Übungsblatt 5

Besprechung in der Übung am 15. Januar 2015

Aufgabe 1: Welche Cliquen sind maximal? ⋆

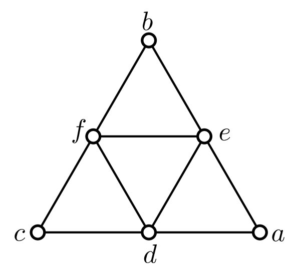
Sei σ ein perfektes Eliminationsschema. Sei K_v die Clique bestehend aus dem Knoten v und seinen (bezüglich σ) nachfolgenden Nachbarn. Zeigen Sie, dass K_v genau dann eine inklusionsmaximale Clique ist, wenn es keinen Vorgänger u von v gibt sodass K_v Teilgraph von K_u ist.

Aufgabe 2: Knotenüberdeckung in chordalen Graphen ⋆

Zeigen Sie, dass eine minimale Knotenüberdeckung in chordalen Graphen effizient berechnet werden kann.

Aufgabe 3: Chordale Graphen als Schnitt von Teilbäumen ⋆⋆

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der für einen chordalen Graphen G eine Menge von Teilbäumen eines Baumes berechnet, sodass G der Schnittgraph dieser Teilbäume ist. Nehmen Sie an, dass ein perfektes Eleminationsschema von G bereits gegeben ist.



Wenden Sie ihren Algorithmus auf den nebenstehenden Graphen an. Benutzen Sie, dass $\sigma = [a, b, c, d, e, f]$ ein perfektes Eliminationsschema ist.

Aufgabe 4: Färbung chordaler Graphen ⋆⋆

Sei G ein chordaler Graph. Da G perfekt ist und $\omega(G)$ effizient berechnet werden kann, kann auch $\chi(G)$ effizient berechnet werden. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der eine Färbung von G mit $\chi(G)$ Farben berechnet.

Aufgabe 5: Dominierende Menge in chordalen Graphen ⋆⋆⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $A \subseteq V$ ist *dominierend*, wenn jeder Knoten einen Nachbarn in A hat oder selbst in A enthalten ist. Zeigen Sie, dass das Problem eine minimale dominierende Menge in einem chordalen Graphen zu berechnen NP-schwer ist.

Hinweis 1: Benutzen Sie, dass das *3-dimensionale Matching Problem* NP-schwer ist. Es ist wie folgt definiert. Seien W, X, Y drei disjunkte Mengen und sei $M \subseteq W \times X \times Y$ eine Menge von Tripeln (jedes Tripel enthält genau ein Element aus jeder der Mengen W, X, Y). Gibt es eine Teilmenge $M' \subseteq M$, sodass jedes Element aus W, X und Y in genau einem Tripel aus M' vorkommt?

Hinweis 2: Fassen Sie chordale Graphen als Schnittgraphen von Teilbäumen eines Baumes auf.

Aufgabe 6: Helly-Eigenschaft und Bäume ⋆⋆

Sei G ein zusammenhängender Graph. Zeigen Sie, dass G genau dann ein Baum ist, wenn jede Familie von Pfaden in G die Helly-Eigenschaft erfüllt.

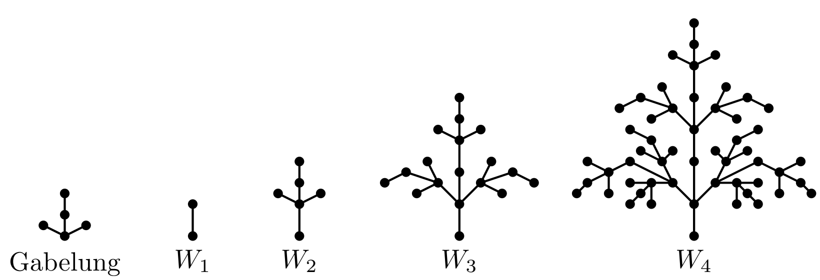
Aufgabe 7: Kantengraphen chordaler Graphen ⋆⋆

Sei G ein Graph. Der *Kantengraph* (engl. *line graph*) $L(G)$ enthält einen Knoten für jede Kante von G wobei zwei Knoten in $L(G)$ verbunden sind, wenn die zugehörigen Kanten in G einen gemeinsamen Endknoten haben.

Zeigen Sie, dass G chordal ist, wenn $L(G)$ chordal ist. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht stimmt.

Aufgabe 8: Weihnachtsbäume ⋆⋆⋆

Wie jeder weiß, taugt nicht jeder Baum als Weihnachtsbaum. Formal ist ein *perfekter Weihnachtsbaum* wie folgt definiert. Der perfekte Weihnachtsbaum W_1 ist eine einzelne Kante, gewurzelt an einem der beiden Knoten. Man erhält den perfekten Weihnachtsbaum W_{k+1} aus W_k, indem man jedes Blatt (die Wurzel ausgenommen) wie unten dargestellt durch eine Gabelung ersetzt.



Jeder chordale Graph kann als Schnittgraph von Teilbäumen eines Baumes dargestellt werden. Zeigen Sie, dass man jeden chordalen Graphen auch als Schnittgraph von Teilbäumen eines perfekten Weihnachtsbaums darstellen kann.

Funktioniert das noch immer, wenn man zusätzlich fordert, dass diese Teilbäume wiederum perfekte Weihnachtsbäume sind? Anders ausgedrückt: Kann man jeden chordalen Graphen als Schnittgraph von perfekten Teilweihnachtsbäumen eines perfekten Weihnachtsbaums darstellen?