aufgabe 8: Farbklassen in Kompositionsgraphen ⋆⋆

Sei $G = G_0[G_1, \ldots, G_n]$ ein Kompositionsgraph und sei $\hat{A}$ eine Farbklasse von G. Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ entweder vollständig innerhalb eines inneren Faktors $G_1, \ldots, G_n$ liegt oder ausschließlich äußere Kanten enthält (also Kanten, die Knoten aus unterschiedlichen inneren Faktoren verbinden).

Aufgabe 9: Module ⋆⋆⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *Modul*, wenn jeder Knoten $x \in V - V'$ entweder zu allen oder zu keinem Knoten aus V' benachbart ist. Ein Modul V' ist *trivial*, wenn $V' = V$ oder $V' = \emptyset$.

Für eine Farbklasse $\hat{A}$ von G sei $V(\hat{A})$ die Menge der Knoten, die zu einer Kante aus $\hat{A}$ inzident sind. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Innere Faktoren eines Kompositionsgraphen sind Module.

(b) Für eine Farbklasse $\hat{A}$ ist $V(\hat{A})$ ein Modul.

(c) G hat maximal eine Farbklasse $\hat{A}$, für die $V(\hat{A}) = V$ gilt.

(d) Ist G ein Vergleichbarkeitsgraph, so hat G genau dann eine eindeutige transitive Orientierung (bis auf Invertierung), wenn jeder nicht-triviale Modul eine unabhängige Menge induziert.