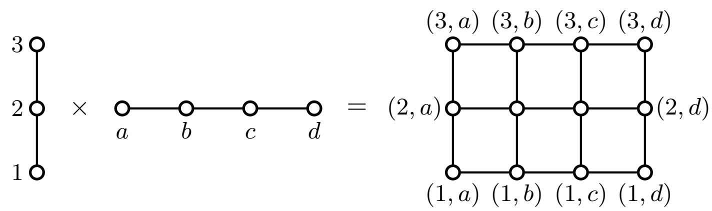
Übungsblatt 2

Besprechung in der Übung am 13. November 2014

Aufgabe 1: Graphfärbung und unabhängige Mengen ⋆⋆

Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq r$ genau dann gilt, wenn $\alpha(G \times K_r) = n$.

Das *Kartesische Produkt* $G_1 \times G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert als $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$ mit $E = \{\{(v_1, v_2), (v_1', v_2')\} \mid$ entweder $v_1 = v_1'$ und $\{v_2, v_2'\} \in E_2$ oder $v_2 = v_2'$ und $\{v_1, v_1'\} \in E_1\}$ (siehe Beispiel unten).



Inwiefern ist damit gezeigt, dass das Problem Independent Set NP-schwer ist (vorausgesetzt Graph Coloring ist NP-schwer)?

Aufgabe 2: Kommutierende Operationen ⋆

Seien x und y unterschiedliche Knoten in einem Graphen G. Zeigen Sie, dass $(G \circ x) - y = (G - y) \circ x$ gilt.

Aufgabe 3: Algorithmische Knotenmultiplikation ⋆⋆

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Knoten des Graphen G und sei $h = (h_1, \ldots, h_n)$ ein Vektor mit $h_i \in \mathbb{N}_0$. Machen Sie sich klar, dass der Algorithmus rechts den Graphen $H = G \circ h$ konstruiert. Welche Laufzeit hat der Algorithmus? Kann man H auch schneller berechnen?

$H \leftarrow G$
für $i \leftarrow 1$ **bis** n **tue**
  wenn $h_i = 0$ **dann** $H \leftarrow H - x_i$
  sonst
    solange $h_i > 0$ **tue**
      $H \leftarrow H \circ x_i$
      $h_i \leftarrow h_i - 1$

Aufgabe 4: Ein bisschen Perfekt? ⋆⋆

Geben Sie einen Graphen G an, für den $\alpha(G) = k(G)$ und $\omega(G) < \chi(G)$ gilt. Warum widerspricht das nicht dem Perfect Graph Theorem?

Aufgabe 5: Cliquenüberdeckungen und unabhängige Mengen ⋆

Sei G ein Graph mit $\alpha(G) = k(G)$. Sei außerdem $\mathcal{K}$ eine Cliquenüberdeckung mit $|\mathcal{K}| = k(G)$ und sei $\mathcal{U}$ die Menge aller unabhängigen Mengen der Größe $\alpha(G)$. Zeigen Sie, dass $|U \cap K| = 1$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und $K \in \mathcal{K}$ gilt.

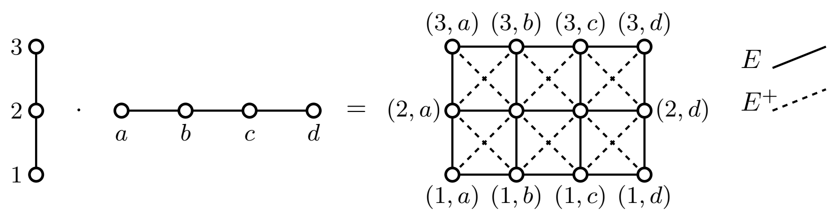
Geben Sie die dazu duale Aussage für Graphen mit $\omega(G) = \chi(G)$ an.

Aufgabe 6: Überhaupt nicht perfekt ⋆⋆⋆

Es soll gezeigt werden, dass die Differenz zwischen der Cliquenzahl und der chromatischen Zahl beliebig groß sein kann. Zeigen Sie dazu, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ein Graph G existiert, sodass $\omega(G) = 2$ und $\chi(G) = k$ gilt.

Aufgabe 7: Graphparameter und das normale Produkt ⋆⋆

Das *normale Produkt* $G_1 \cdot G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert als $G_1 \cdot G_2 = (V_1 \times V_2, E \cup E^+)$ mit $E = \{\{(v_1, v_2), (v_1', v_2')\} \mid$ entweder $v_1 = v_1'$ und $\{v_2, v_2'\} \in E_2$ oder $v_2 = v_2'$ und $\{v_1, v_1'\} \in E_1\}$ und $E^+ = \{\{(v_1, v_2), (v_1', v_2')\} \mid \{v_1, v_1'\} \in E_1$ und $\{v_2, v_2'\} \in E_2\}$ (siehe Beispiel unten).



Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\chi(G_1 \cdot G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

(b) $\omega(G_1 \cdot G_2) = \omega(G_1) \cdot \omega(G_2)$

(c) $\alpha(G_1 \cdot G_2) \geq \alpha(G_1) \cdot \alpha(G_2)$

(d) $k(G_1 \cdot G_2) \leq k(G_1) \cdot k(G_2)$