

Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

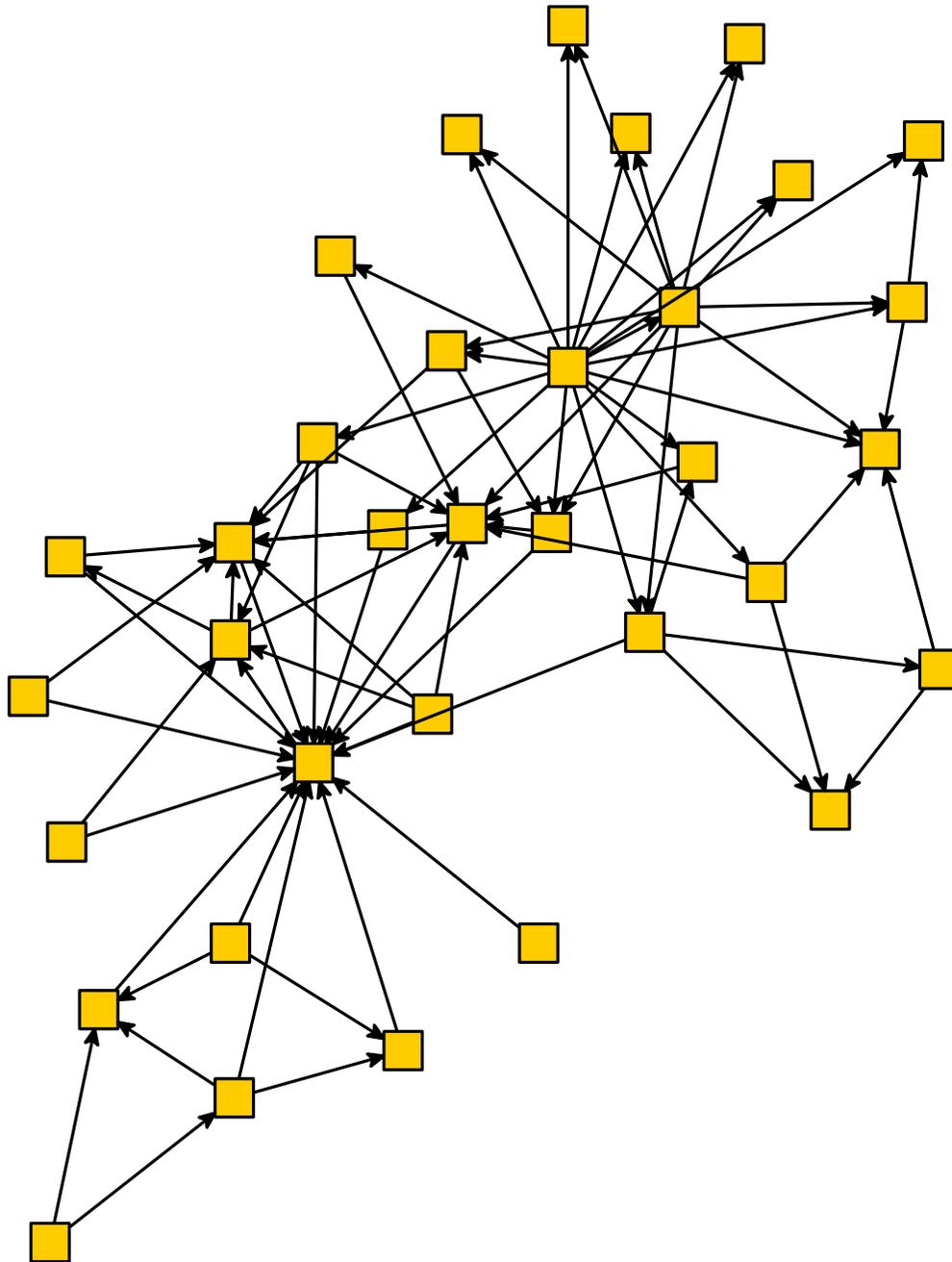
Lagenlayouts

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Tamara Mchedlidze · **Martin Nöllenburg**
14.01.2014



Ein Beispielgraph...

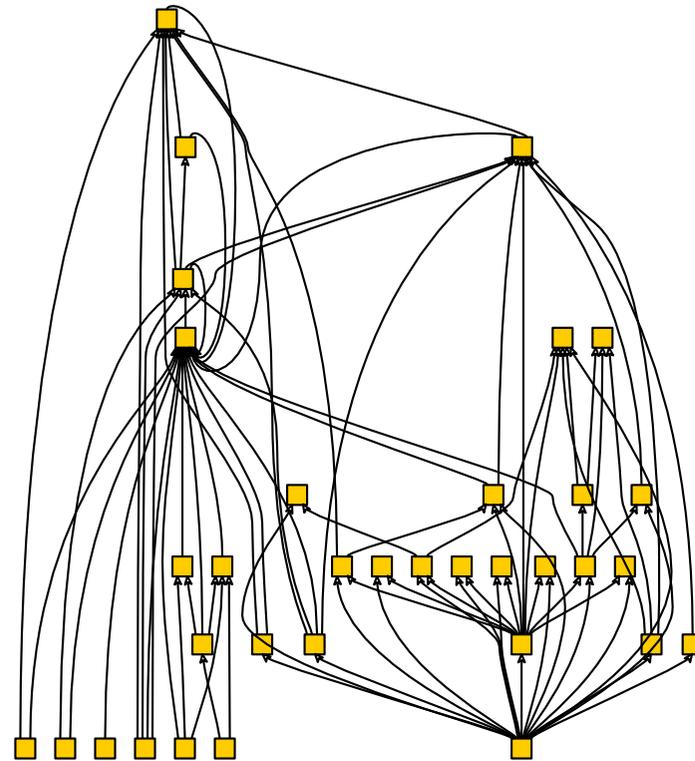
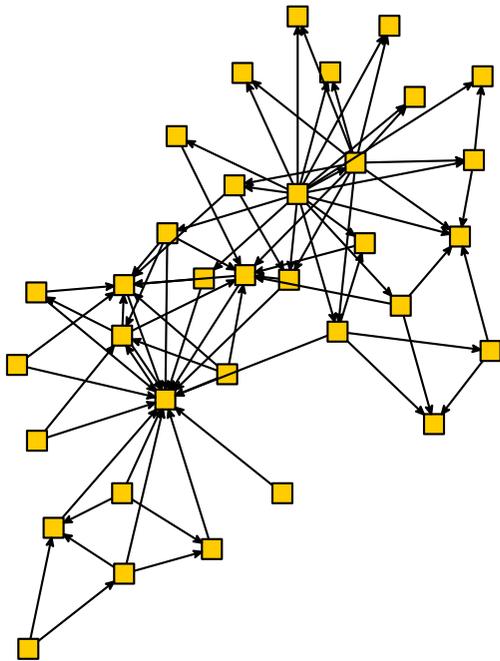


- Welche Eigenschaften haben wir?
- Welche Ästhetikkriterien sind sinnvoll?

Lagenlayouts

Geg.: gerichteter Graph $D = (V, A)$

Ges.: Zeichnung von D , die die Hierarchie verdeutlicht



Lagenlayouts

Geg.: gerichteter Graph $D = (V, A)$

Ges.: Zeichnung von D , die die Hierarchie verdeutlicht

Kriterien:

- möglichst viele Kanten aufwärtsgerichtet
- Kanten möglichst geradlinig und kurz
- Zuordnung der Knoten auf (wenige) horizontale Ebenen
- möglichst wenige Kantenkreuzungen
- Knoten gleichmäßig verteilt

Lagenlayouts

Geg.: gerichteter Graph $D = (V, A)$

Ges.: Zeichnung von D , die die Hierarchie verdeutlicht

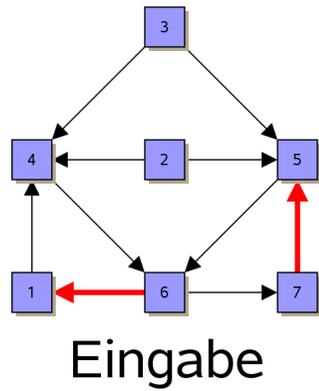
Kriterien:

- möglichst viele Kanten aufwärtsgerichtet
- Kanten möglichst geradlinig und kurz
- Zuordnung der Knoten auf (wenige) horizontale Ebenen
- möglichst wenige Kantenkreuzungen
- Knoten gleichmäßig verteilt

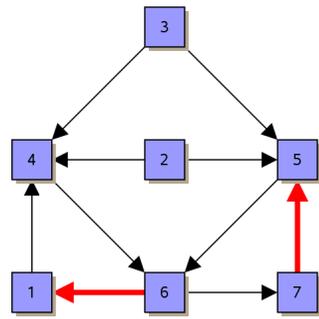


Optimierungskriterien widersprechen sich zum Teil

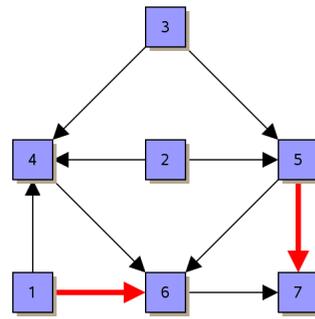
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)

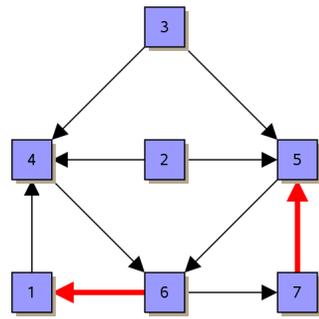


Eingabe

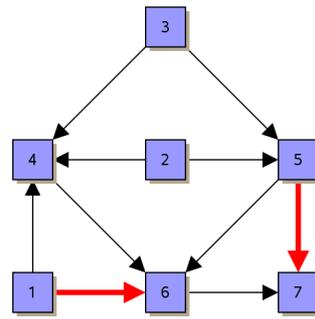


Kreise brechen

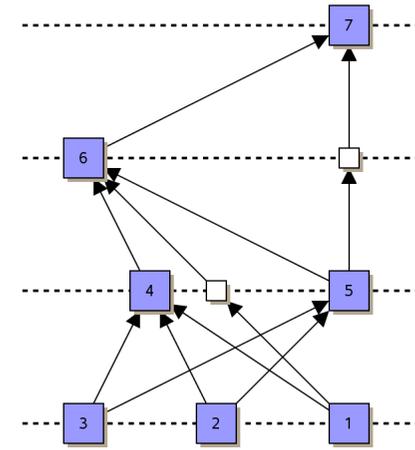
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



Eingabe

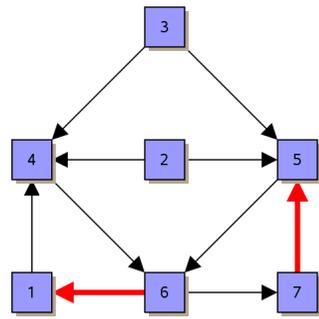


Kreise brechen

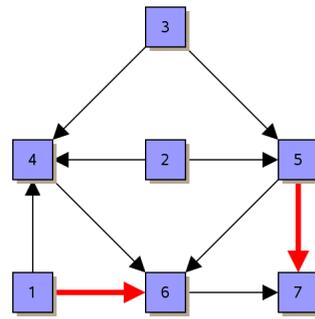


Lagenzuordnung

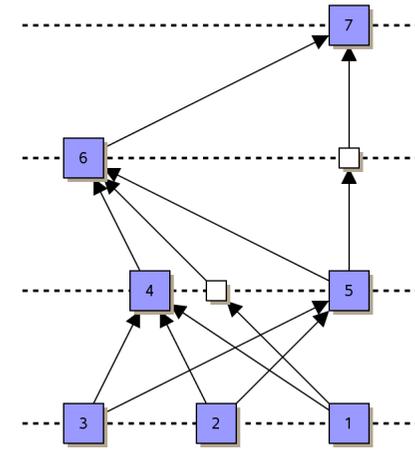
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



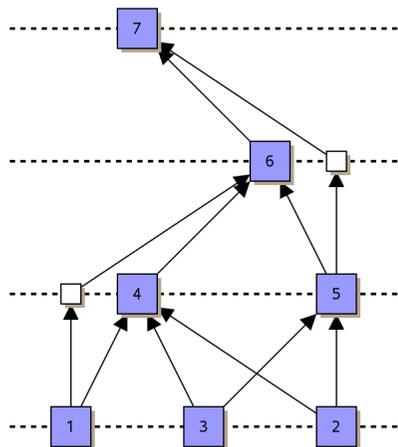
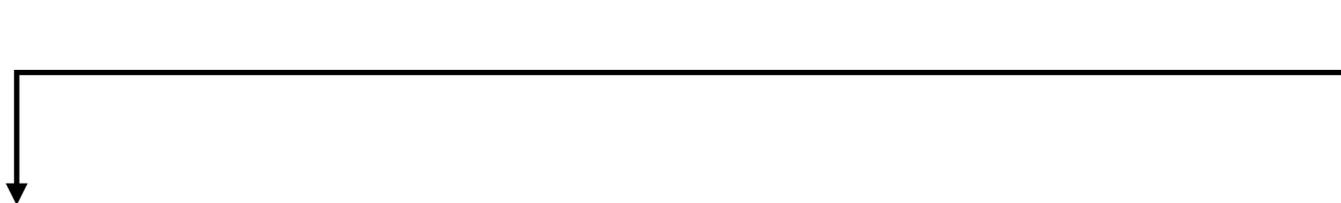
Eingabe



Kreise brechen

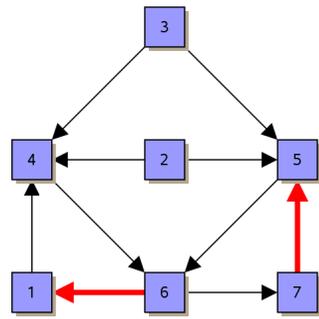


Lagenzuordnung

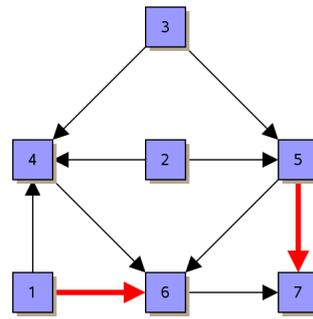


Kreuzungsminimierung

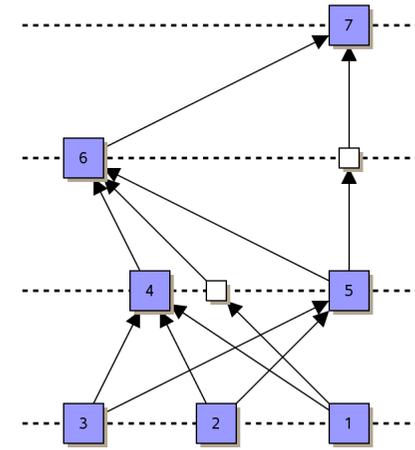
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



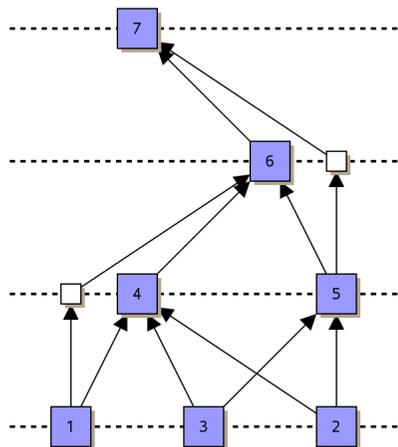
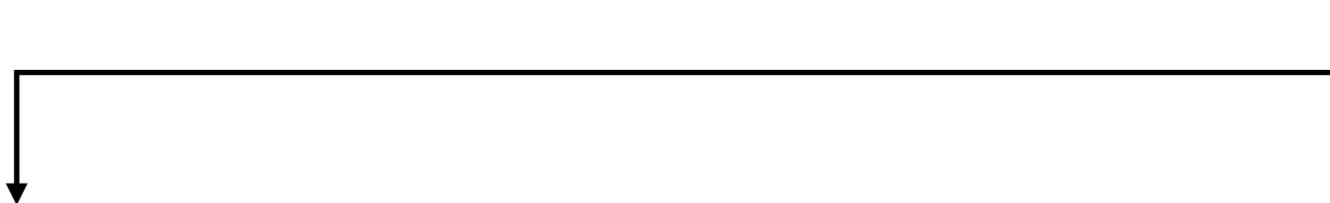
Eingabe



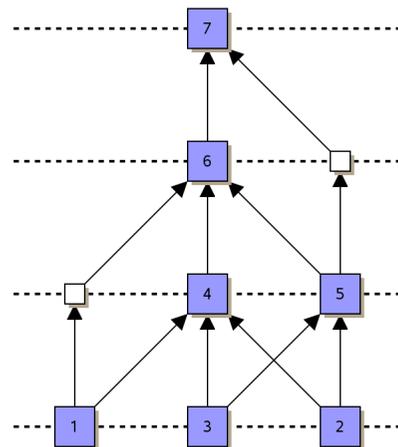
Kreise brechen



Lagenzuordnung

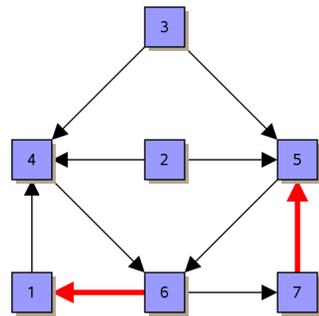


Kreuzungsminimierung

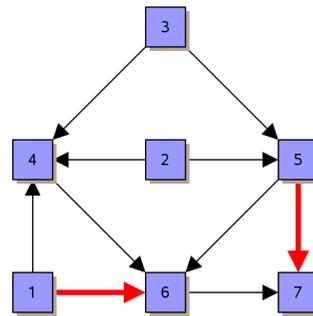


Knotenpositionierung

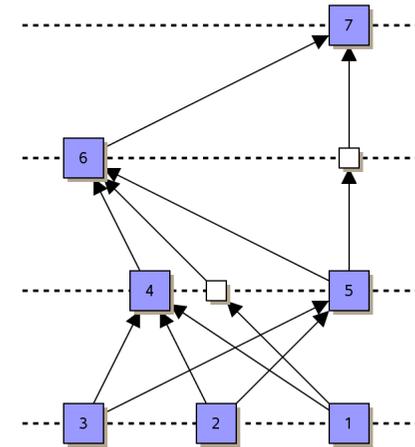
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



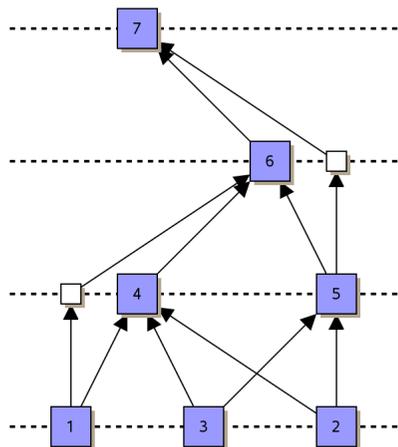
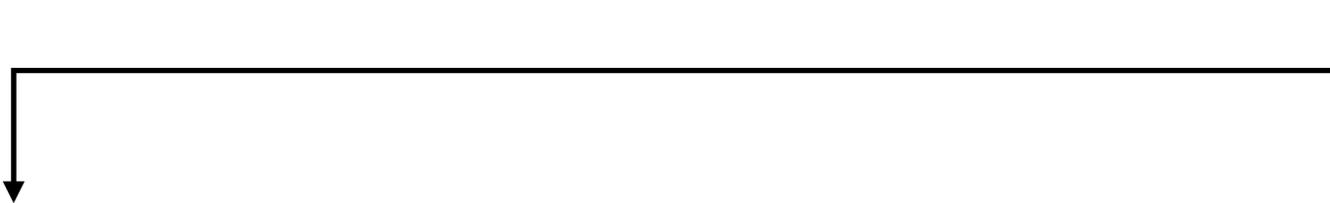
Eingabe



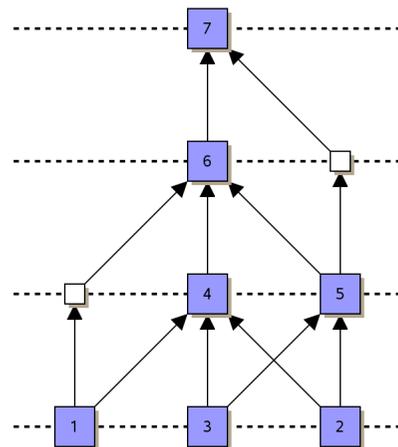
Kreise brechen



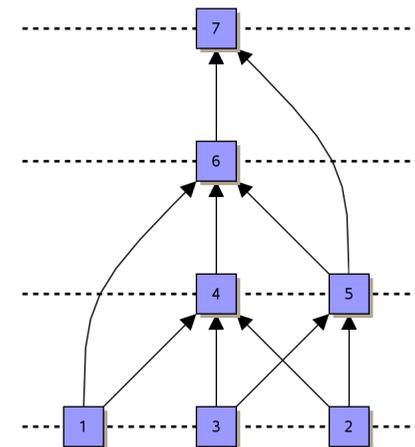
Lagenzuordnung



Kreuzungsminimierung

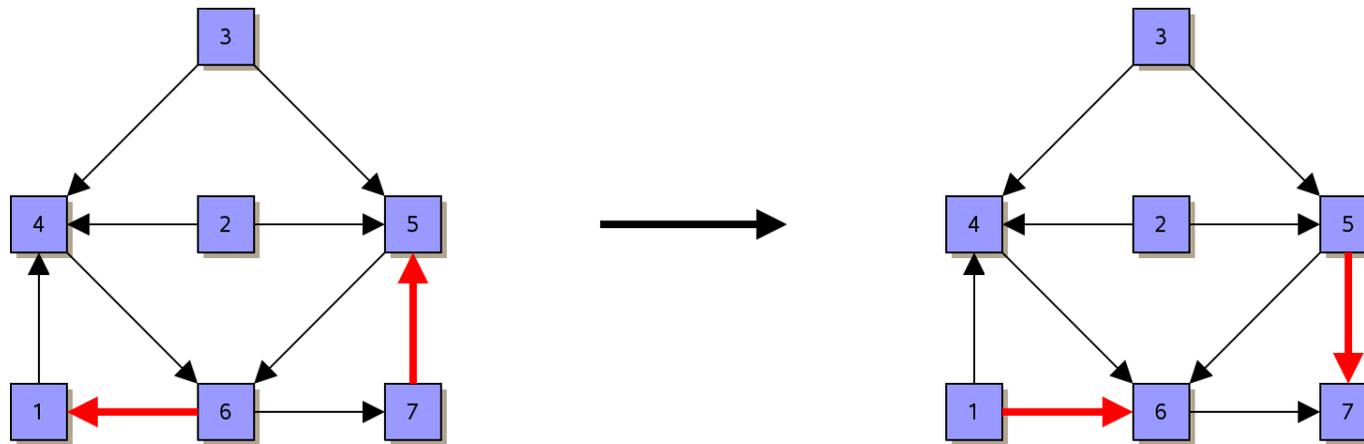


Knotenpositionierung



Kanten zeichnen

Schritt 1: Kreise entfernen



Wie würden Sie vorgehen?

Feedback Arc Set

- Idee:**
- finde maximalen azyklischen Teilgraphen
 - invertiere Richtung der übrigen Kanten

Feedback Arc Set

- Idee:**
- finde maximalen azyklischen Teilgraphen
 - invertiere Richtung der übrigen Kanten

Maximum Acyclic Subgraph

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: azyklischer Teilgraph $D' = (V, A')$ mit $|A'|$ maximal

Feedback Arc Set

- Idee:**
- finde maximalen azyklischen Teilgraphen
 - invertiere Richtung der übrigen Kanten

Maximum Acyclic Subgraph

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: azyklischer Teilgraph $D' = (V, A')$ mit $|A'|$ maximal

Minimum Feedback Arc Set (FAS)

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: $A_f \subset A$, mit $D_f = (V, A \setminus A_f)$ azyklisch und $|A_f|$ minimal

Feedback Arc Set

- Idee:**
- finde maximalen azyklischen Teilgraphen
 - invertiere Richtung der übrigen Kanten

Maximum Acyclic Subgraph

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: azyklischer Teilgraph $D' = (V, A')$ mit $|A'|$ maximal

Minimum Feedback Arc Set (FAS)

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: $A_f \subset A$, mit $D_f = (V, A \setminus A_f)$ azyklisch und $|A_f|$ minimal

Minimum Feedback Set (FS)

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: $A_f \subset A$, mit $D_f = (V, A \setminus A_f \cup \text{rev}(A_f))$ azyklisch und $|A_f|$ minimal

Feedback Arc Set

- Idee:**
- finde maximalen azyklischen Teilgraphen
 - invertiere Richtung der übrigen Kanten

Maximum Acyclic Subgraph

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: azyklischer Teilgraph $D' = (V, A')$ mit $|A'|$ maximal

Minimum Feedback Arc Set (FAS)

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: $A_f \subset A$, mit $D_f = (V, A \setminus A_f)$ azyklisch und $|A_f|$ minimal

Minimum Feedback Set (FS)

geg: gerichteter Graph $D = (V, A)$

ges: $A_f \subset A$, mit $D_f = (V, A \setminus A_f \cup \text{rev}(A_f))$ azyklisch und $|A_f|$ minimal

Alle drei Probleme sind NP-schwer!

Heuristik 1 (Berger, Shor 1990)

$A' := \emptyset;$

foreach $v \in V$ **do**

if $|N^{\rightarrow}(v)| \geq |N^{\leftarrow}(v)|$ **then**

$A' := A' \cup N^{\rightarrow}(v);$

else

$A' := A' \cup N^{\leftarrow}(v);$

 entferne v und $N(v)$ aus D .

return (V, A')

$$N^{\rightarrow}(v) := \{(v, u) : (v, u) \in A\}$$

$$N^{\leftarrow}(v) := \{(u, v) : (u, v) \in A\}$$

$$N(v) := N^{\rightarrow}(v) \cup N^{\leftarrow}(v)$$

Heuristik 1 (Berger, Shor 1990)

$A' := \emptyset;$

foreach $v \in V$ **do**

if $|N^{\rightarrow}(v)| \geq |N^{\leftarrow}(v)|$ **then**

$A' := A' \cup N^{\rightarrow}(v);$

else

$A' := A' \cup N^{\leftarrow}(v);$

 entferne v und $N(v)$ aus D .

return (V, A')

$$N^{\rightarrow}(v) := \{(v, u) : (v, u) \in A\}$$

$$N^{\leftarrow}(v) := \{(u, v) : (u, v) \in A\}$$

$$N(v) := N^{\rightarrow}(v) \cup N^{\leftarrow}(v)$$

- $D' = (V, A')$ ist ein DAG
- $A \setminus A'$ ist ein feedback arc set
- Laufzeit?
- $|A'| = ?$

Heuristik 1 (Berger, Shor 1990)

$A' := \emptyset;$

foreach $v \in V$ **do**

if $|N^{\rightarrow}(v)| \geq |N^{\leftarrow}(v)|$ **then**

$A' := A' \cup N^{\rightarrow}(v);$

else

$A' := A' \cup N^{\leftarrow}(v);$

 entferne v und $N(v)$ aus D .

return (V, A')

$$N^{\rightarrow}(v) := \{(v, u) : (v, u) \in A\}$$

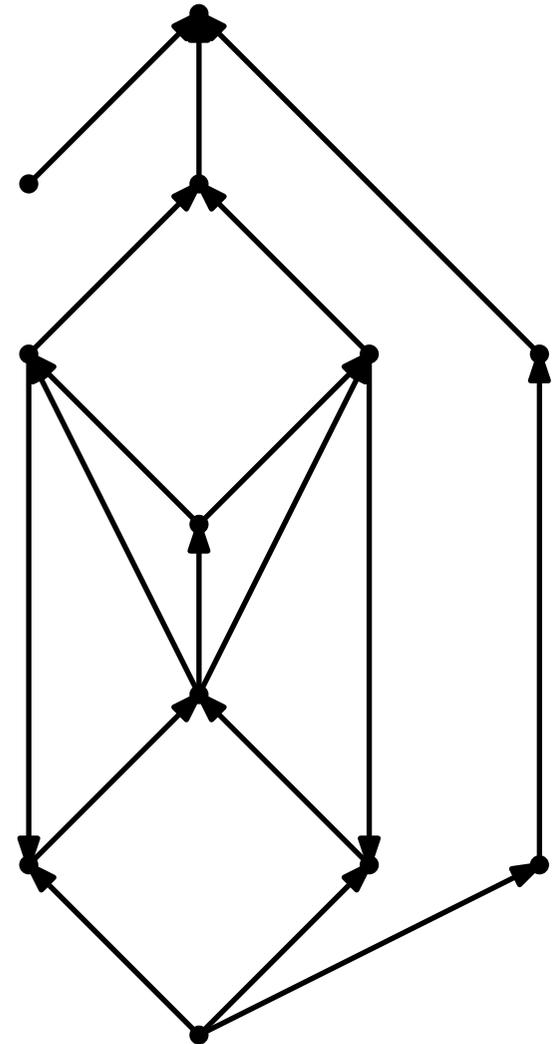
$$N^{\leftarrow}(v) := \{(u, v) : (u, v) \in A\}$$

$$N(v) := N^{\rightarrow}(v) \cup N^{\leftarrow}(v)$$

- $D' = (V, A')$ ist ein DAG
- $A \setminus A'$ ist ein feedback arc set
- Laufzeit $O(|V| + |A|)$
- $|A'| \geq |A|/2$

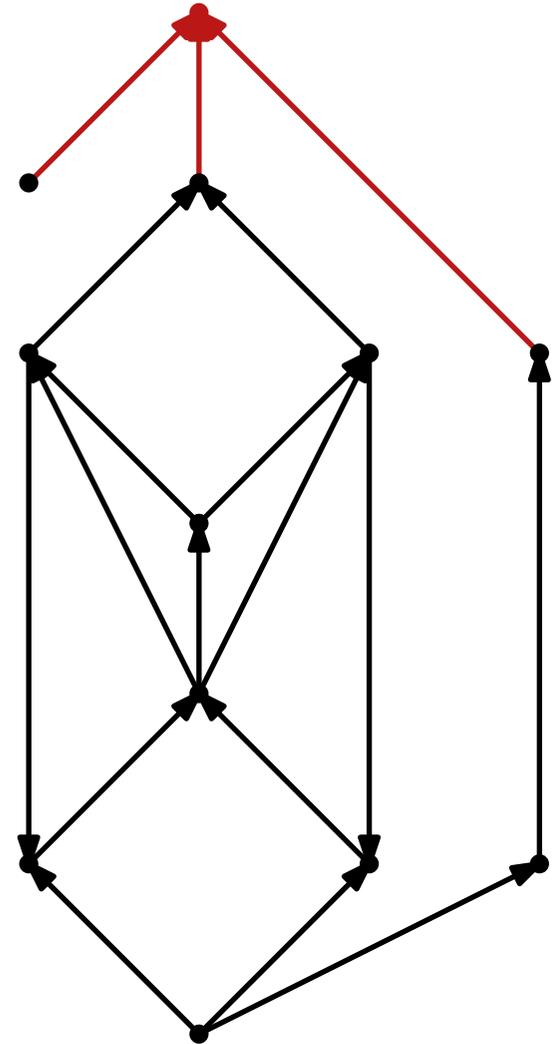
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

- 1 $A' := \emptyset;$
- 2 **while** $V \neq \emptyset$ **do**
- 3 **while** in V existiert eine Senke v **do**
- 4 $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$
- 5 entferne v und $N^{\leftarrow}(v)$: $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$



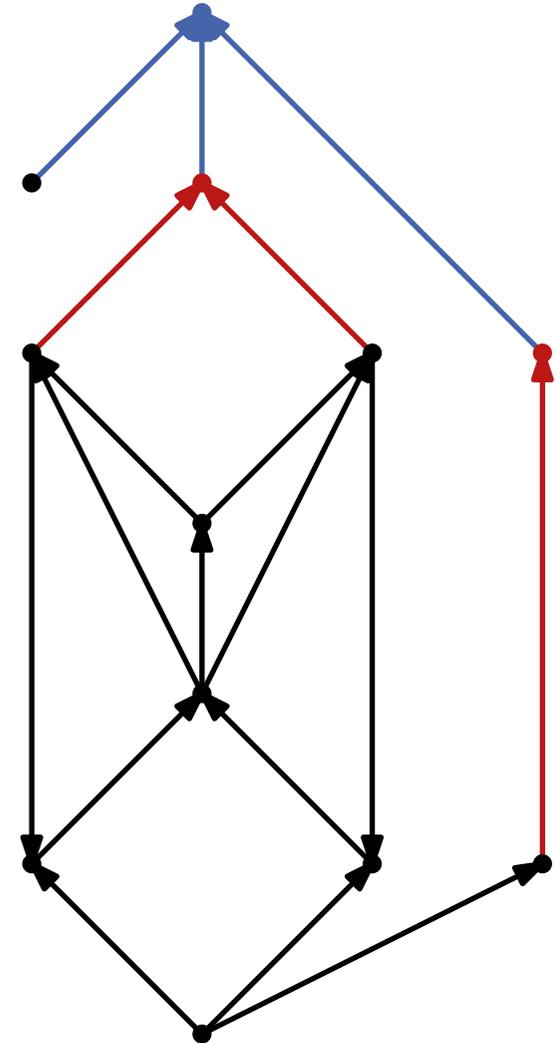
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

- 1 $A' := \emptyset;$
- 2 **while** $V \neq \emptyset$ **do**
- 3 **while** in V existiert eine Senke v **do**
- 4 $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$
- 5 entferne v und $N^{\leftarrow}(v)$: $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$



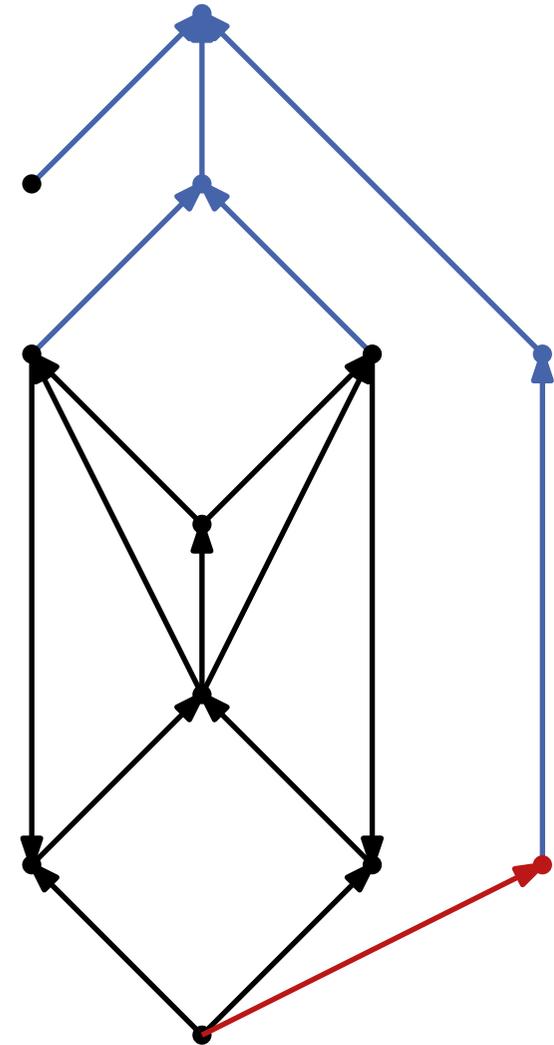
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

- 1 $A' := \emptyset;$
- 2 **while** $V \neq \emptyset$ **do**
- 3 **while** in V existiert eine Senke v **do**
- 4 $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$
- 5 entferne v und $N^{\leftarrow}(v)$: $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$



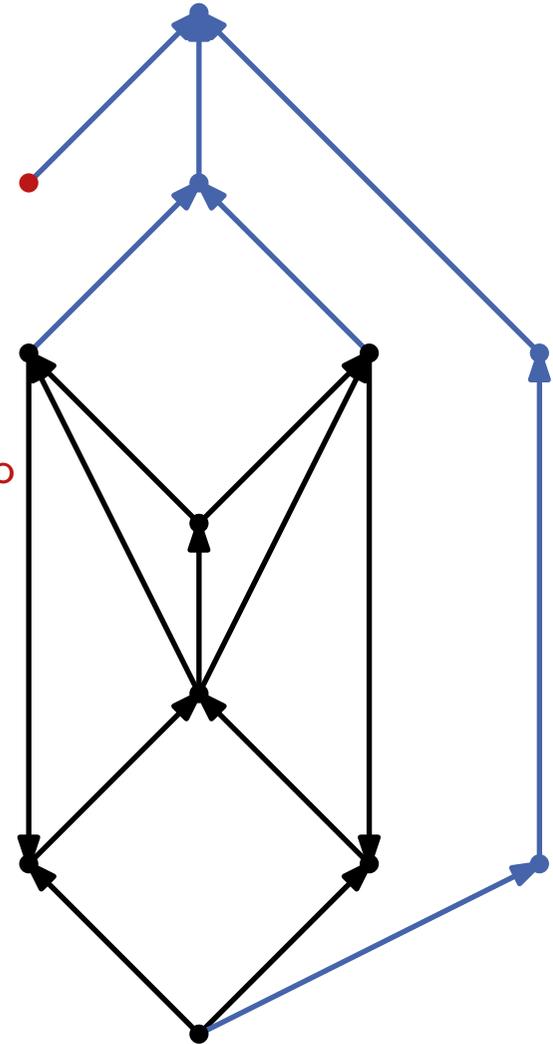
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

- 1 $A' := \emptyset;$
- 2 **while** $V \neq \emptyset$ **do**
- 3 **while** in V existiert eine Senke v **do**
- 4 $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$
- 5 entferne v und $N^{\leftarrow}(v)$: $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$



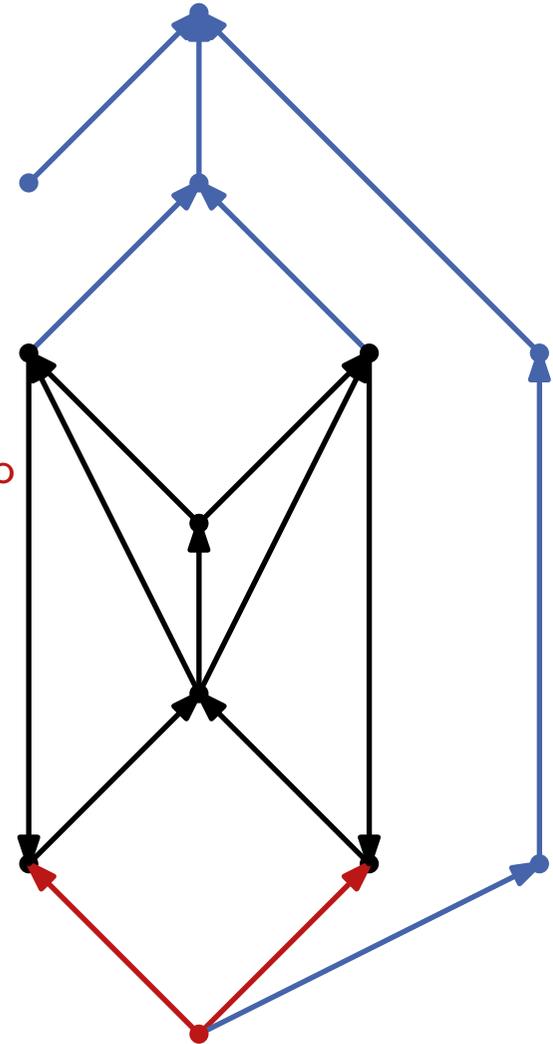
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

- 1 $A' := \emptyset;$
- 2 **while** $V \neq \emptyset$ **do**
- 3 **while** in V existiert eine Senke v **do**
- 4 $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$
- 5 entferne v und $N^{\leftarrow}(v)$: $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$
- 6 Entferne alle isolierten Knoten aus V : $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$



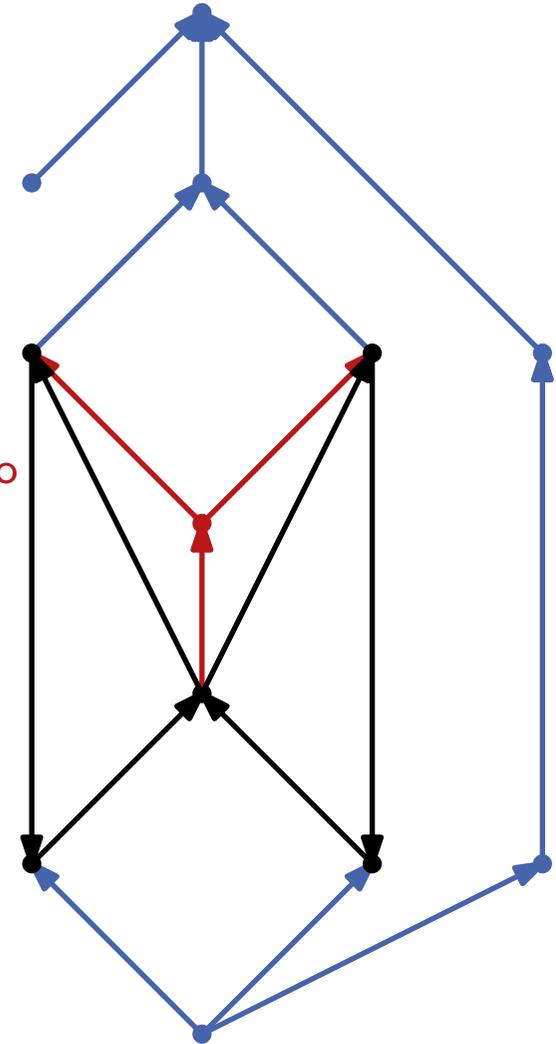
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

```
1  $A' := \emptyset;$   
2 while  $V \neq \emptyset$  do  
3   while in  $V$  existiert eine Senke  $v$  do  
4      $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$   
5     entferne  $v$  und  $N^{\leftarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$   
6   Entferne alle isolierten Knoten aus  $V$ :  $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$   
7   while in  $V$  existiert eine Quelle  $v$  do  
8      $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
9     entferne  $v$  und  $N^{\rightarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{source}}$ 
```

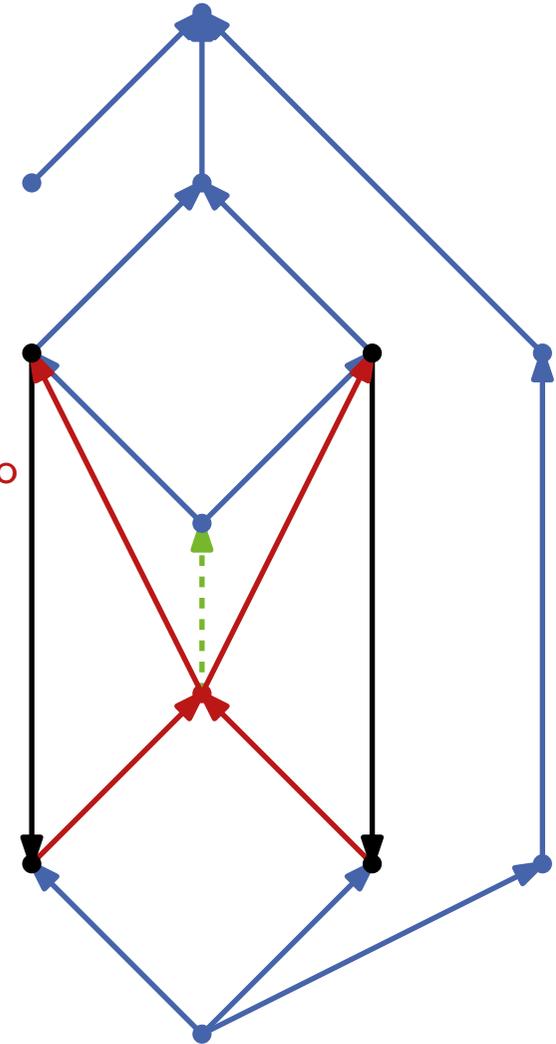


Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

```
1  $A' := \emptyset;$ 
2 while  $V \neq \emptyset$  do
3   while in  $V$  existiert eine Senke  $v$  do
4      $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$ 
5     entferne  $v$  und  $N^{\leftarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$ 
6   Entferne alle isolierten Knoten aus  $V$ :  $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$ 
7   while in  $V$  existiert eine Quelle  $v$  do
8      $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$ 
9     entferne  $v$  und  $N^{\rightarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{source}}$ 
10  if  $V \neq \emptyset$  then
11    sei  $v \in V$  mit  $|N^{\rightarrow}(v)| - |N^{\leftarrow}(v)|$  maximal;
12     $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$ 
13    entferne  $v$  und  $N(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\{=, <\}}$ 
```

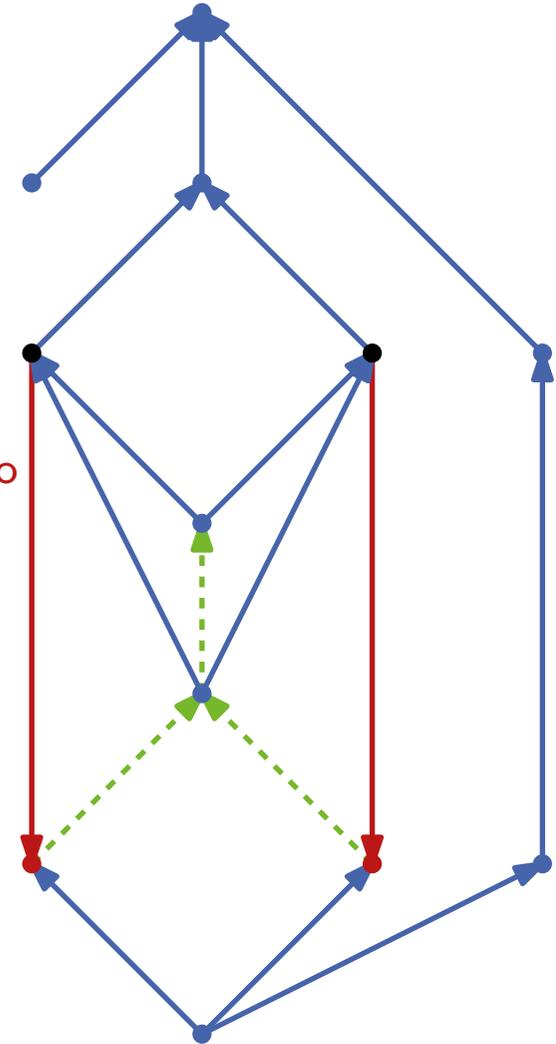


```
1  $A' := \emptyset;$   
2 while  $V \neq \emptyset$  do  
3   while in  $V$  existiert eine Senke  $v$  do  
4      $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$   
5     entferne  $v$  und  $N^{\leftarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$   
6   Entferne alle isolierten Knoten aus  $V$ :  $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$   
7   while in  $V$  existiert eine Quelle  $v$  do  
8      $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
9     entferne  $v$  und  $N^{\rightarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{source}}$   
10  if  $V \neq \emptyset$  then  
11    sei  $v \in V$  mit  $|N^{\rightarrow}(v)| - |N^{\leftarrow}(v)|$  maximal;  
12     $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
13    entferne  $v$  und  $N(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\{=, <\}}$ 
```



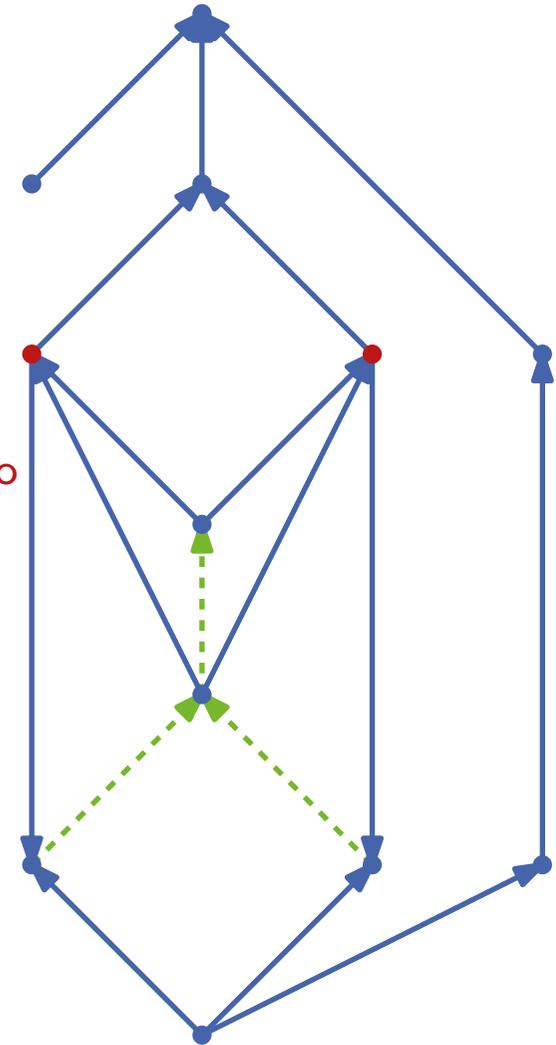
Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

```
1  $A' := \emptyset;$   
2 while  $V \neq \emptyset$  do  
3   while in  $V$  existiert eine Senke  $v$  do  
4      $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$   
5     entferne  $v$  und  $N^{\leftarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$   
6   Entferne alle isolierten Knoten aus  $V$ :  $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$   
7   while in  $V$  existiert eine Quelle  $v$  do  
8      $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
9     entferne  $v$  und  $N^{\rightarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{source}}$   
10  if  $V \neq \emptyset$  then  
11    sei  $v \in V$  mit  $|N^{\rightarrow}(v)| - |N^{\leftarrow}(v)|$  maximal;  
12     $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
13    entferne  $v$  und  $N(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\{=, <\}}$ 
```

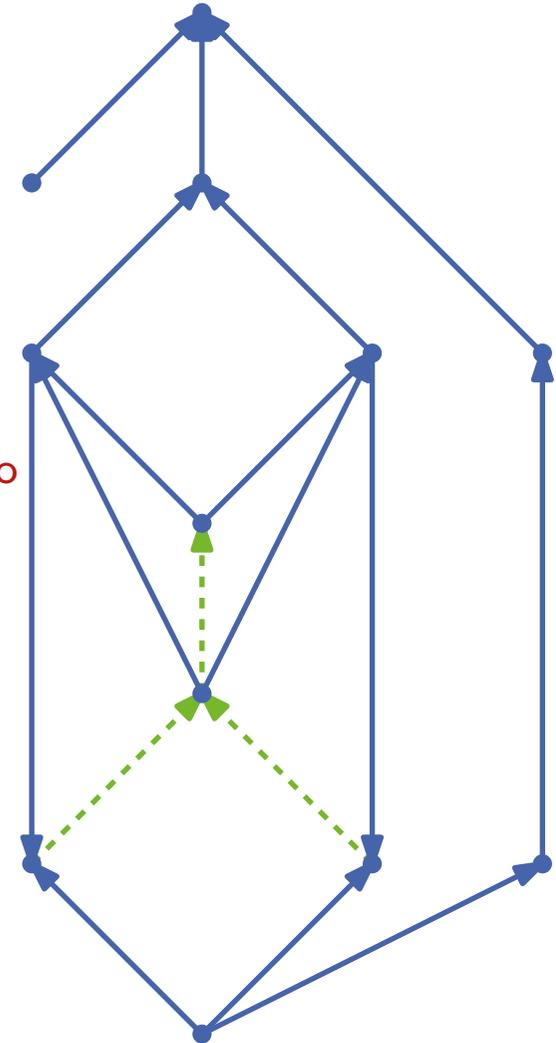


Heuristik 2 (Eades, Lin, Smyth 1993)

```
1  $A' := \emptyset;$   
2 while  $V \neq \emptyset$  do  
3   while in  $V$  existiert eine Senke  $v$  do  
4      $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$   
5     entferne  $v$  und  $N^{\leftarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$   
6   Entferne alle isolierten Knoten aus  $V$ :  $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$   
7   while in  $V$  existiert eine Quelle  $v$  do  
8      $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
9     entferne  $v$  und  $N^{\rightarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{source}}$   
10  if  $V \neq \emptyset$  then  
11    sei  $v \in V$  mit  $|N^{\rightarrow}(v)| - |N^{\leftarrow}(v)|$  maximal;  
12     $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
13    entferne  $v$  und  $N(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\{=, <\}}$ 
```



```
1  $A' := \emptyset;$   
2 while  $V \neq \emptyset$  do  
3   while in  $V$  existiert eine Senke  $v$  do  
4      $A' \leftarrow A' \cup N^{\leftarrow}(v)$   
5     entferne  $v$  und  $N^{\leftarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{sink}}$   
6   Entferne alle isolierten Knoten aus  $V$ :  $\{V, n, m\}_{\text{iso}}$   
7   while in  $V$  existiert eine Quelle  $v$  do  
8      $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
9     entferne  $v$  und  $N^{\rightarrow}(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\text{source}}$   
10  if  $V \neq \emptyset$  then  
11    sei  $v \in V$  mit  $|N^{\rightarrow}(v)| - |N^{\leftarrow}(v)|$  maximal;  
12     $A' \leftarrow A' \cup N^{\rightarrow}(v)$   
13    entferne  $v$  und  $N(v)$ :  $\{V, n, m\}_{\{=, <\}}$ 
```



Heuristik 2 – Analyse

Satz 1: Sei $D = (V, A)$ ein zusammenhängender, gerichteter Graph ohne 2-Kreise. Dann berechnet die Heuristik 2 eine Kantenmenge A' mit $|A'| \geq |A|/2 + |V|/6$. Die Laufzeit liegt in $O(|V| + |A|)$.

Satz 1: Sei $D = (V, A)$ ein zusammenhängender, gerichteter Graph ohne 2-Kreise. Dann berechnet die Heuristik 2 eine Kantenmenge A' mit $|A'| \geq |A|/2 + |V|/6$. Die Laufzeit liegt in $O(|V| + |A|)$.

Weitere Methoden:

- $|A'| \geq |A| \left(1/2 + \Omega \left(\frac{1}{\sqrt{\deg_{\max}(D)}} \right) \right)$ (Berger, Shor 1990)
- exakte Lösung mit ganzzahliger linearer Programmierung, branch-and-cut Technik (Grötschel et al. 1985)

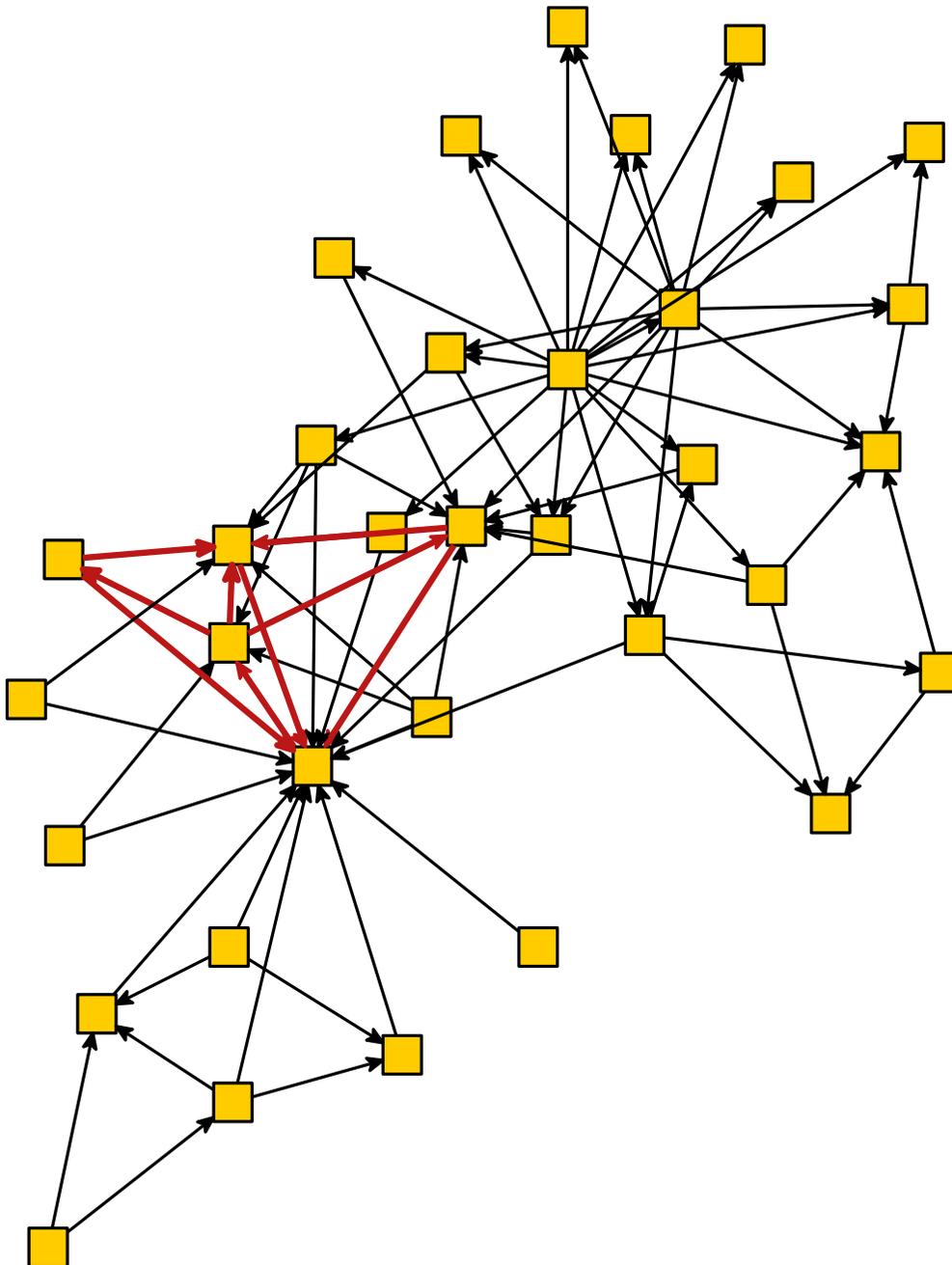
Satz 1: Sei $D = (V, A)$ ein zusammenhängender, gerichteter Graph ohne 2-Kreise. Dann berechnet die Heuristik 2 eine Kantenmenge A' mit $|A'| \geq |A|/2 + |V|/6$. Die Laufzeit liegt in $O(|V| + |A|)$.

Weitere Methoden:

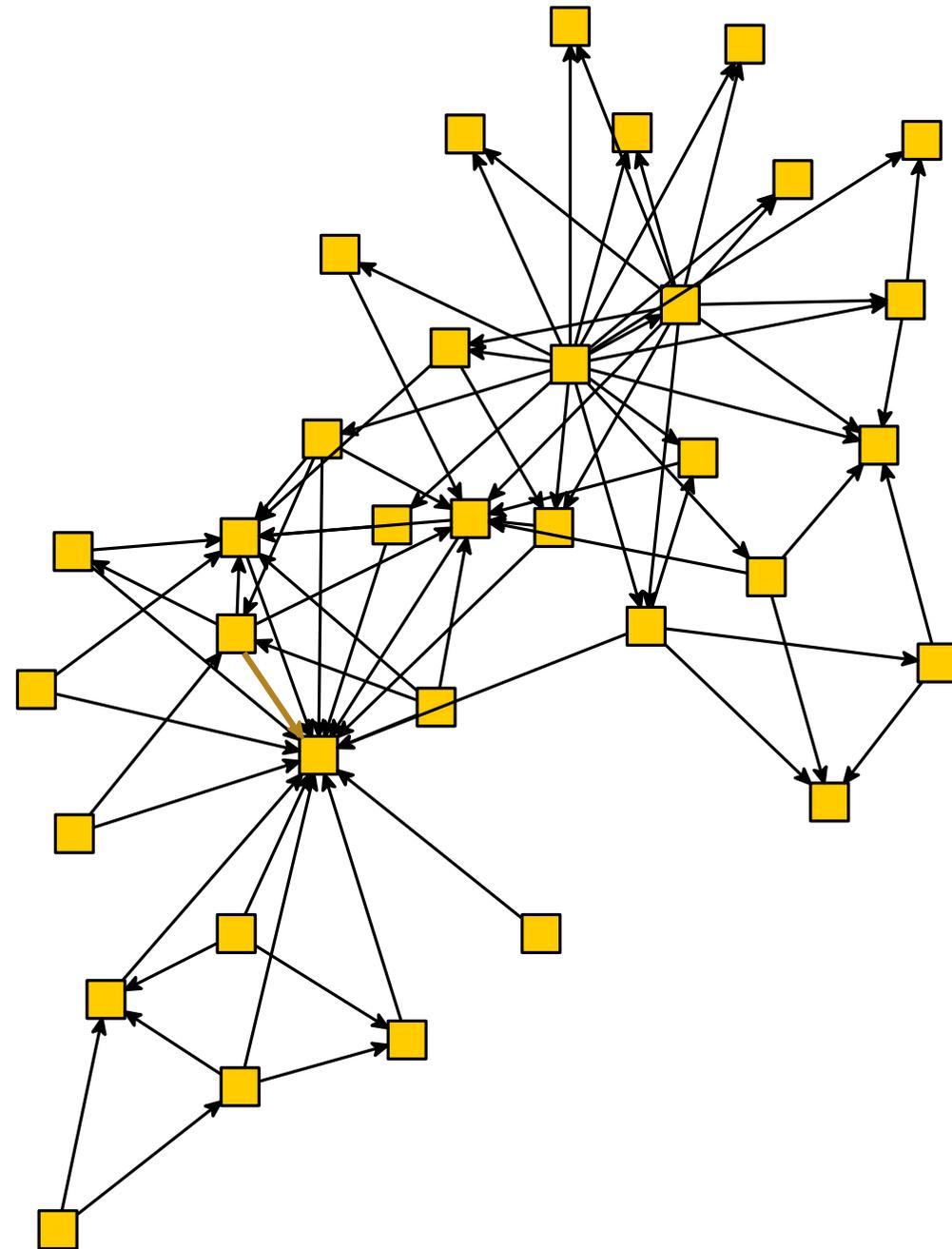
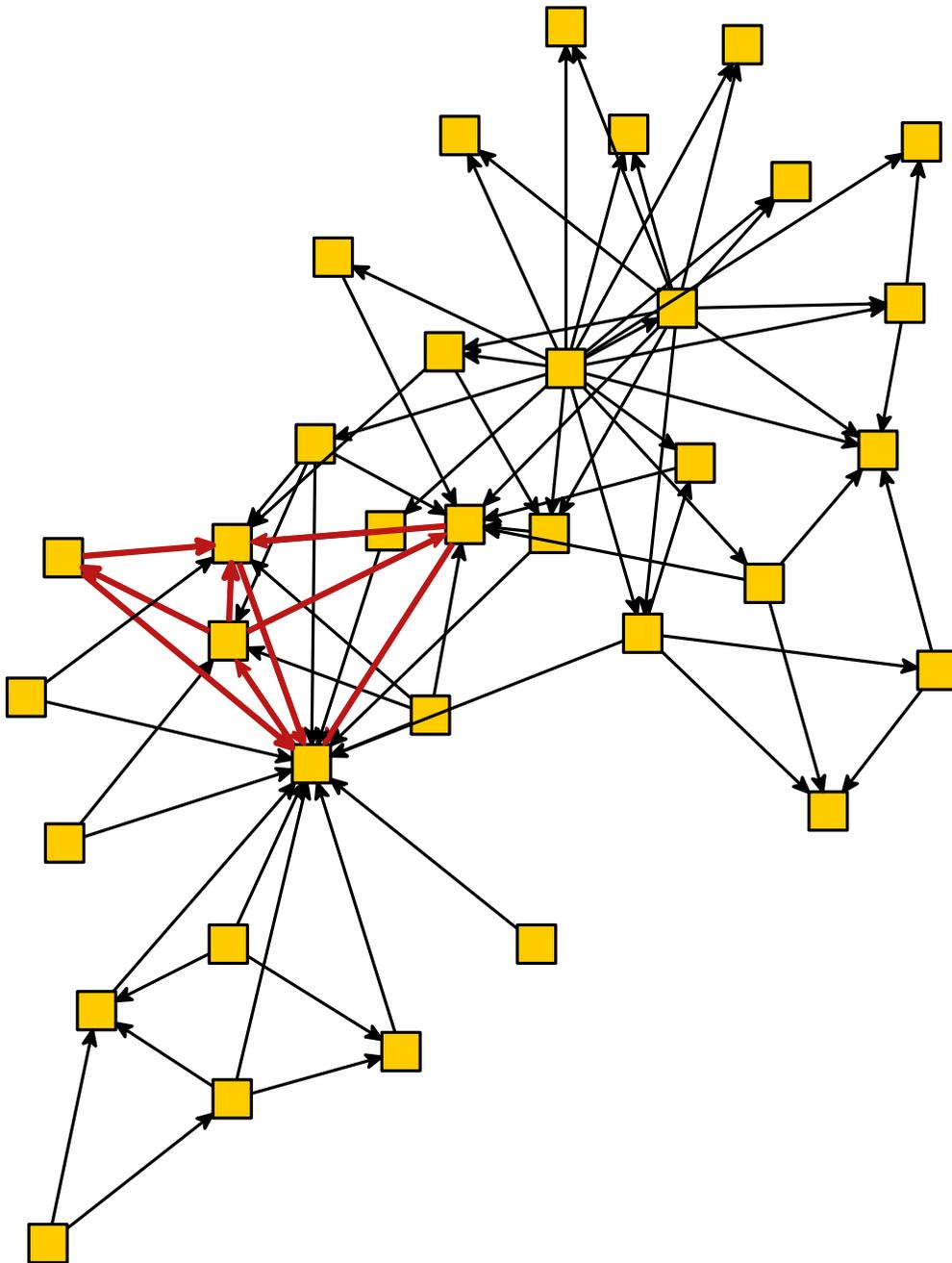
- $|A'| \geq |A| \left(1/2 + \Omega \left(\frac{1}{\sqrt{\deg_{\max}(D)}} \right) \right)$ (Berger, Shor 1990)
- exakte Lösung mit ganzzahliger linearer Programmierung, branch-and-cut Technik (Grötschel et al. 1985)

Für $|A| \in O(|V|)$ ist Heuristik 2 mindestens genauso gut.

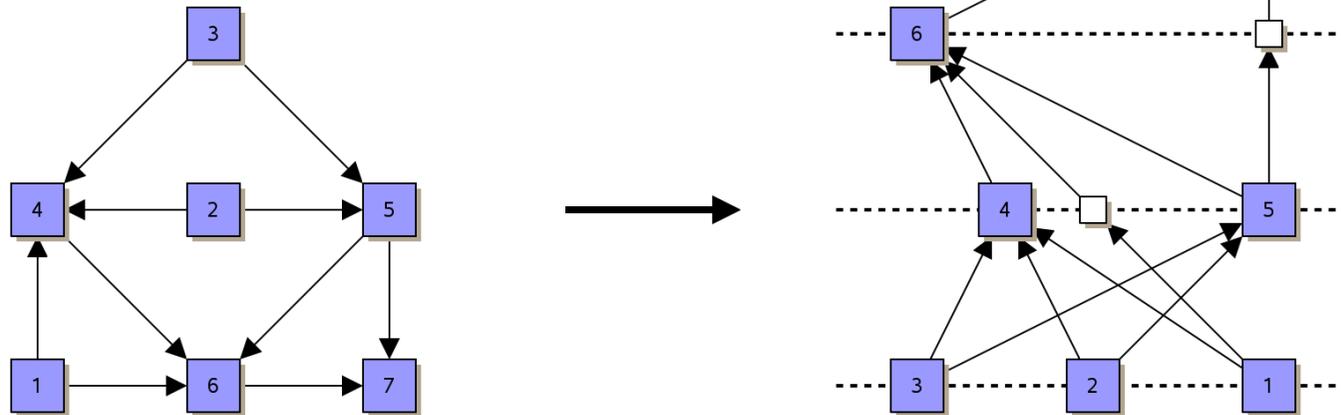
Beispielgraph



Beispielgraph



Schritt 2: Lagenzuordnung



Wie würden Sie vorgehen?

Lagenzuordnung

Geg.: gerichteter azyklischer Graph (DAG) $D = (V, A)$

Ges.: Partition der Knotenmenge V in disjunkte **Lagen**

L_1, \dots, L_h mit $(u, v) \in A, u \in L_i, v \in L_j \Rightarrow i < j$

Def: y -Koordinate $y(u) = i \Leftrightarrow u \in L_i$

Lagenzuordnung

Geg.: gerichteter azyklischer Graph (DAG) $D = (V, A)$

Ges.: Partition der Knotenmenge V in disjunkte **Lagen**

$$L_1, \dots, L_h \text{ mit } (u, v) \in A, u \in L_i, v \in L_j \Rightarrow i < j$$

Def: y -Koordinate $y(u) = i \Leftrightarrow u \in L_i$

Kriterien

- minimiere Lagenanzahl h (= Höhe des Layouts)
- minimiere Breite, d.h. $\max\{|L_i| \mid 1 \leq i \leq h\}$
- minimiere längste Kante, d.h.
 $\max\{j - i \mid (u, v) \in A, u \in L_i, v \in L_j\}$
- minimiere Gesamtkantenlänge ($\hat{=}$ Anzahl Dummyknoten)

Höhenminimierung

Idee: ordne jeden Knoten v der Lage L_i zu, für die i die Länge des längsten einfachen Wegs von einer Quelle zu v ist

- alle Vorgängerknoten liegen unterhalb von v
- die Gesamthöhe h ist minimal

Idee: ordne jeden Knoten v der Lage L_i zu, für die i die Länge des längsten einfachen Wegs von einer Quelle zu v ist

- alle Vorgängerknoten liegen unterhalb von v
- die Gesamthöhe h ist minimal

Algorithmus

- $L_1 \leftarrow$ Menge aller Quellen in D
- setze $y(u) \leftarrow \max_{v \in N^{\leftarrow}(u)} \{y(v)\} + 1$

Idee: ordne jeden Knoten v der Lage L_i zu, für die i die Länge des längsten einfachen Wegs von einer Quelle zu v ist

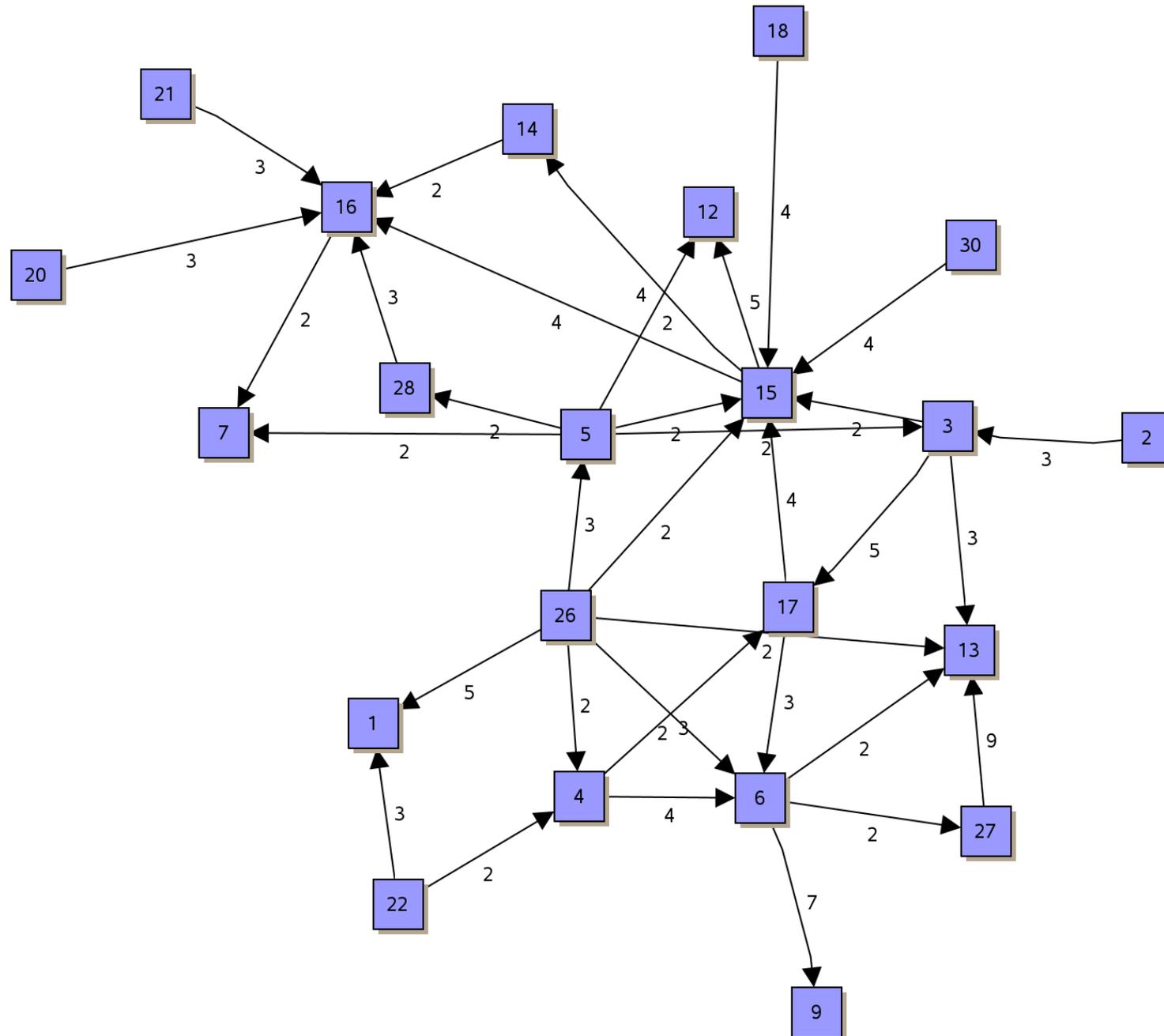
- alle Vorgängerknoten liegen unterhalb von v
- die Gesamthöhe h ist minimal

Algorithmus

- $L_1 \leftarrow$ Menge aller Quellen in D
- setze $y(u) \leftarrow \max_{v \in N^{\leftarrow}(u)} \{y(v)\} + 1$

Wie kann man das in Linearzeit $O(|V| + |A|)$ implementieren?

Beispiel



Minimierung der Gesamtkantenlänge

Lässt sich als ganzzahliges lineares Programm formulieren:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(u,v) \in A} (y(v) - y(u)) \\ \text{subject to} & y(v) - y(u) \geq 1 \quad \forall (u,v) \in A \\ & y(v) \geq 1 \quad \forall v \in V \\ & y(v) \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in V \end{array}$$

Minimierung der Gesamtkantenlänge

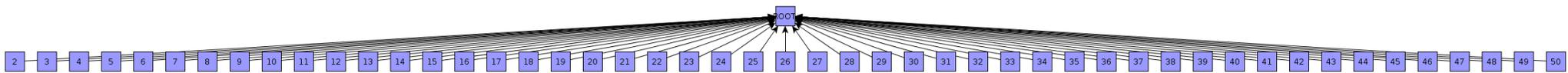
Lässt sich als ganzzahliges lineares Programm formulieren:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(u,v) \in A} (y(v) - y(u)) \\ \text{subject to} & y(v) - y(u) \geq 1 \quad \forall (u,v) \in A \\ & y(v) \geq 1 \quad \forall v \in V \\ & y(v) \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in V \end{array}$$

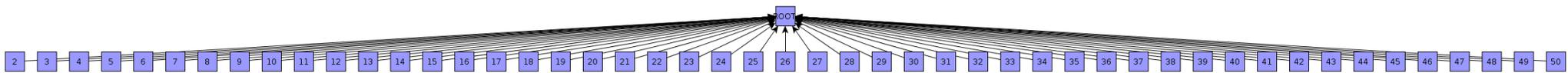
Man kann zeigen:

- Constraint-Matrix ist **total unimodular**
- \Rightarrow Lösung des relaxierten linearen Programms ist ganzzahlig
- Gesamtkantenlänge kann mit LP-Solver in polynomieller Zeit minimiert werden

Problem der Höhen-/Längenminimierung



Problem der Höhen-/Längenminimierung



→ beschränke die Breite!

Lagenzuordnung bei fester Breite

Fixed-Width Layer Assignment

geg: azyklischer gerichteter Graph $D = (V, A)$, Breite B

ges: höhenminimale Lagenzuordnung \mathcal{L} mit maximal B
Knoten pro Lage

Fixed-Width Layer Assignment

geg: azyklischer gerichteter Graph $D = (V, A)$, Breite B

ges: höhenminimale Lagenzuordnung \mathcal{L} mit maximal B
Knoten pro Lage

→ äquivalent zu folgendem Schedulingproblem:

Minimum Precedence Constrained Scheduling (MPCS)

geg: n Jobs J_1, \dots, J_n mit identischer Bearbeitungsdauer,

Vorgängerbedingungen $J_i < J_k$, B identische Maschinen

ges: Schedule mit minimaler Gesamtlänge, der alle
Vorgängerbedingungen einhält

Satz 2: Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob es für n Jobs J_1, \dots, J_n identischer Länge, partielle Vorgängerordnung $<$ und Maschinenanzahl B einen Schedule der Länge höchstens T gibt, selbst für $T = 3$.

Satz 2: Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob es für n Jobs J_1, \dots, J_n identischer Länge, partielle Vorgängerordnung $<$ und Maschinenanzahl B einen Schedule der Länge höchstens T gibt, selbst für $T = 3$.

Korollar: Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gibt es keinen polynomiellen Approximationsalgorithmus für MPCCS mit Approximationsfaktor $< 4/3$.

Satz 2: Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob es für n Jobs J_1, \dots, J_n identischer Länge, partielle Vorgängerordnung $<$ und Maschinenanzahl B einen Schedule der Länge höchstens T gibt, selbst für $T = 3$.

Korollar: Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gibt es keinen polynomiellen Approximationsalgorithmus für MPCCS mit Approximationsfaktor $< 4/3$.

Satz 3: MPCCS hat einen polynomiellen Approximationsalgorithmus mit Faktor $\leq 2 - \frac{1}{B}$.

Satz 2: Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob es für n Jobs J_1, \dots, J_n identischer Länge, partielle Vorgängerordnung $<$ und Maschinenanzahl B einen Schedule der Länge höchstens T gibt, selbst für $T = 3$.

Korollar: Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gibt es keinen polynomiellen Approximationsalgorithmus für MPCCS mit Approximationsfaktor $< 4/3$.

Satz 3: MPCCS hat einen polynomiellen Approximationsalgorithmus mit Faktor $\leq 2 - \frac{1}{B}$.

List-Scheduling-Algorithmus:

- ordne Jobs beliebig als Liste \mathcal{L}
- wenn Maschine frei ist, wähle ersten verfügbaren Job aus \mathcal{L} ; Maschine idle falls kein Job verfügbar

Zusammenfassung

