Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

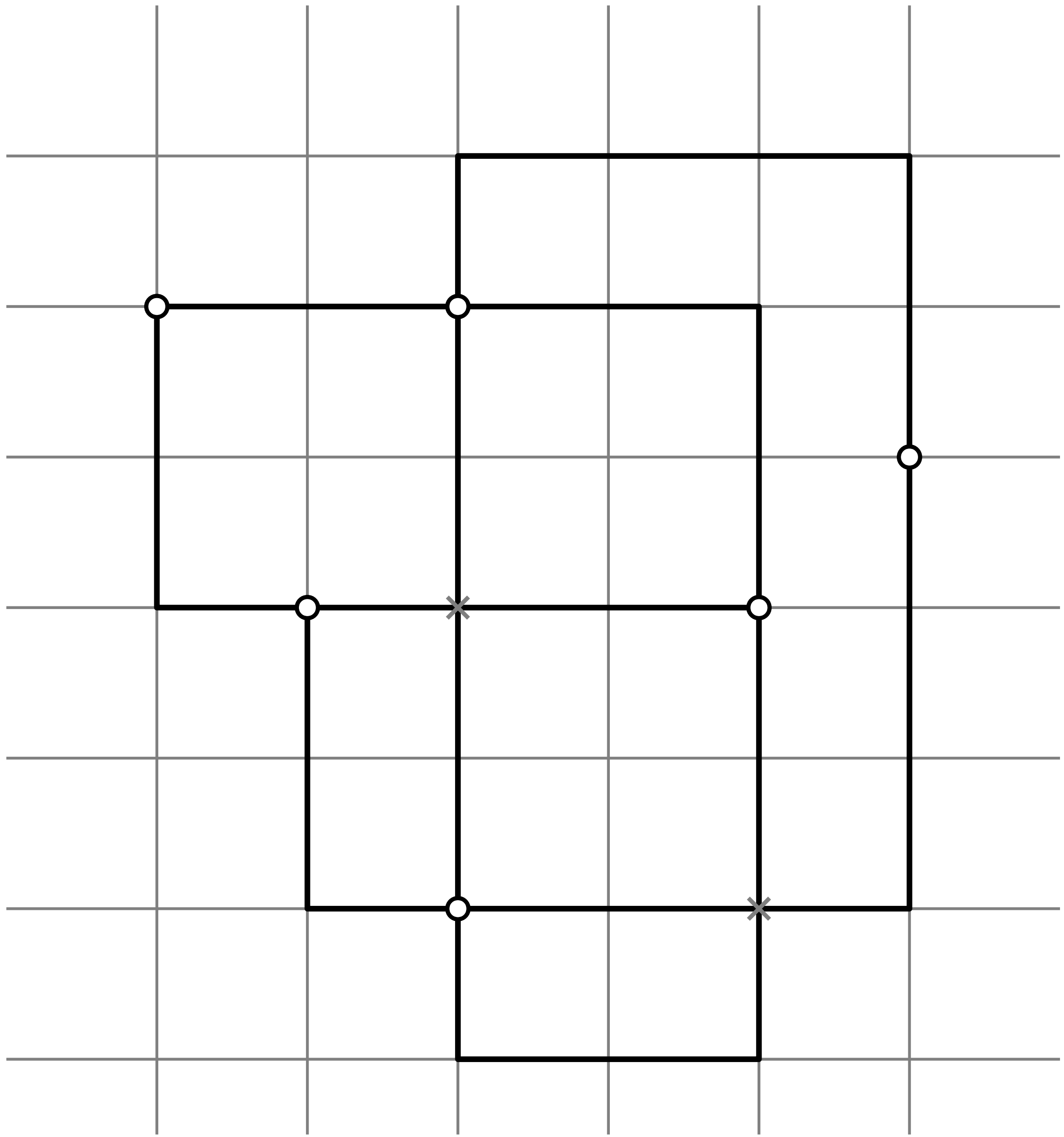
Flussmethoden: orthogonales Graphenzeichnen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Tamara Mchedlidze · **Martin Nöllenburg**

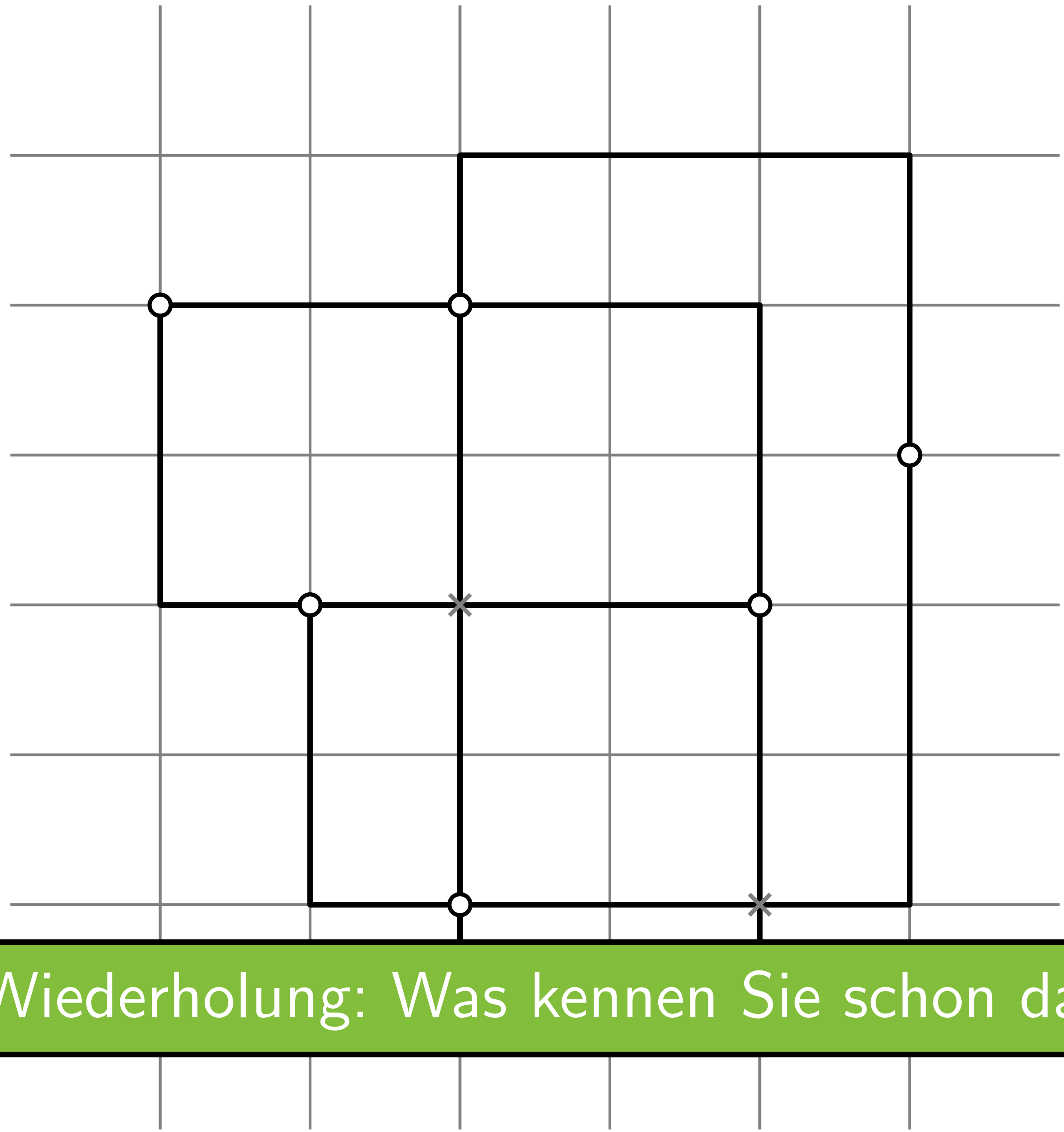
04.12.2013

Orthogonale Gitterzeichnungen



Orthogonale Gitterzeichnungen

Karlsruhe Institute of Technology



Wiederholung: Was kennen Sie schon dazu?

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

[Tamassia SIAM J. Comput. 1987]

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, v_2 v_3, v_2 v_4\}$

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

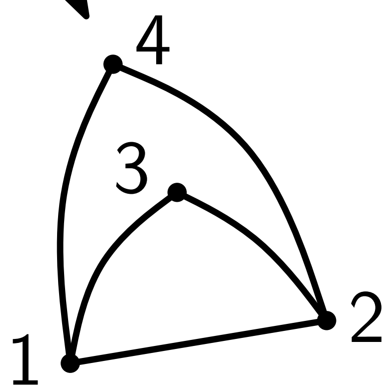
Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

[Tamassia SIAM J. Comput. 1987]

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$

kombinatorische Einbettung

Kreuzungsminimierung

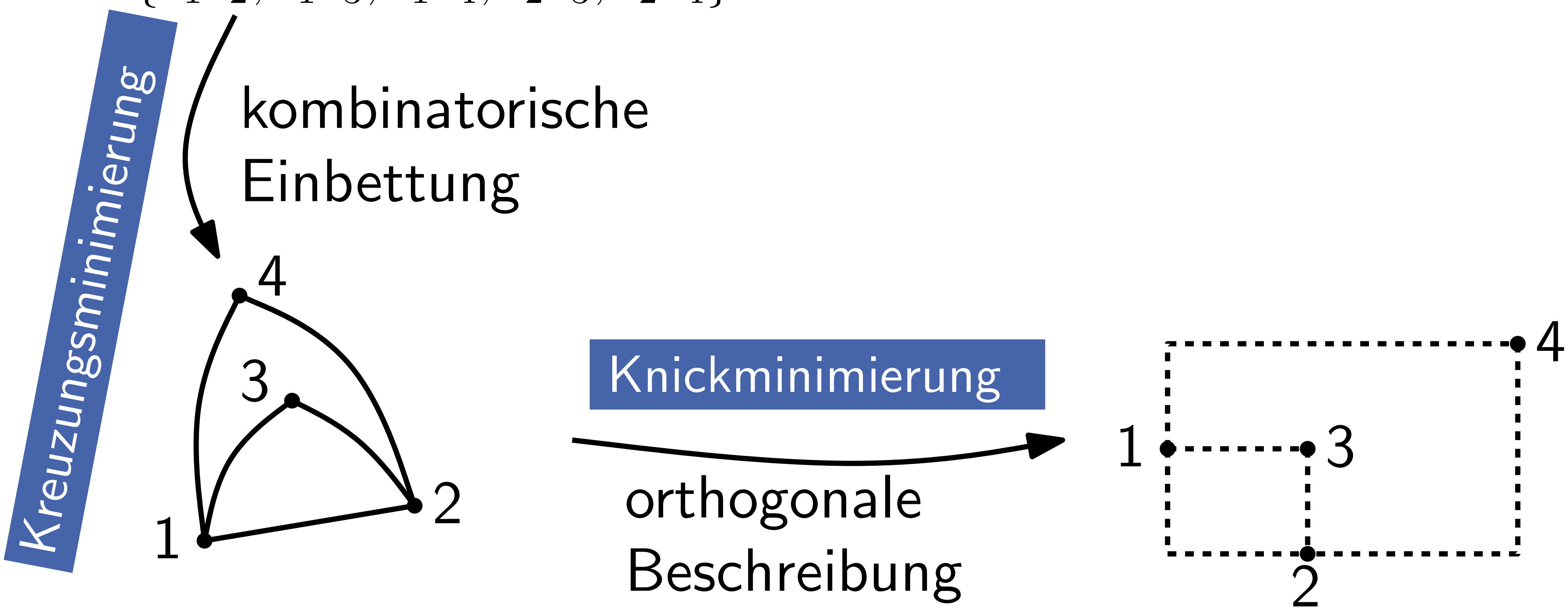


(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

[Tamassia SIAM J. Comput. 1987]

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$

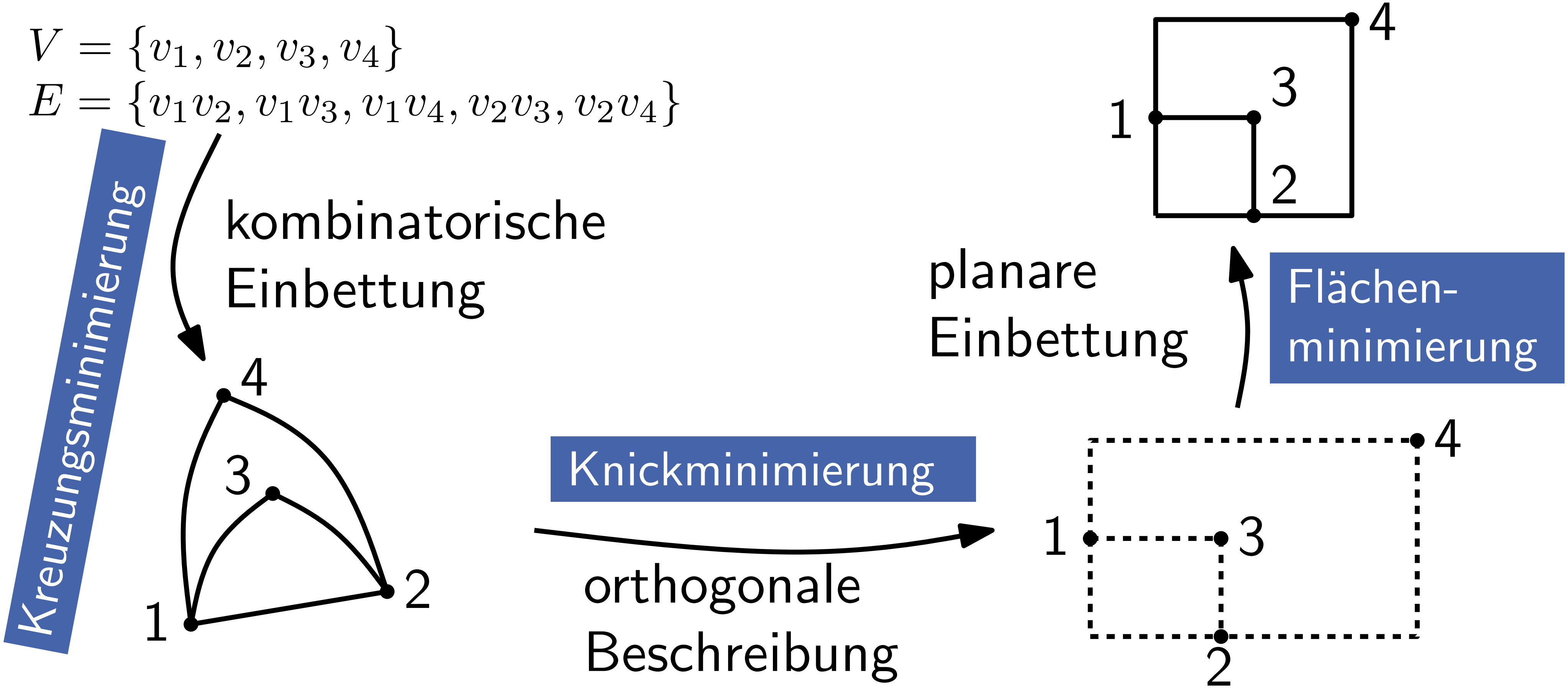


(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

[Tamassia SIAM J. Comput. 1987]

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$

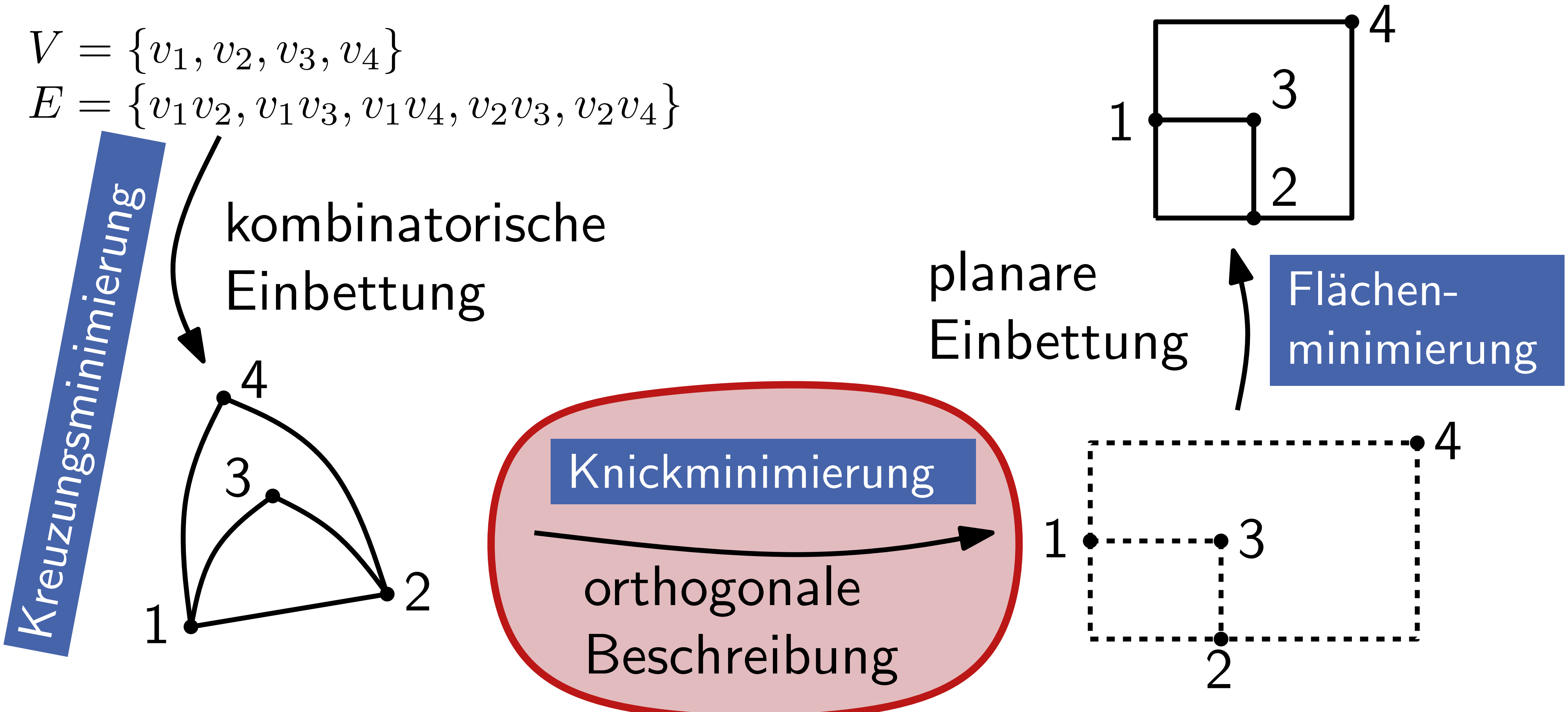


(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

[Tamassia SIAM J. Comput. 1987]

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$



Knickminimierung bei fester Einbettung

Problem geometrische Knickminimierung

Geg:
- planarer Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- kombinatorische Einbettung $\mathcal{F}$ und äußere Facette f_0

Ges: einbettungsäquivalente orthogonale Gitterzeichnung mit minimaler Knickanzahl

Knickminimierung bei fester Einbettung

Problem geometrische Knickminimierung

Geg:
- planarer Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- kombinatorische Einbettung $\mathcal{F}$ und äußere Facette f_0

Ges: einbettungsäquivalente orthogonale Gitterzeichnung mit minimaler Knickanzahl

bzw. zunächst folgende Variante

Problem kombinatorische Knickminimierung

Geg:
- planarer Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- kombinatorische Einbettung $\mathcal{F}$ und äußere Facette f_0

Ges: einbettungsäquivalente **orthogonale Beschreibung** $H(G)$ mit minimaler Knickanzahl

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: planarer Graph $G = (V, E)$, Facettenmenge $\mathcal{F}$, äußere Facette f_0

Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$**:** im UZS um f geordnete Folge von Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

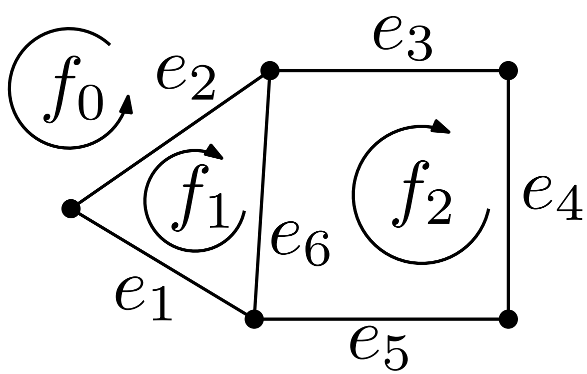
- e ist Randkante von f
- δ ist Folge in $\{0, 1\}^*$ (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)
- α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

Orthogonale Beschreibung: Beispiel

$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$



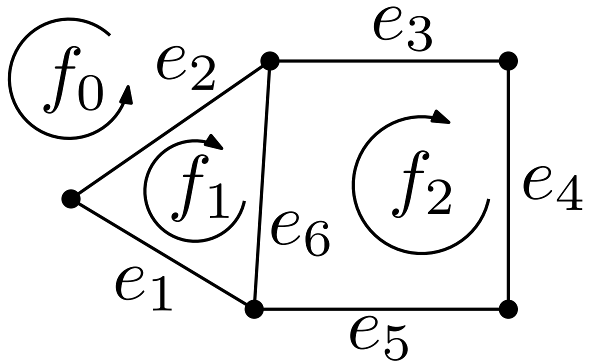
Wie sieht die kombinatorische „Zeichnung“ zu $H(G)$ aus?

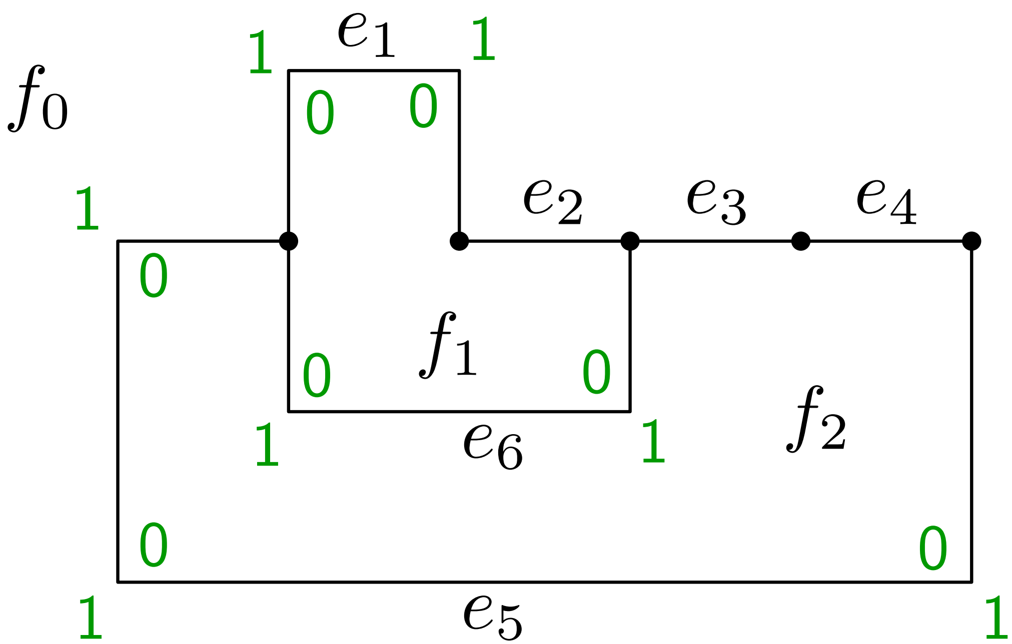
Orthogonale Beschreibung: Beispiel

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





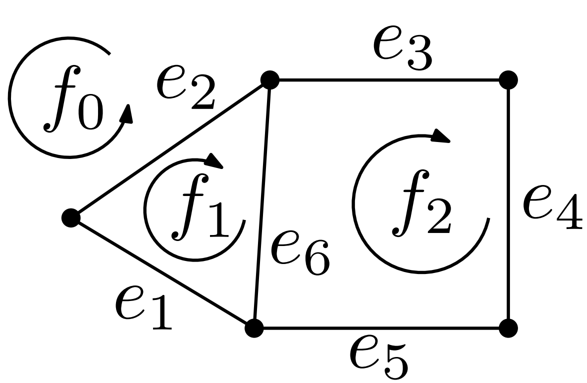
Orthogonale Beschreibung: Beispiel

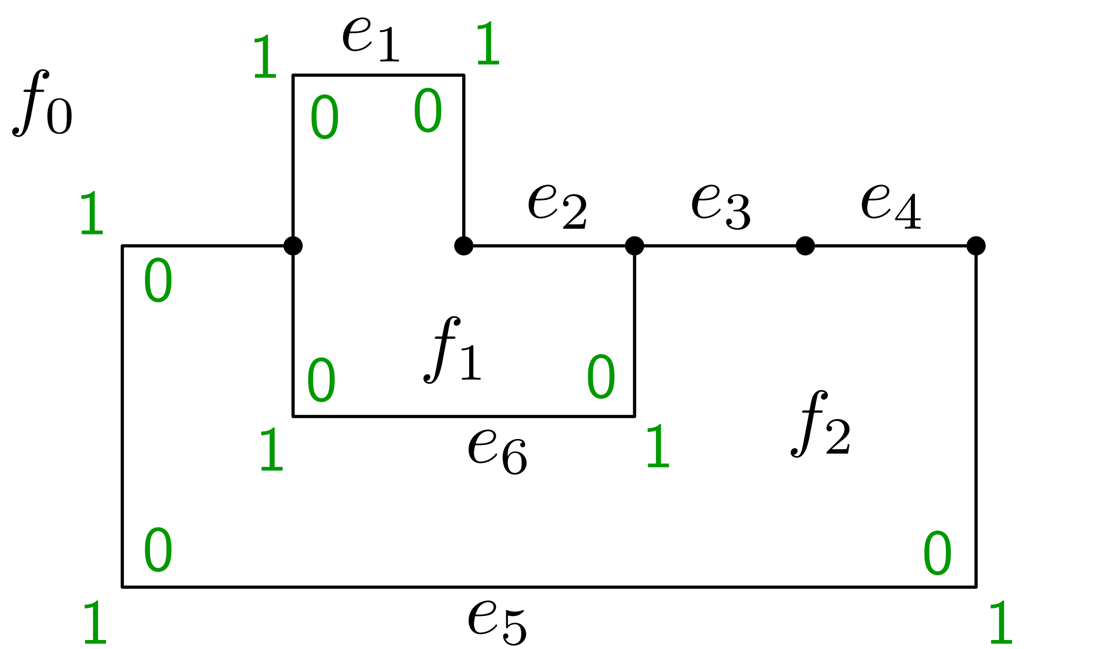
$H(f_0) = ((e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

$H(f_1) = ((e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$

$H(f_2) = ((e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2}))$

f_0 falsch rum!?



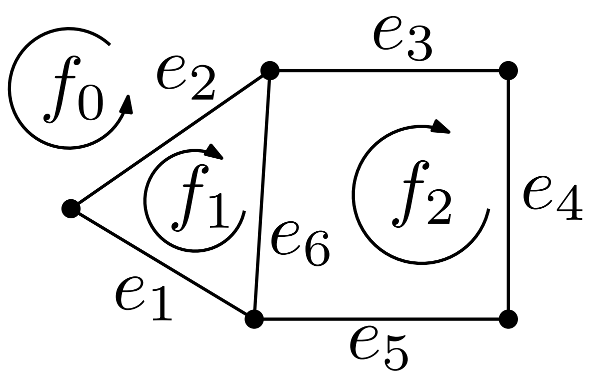


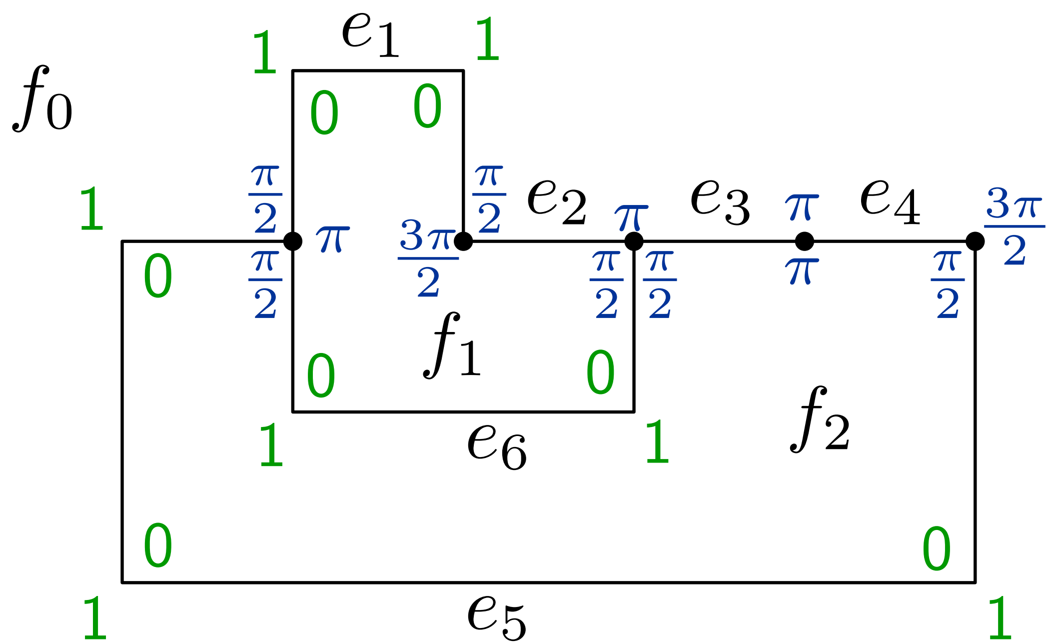
Orthogonale Beschreibung: Beispiel

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$



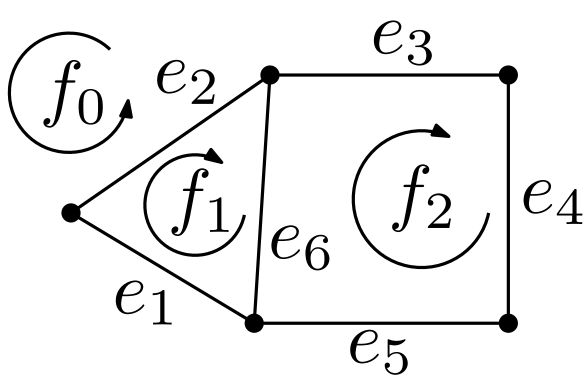


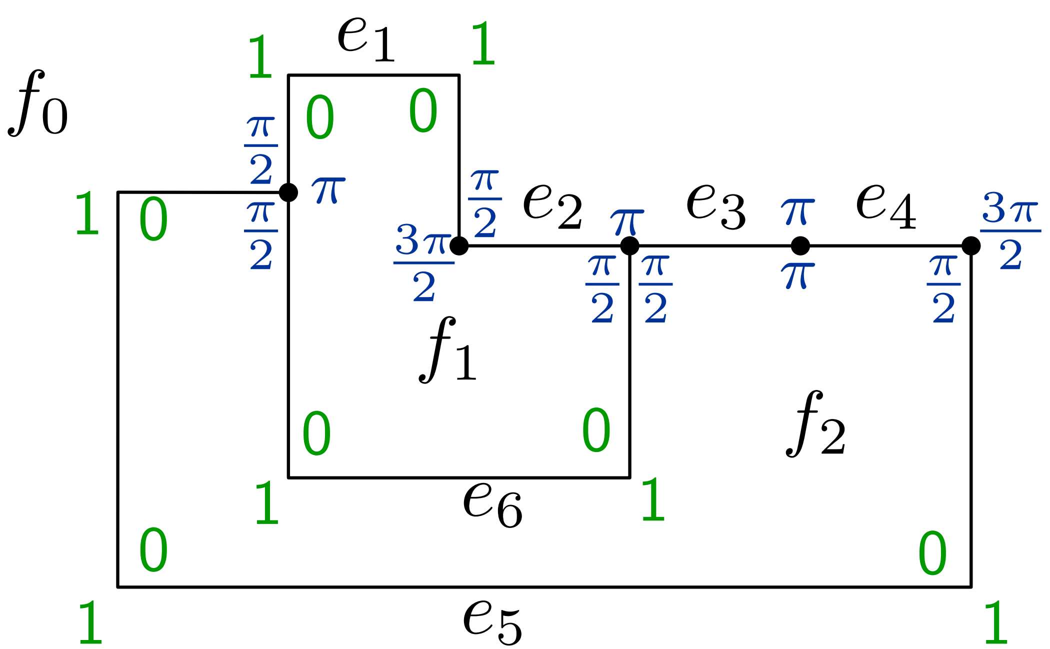
Orthogonale Beschreibung: Beispiel

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





konkrete Geometrie noch nicht festgelegt!

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4$ für $f \neq f_0$ und $\sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:

$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

(H4) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π

Kombinatorische Knickminimierung

Problem kombinatorische Knickminimierung

Geg:
- Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- kombinatorische Einbettung $\mathcal{F}$ und äußere Facette f_0

Ges: einbettungsäquivalente **orthogonale Beschreibung** $H(G)$ mit minimaler Knickanzahl

Kombinatorische Knickminimierung

Problem kombinatorische Knickminimierung

Geg:
- Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- kombinatorische Einbettung $\mathcal{F}$ und äußere Facette f_0

Ges: einbettungsäquivalente **orthogonale Beschreibung** $H(G)$ mit minimaler Knickanzahl

Idee: erstelle ein Flussnetzwerk mit
- eine Flusseinheit entspricht einem $\pi/2$ Winkel
- Fluss von Knoten zu Facetten entspricht Knotenwinkel
- Fluss zwischen Facetten entspricht Kantenknicken

Erinnerung: s-t Flussnetzwerk

Flussnetzwerk $(D = (V, A); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $D = (V, A)$
- Kantenkapazitäten $c : A \to \mathbb{R}_0^+$
- Quelle $s \in V$, Senke $t \in V$

Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt s-t-**Fluss**, falls gilt:

$$0 \leq X(i,j) \leq c(i,j) \qquad \forall (i,j) \in A \tag{1}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} X(i,j) - \sum_{(j,i)\in A} X(j,i) = 0 \qquad \forall i \in V \setminus \{s,t\} \tag{2}$$

Erinnerung: Allgemeines Flussnetzwerk

Flussnetzwerk $(D = (V, A); \ell; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $D = (V, A)$
- untere Kantenkapazitäten $\ell : A \to \mathbb{R}_0^+$
- obere Kantenkapazitäten $u : A \to \mathbb{R}_0^+$
- Knotenbewertung $b : V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{i \in V} b(i) = 0$

Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Fluss**, falls gilt:

$$\ell(i,j) \leq X(i,j) \leq u(i,j) \qquad \forall (i,j) \in A \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} X(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j,i) = b(i) \qquad \forall i \in V \tag{4}$$

Fragestellungen für Flussnetzwerke

(A) Gültiger Fluss:

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h.

- Kapazitäten $l(e), u(e)$ werden respektiert
- Bedarf $b(v)$ wird genau erfüllt

Fragestellungen für Flussnetzwerke

(A) Gültiger Fluss:

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h.

- Kapazitäten $l(e), u(e)$ werden respektiert
- Bedarf $b(v)$ wird genau erfüllt

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathrm{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$

Def: $\mathrm{cost}(X) := \sum_{(i,j) \in A} \mathrm{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Fragestellungen für Flussnetzwerke

(A) Gültiger Fluss:

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h.

- Kapazitäten $l(e), u(e)$ werden respektiert
- Bedarf $b(v)$ wird genau erfüllt

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathrm{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$

Def: $\mathrm{cost}(X) := \sum_{(i,j) \in A} \mathrm{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

(B) Minimalkostenfluss

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, der $\mathrm{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Flussnetzwerk zur Knickminimierung

Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

Flussnetzwerk zur Knickminimierung

Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$

Flussnetzwerk zur Knickminimierung

Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

Flussnetzwerk zur Knickminimierung

Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ \bullet\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ \bullet\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_w b(w) \stackrel{?}{=} 0$$

Flussnetzwerk zur Knickminimierung

Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v,f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ \blacksquare\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ \blacksquare\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_w b(w) = 0$$

(Euler)

Flussnetzwerk zur Knickminimierung

Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \mathsf{cost})$

- $A = \{(v,f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f,g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ \bullet\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ \bullet\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_w b(w) = 0$$

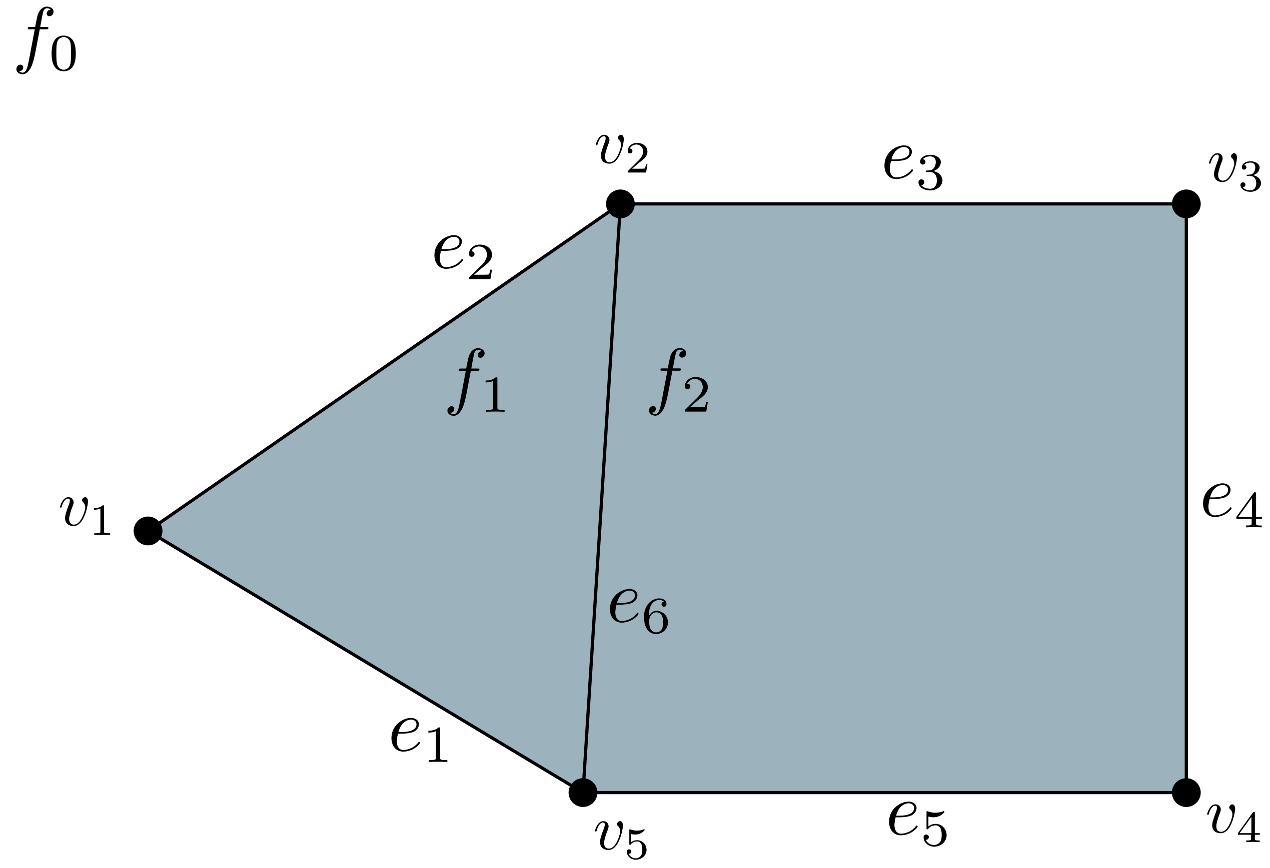
(Euler)

$$\forall (f,g) \in A, f,g \in \mathcal{F} \qquad \ell(f,g) := 0 \leq X(f,g) \leq \infty =: u(f,g)$$

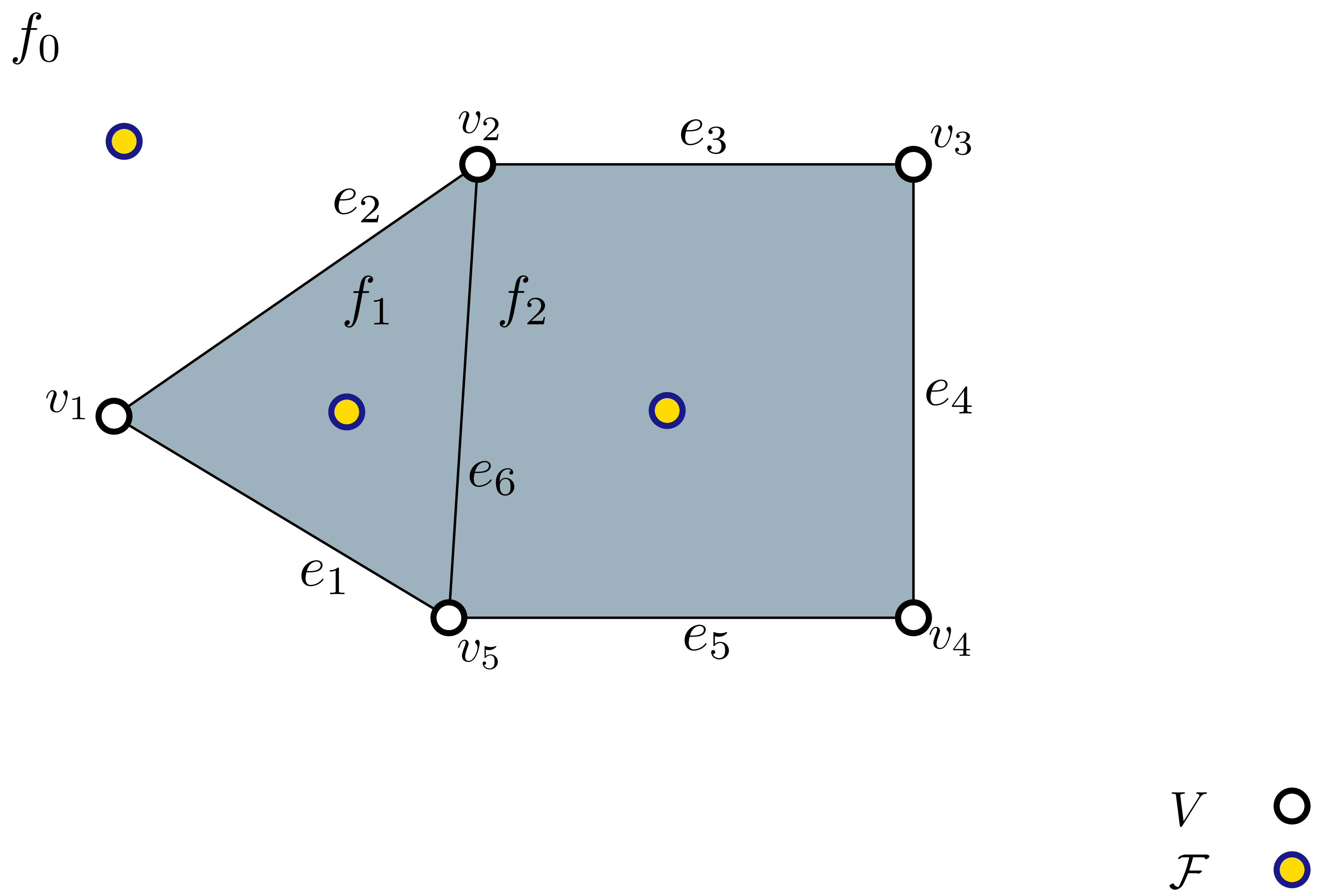
$$\forall (v,f) \in A, v \in V, f \in \mathcal{F} \qquad \ell(v,f) := 1 \leq X(v,f) \leq 4 =: u(v,f)$$

$$\forall i \in V \cup \mathcal{F} \qquad \sum_{(i,j) \in A} X(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j,i) = b(i)$$

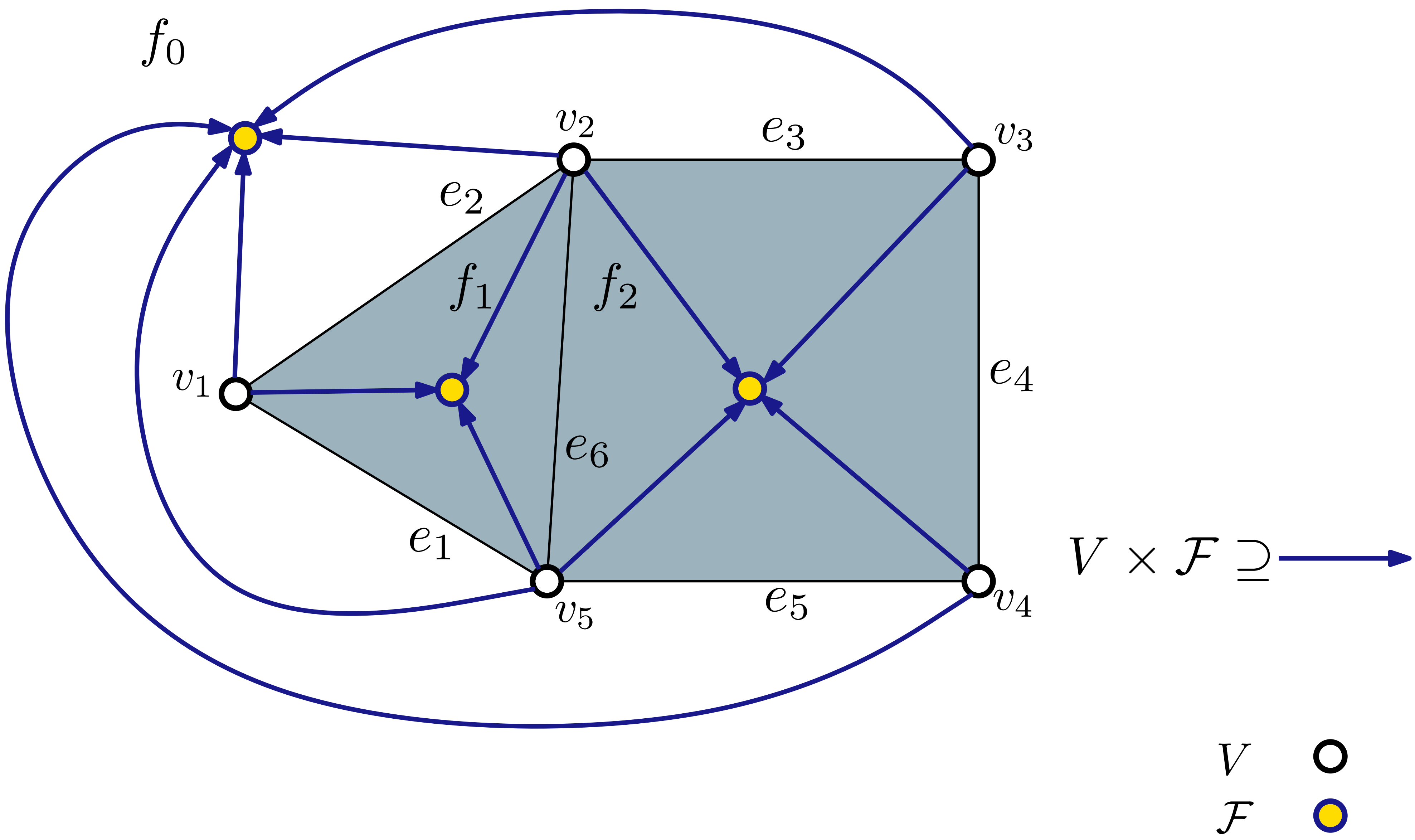
Beispiel Flussnetzwerk



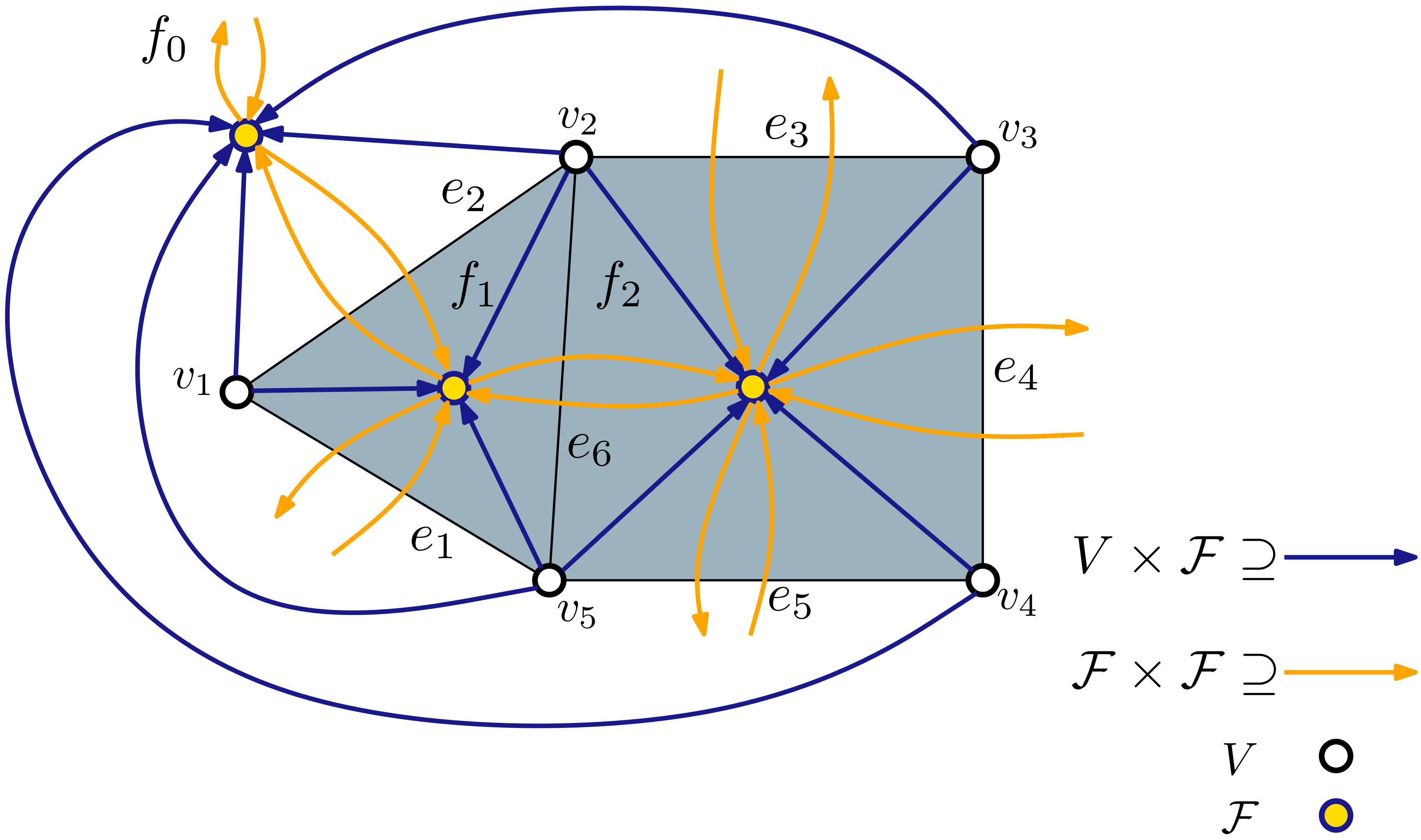
Beispiel Flussnetzwerk



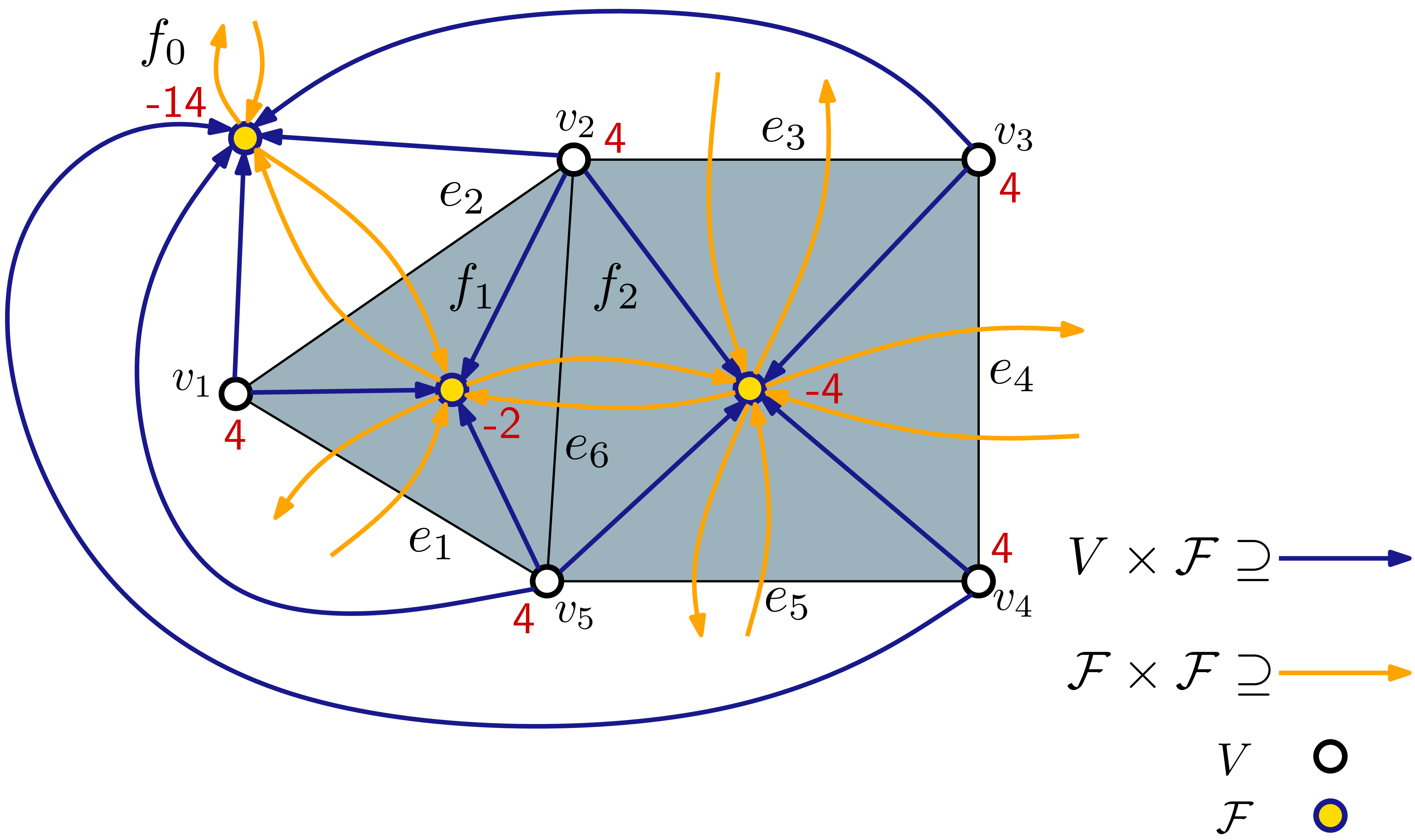
Beispiel Flussnetzwerk



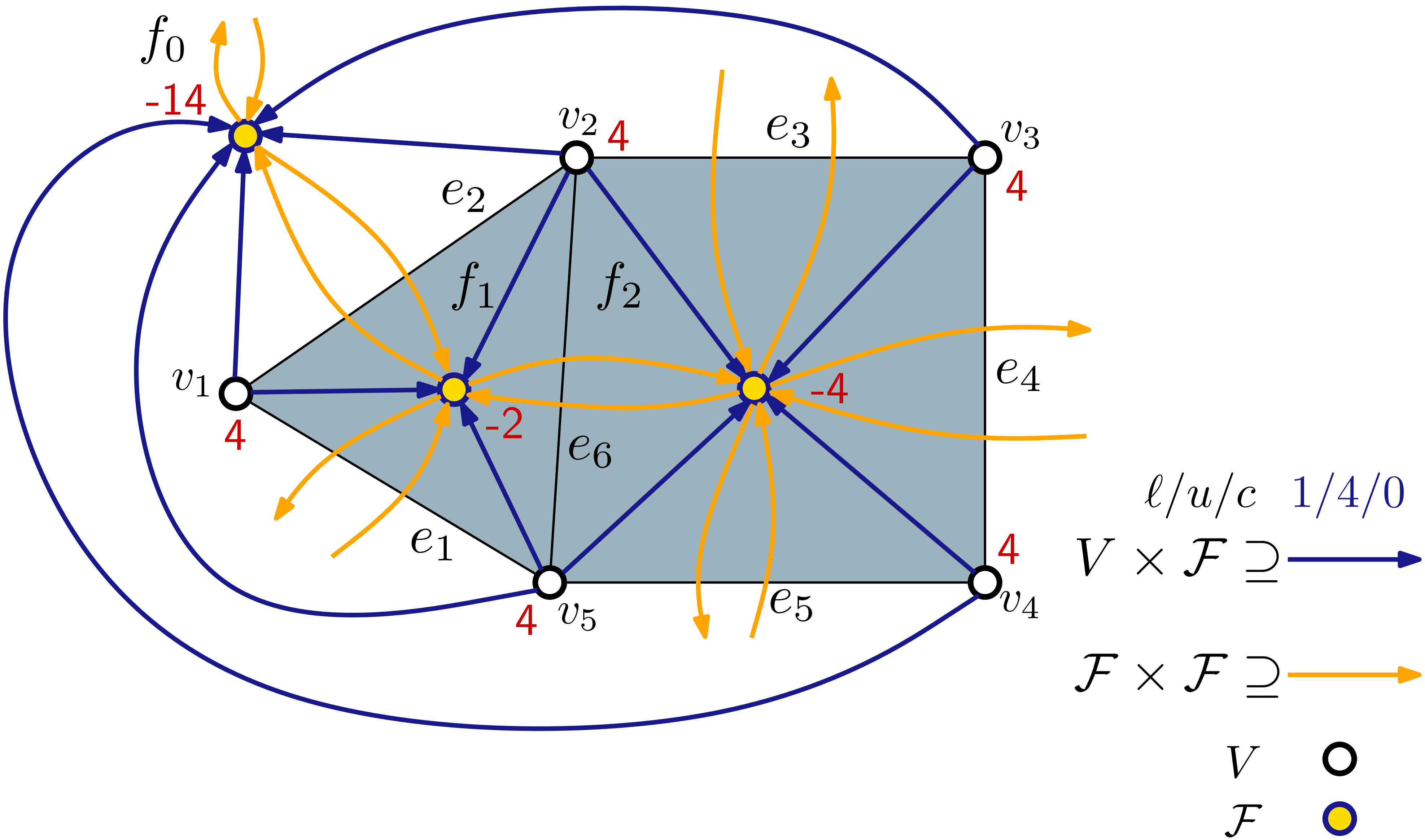
Beispiel Flussnetzwerk



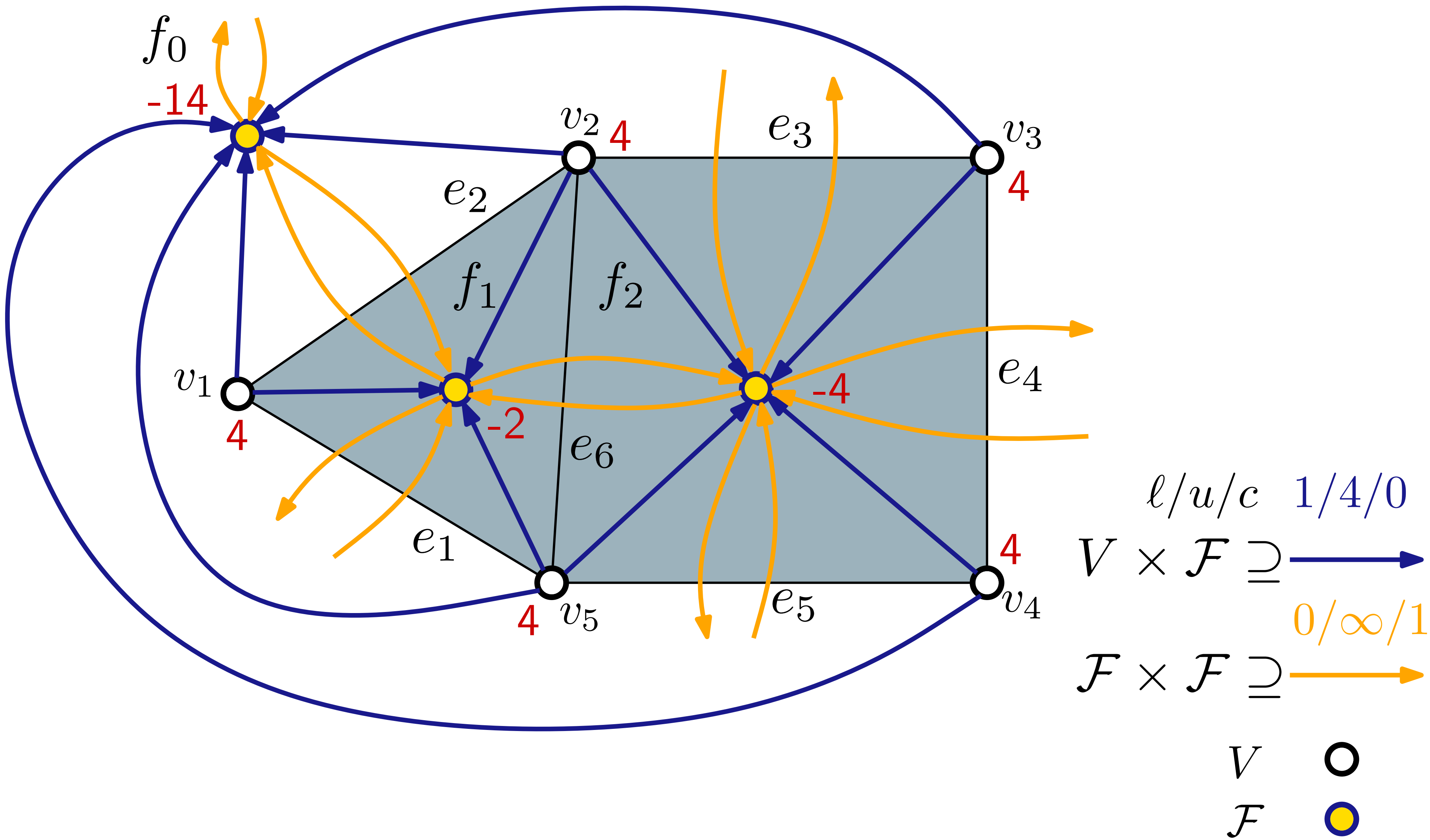
Beispiel Flussnetzwerk



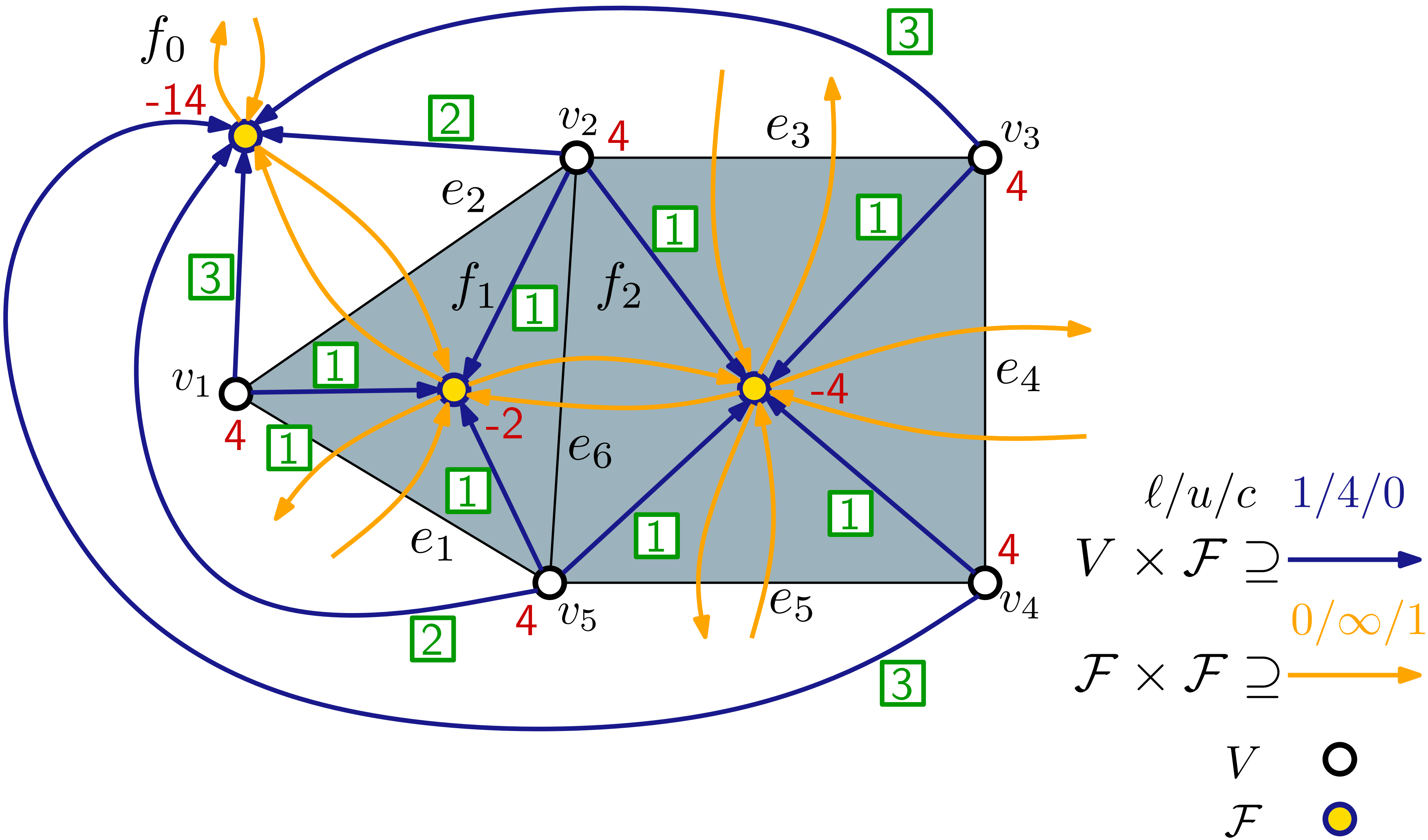
Beispiel Flussnetzwerk



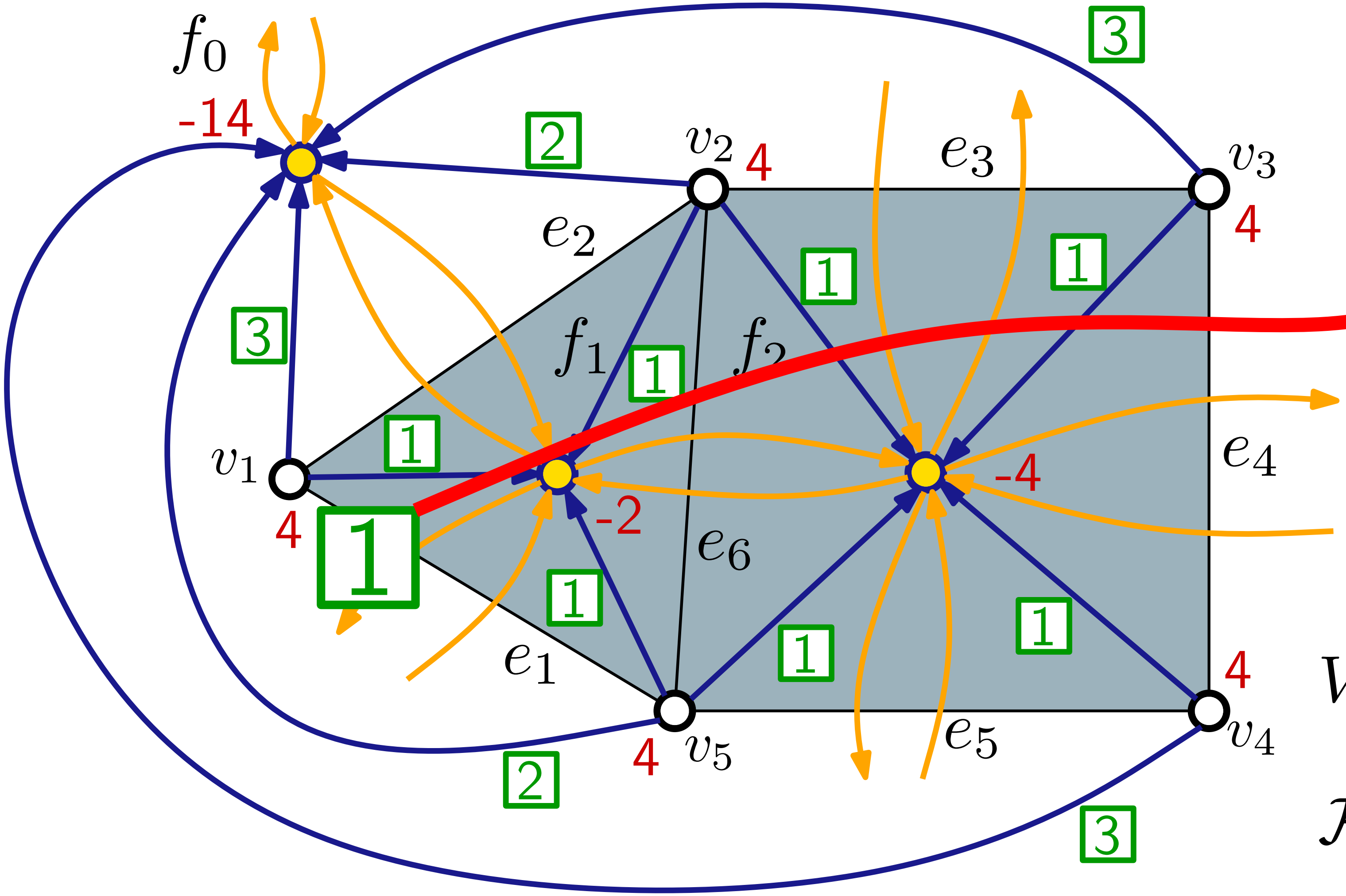
Beispiel Flussnetzwerk



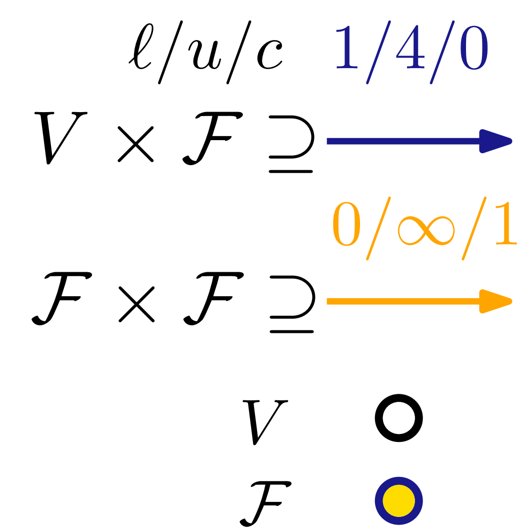
Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



cost = 1
Knick!
(nach außen)



Kernaussage

Satz 1: Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage

Satz 1: Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Beweis:

$\Leftarrow$ Geg: Fluss x in $N(G)$ mit Kosten k
Ges: orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

Kernaussage

Satz 1: Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Beweis:

$\Leftarrow$ Geg: Fluss x in $N(G)$ mit Kosten k
Ges: orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

- transformiere Fluss in orthogonale Beschreibung
- zeige Eigenschaften (H1)–(H4)

Kernaussage

Satz 1: Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Beweis:

$\Leftarrow$ Geg: Fluss x in $N(G)$ mit Kosten k
Ges: orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

- transformiere Fluss in orthogonale Beschreibung
- zeige Eigenschaften (H1)–(H4)

$\Rightarrow$ Geg: orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken
Ges: Fluss x in $N(G)$ mit Kosten k

Kernaussage

Satz 1: Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Beweis:

$\Leftarrow$ Geg: Fluss x in $N(G)$ mit Kosten k
Ges: orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken

- transformiere Fluss in orthogonale Beschreibung
- zeige Eigenschaften (H1)–(H4)

$\Rightarrow$ Geg: orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken
Ges: Fluss x in $N(G)$ mit Kosten k

- definiere Abbildung $x : A \to \mathbb{R}_0^+$
- zeige x erfüllt Flussbedingungen und hat Kosten k

Zusammenfassung Knickminimierung

- Aus Satz 1 folgt, dass die orthogonale Knickminimierung für eingebettete planare Graphen durch Lösen eines Min-Cost-Flow Problems durchgeführt werden kann.

Zusammenfassung Knickminimierung

- Aus Satz 1 folgt, dass die orthogonale Knickminimierung für eingebettete planare Graphen durch Lösen eines Min-Cost-Flow Problems durchgeführt werden kann.
- Dieses spezielle Flussproblem lässt sich unter Ausnutzung der Planarität von $N(G)$ in $O(n^{3/2})$ Zeit lösen.

[Cornelsen, Karrenbauer GD 2011]

Zusammenfassung Knickminimierung

- Aus Satz 1 folgt, dass die orthogonale Knickminimierung für eingebettete planare Graphen durch Lösen eines Min-Cost-Flow Problems durchgeführt werden kann.
- Dieses spezielle Flussproblem lässt sich unter Ausnutzung der Planarität von $N(G)$ in $O(n^{3/2})$ Zeit lösen.

  [Cornelsen, Karrenbauer GD 2011]
- Die Knickminimierung ohne gegebene kombinatorische Einbettung ist NP-schwer. [Garg, Tamassia SIAM J. Comput. 2001]

Zusammenfassung Knickminimierung

- Aus Satz 1 folgt, dass die orthogonale Knickminimierung für eingebettete planare Graphen durch Lösen eines Min-Cost-Flow Problems durchgeführt werden kann.
- Dieses spezielle Flussproblem lässt sich unter Ausnutzung der Planarität von $N(G)$ in $O(n^{3/2})$ Zeit lösen.

  [Cornelsen, Karrenbauer GD 2011]

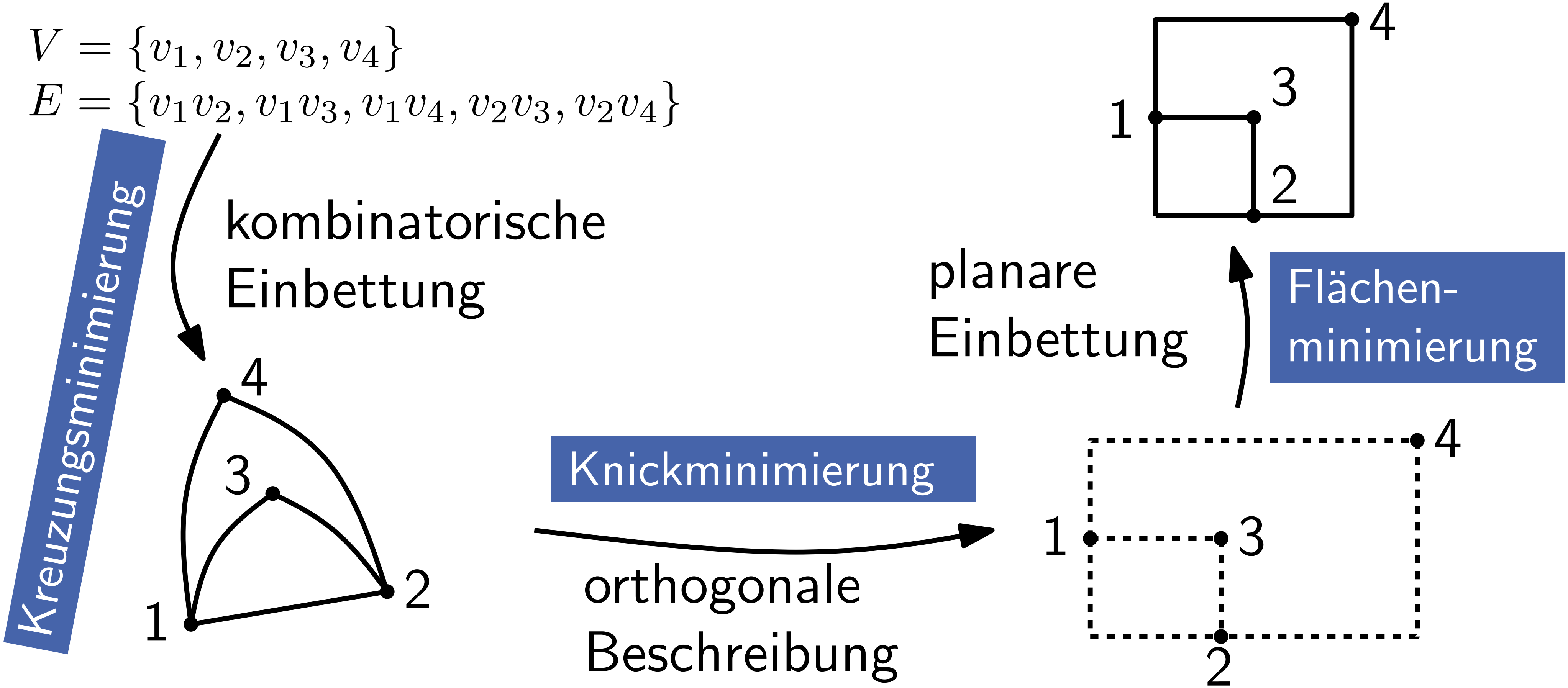
- Die Knickminimierung ohne gegebene kombinatorische Einbettung ist NP-schwer. [Garg, Tamassia SIAM J. Comput. 2001]
- Das Entscheidungsproblem, ob ein Graph eine orthogonale Zeichnung mit höchstens $f(e)$ Knicken pro Kante e besitzt ist polynomiell lösbar, falls $f(e) \geq 1$ für alle $e \in E$.

  [Bläsius et al. GD 2010]

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

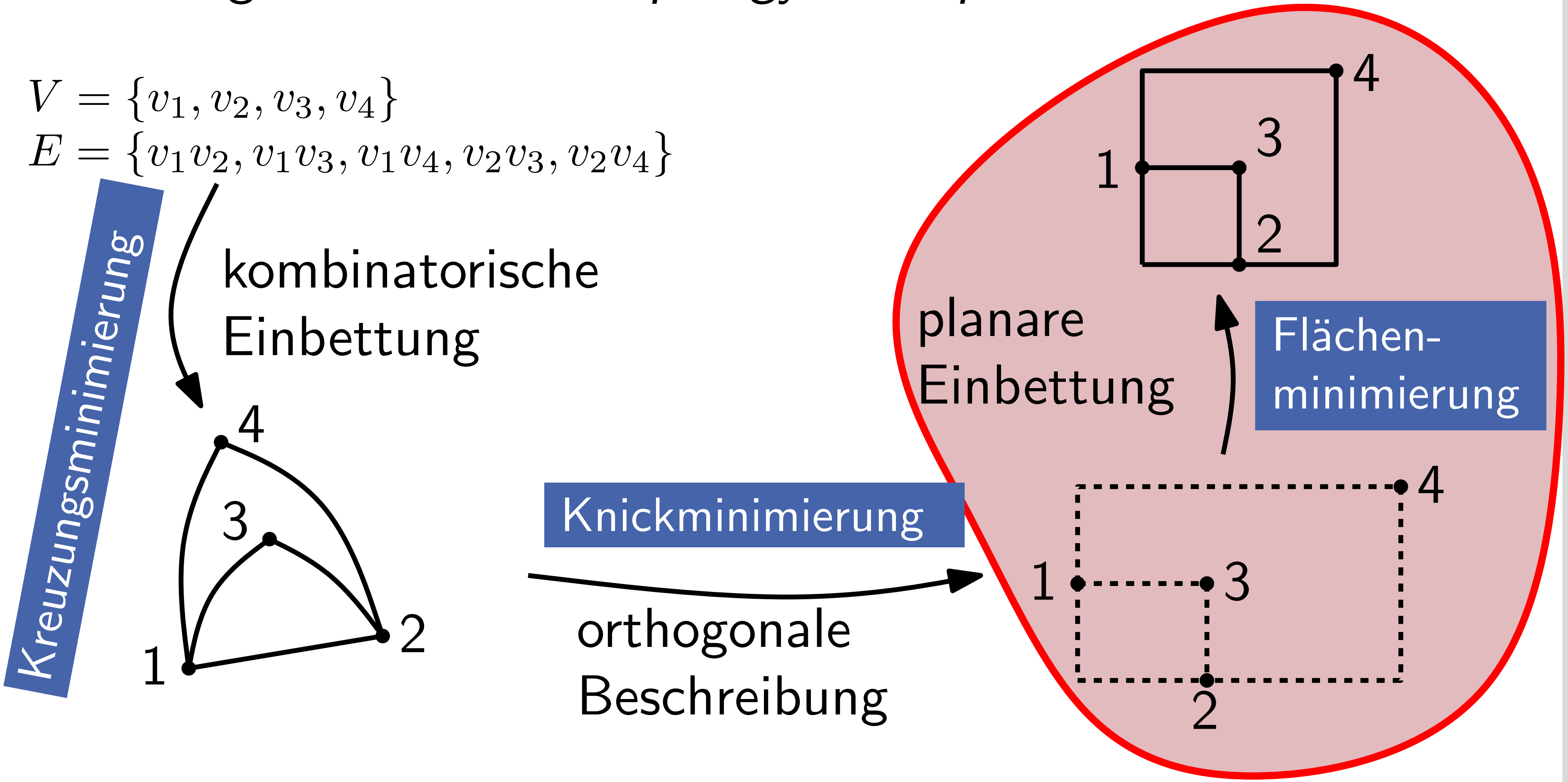
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$



(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$



Kompaktierung

Problem Kompaktierung

Geg:
- planarer Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- orthogonale Beschreibung $H(G)$

Ges: kompaktes orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert

Kompaktierung

Problem Kompaktierung

Geg:
- planarer Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- orthogonale Beschreibung $H(G)$

Ges: kompaktes orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\rightarrow$ Garantien möglich
- minimale Gesamtkantenlänge
- minimale Fläche

Kompaktierung

Problem Kompaktierung

Geg:
- planarer Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad 4
- orthogonale Beschreibung $H(G)$

Ges: kompaktes orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\rightarrow$ Garantien möglich
- minimale Gesamtkantenlänge
- minimale Fläche

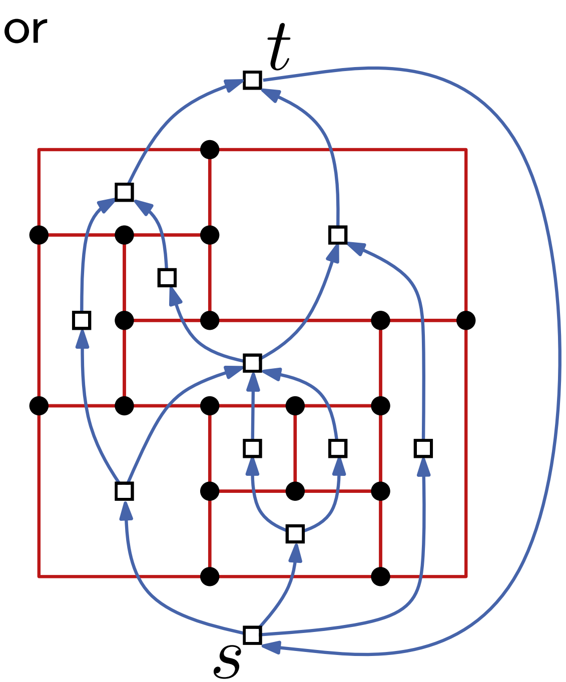
Eigenschaften:

- Knicke höchstens als Ecken der äußeren Facette
- gegenüberliegende Seiten einer Facette gleich lang

Flussnetzwerk Längenzuweisung

Def: Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((W_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); \ell; u; b; \text{cost})$

- $W_{\text{hor}} = \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \cup \{s, t\}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\} \cup \{(t, s)\}$
- $\ell(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{hor}}$

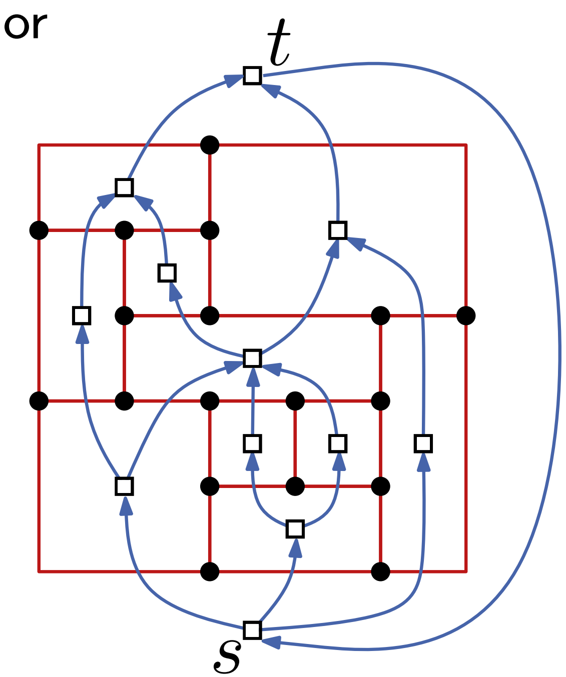


Flussnetzwerk Längenzuweisung

Def: Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((W_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); \ell; u; b; \text{cost})$

- $W_{\text{hor}} = \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \cup \{s, t\}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\} \cup \{(t, s)\}$
- $\ell(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{hor}}$

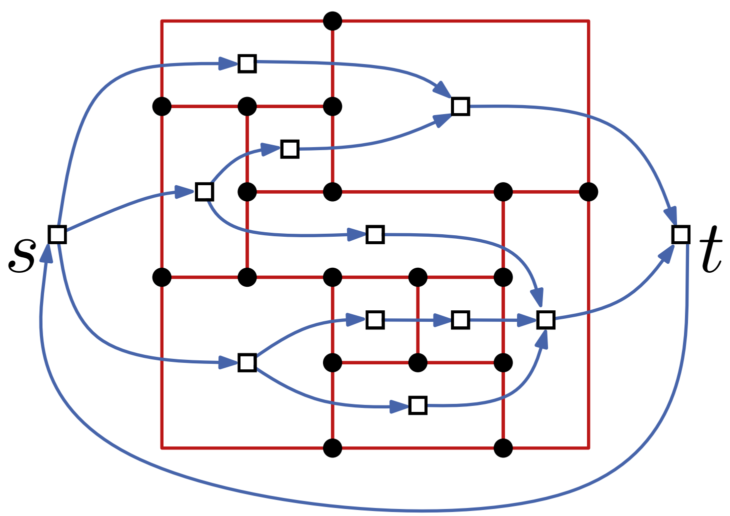
s und t repräsentieren untere und obere Hälfte von f_0



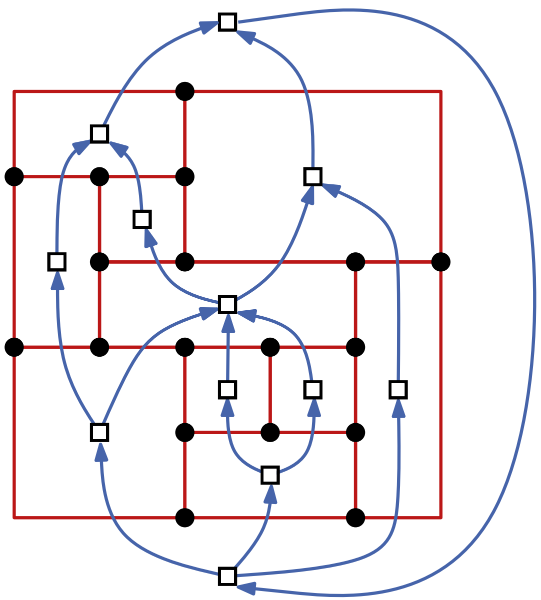
Flussnetzwerk Längenzuweisung

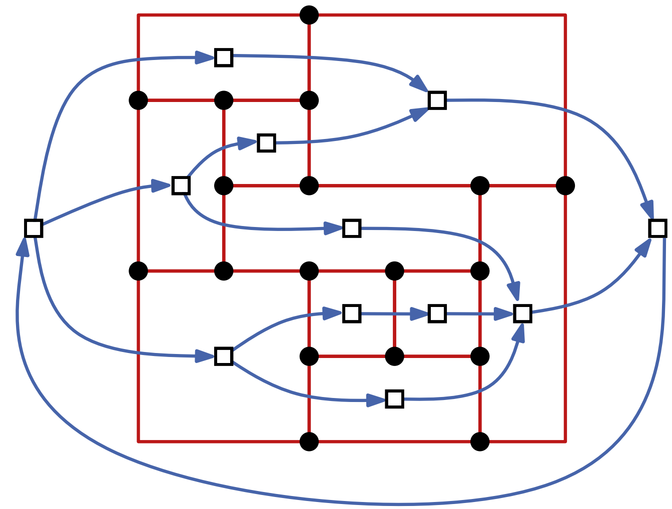
Def: Flussnetzwerk $N_{\text{ver}} = ((W_{\text{ver}}, A_{\text{ver}}); \ell; u; b; \text{cost})$

- $W_{\text{ver}} = \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \cup \{s, t\}$
- $A_{\text{ver}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und f liegt links von $g\} \cup \{(t, s)\}$
- $\ell(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{hor}}$



Optimales Layout

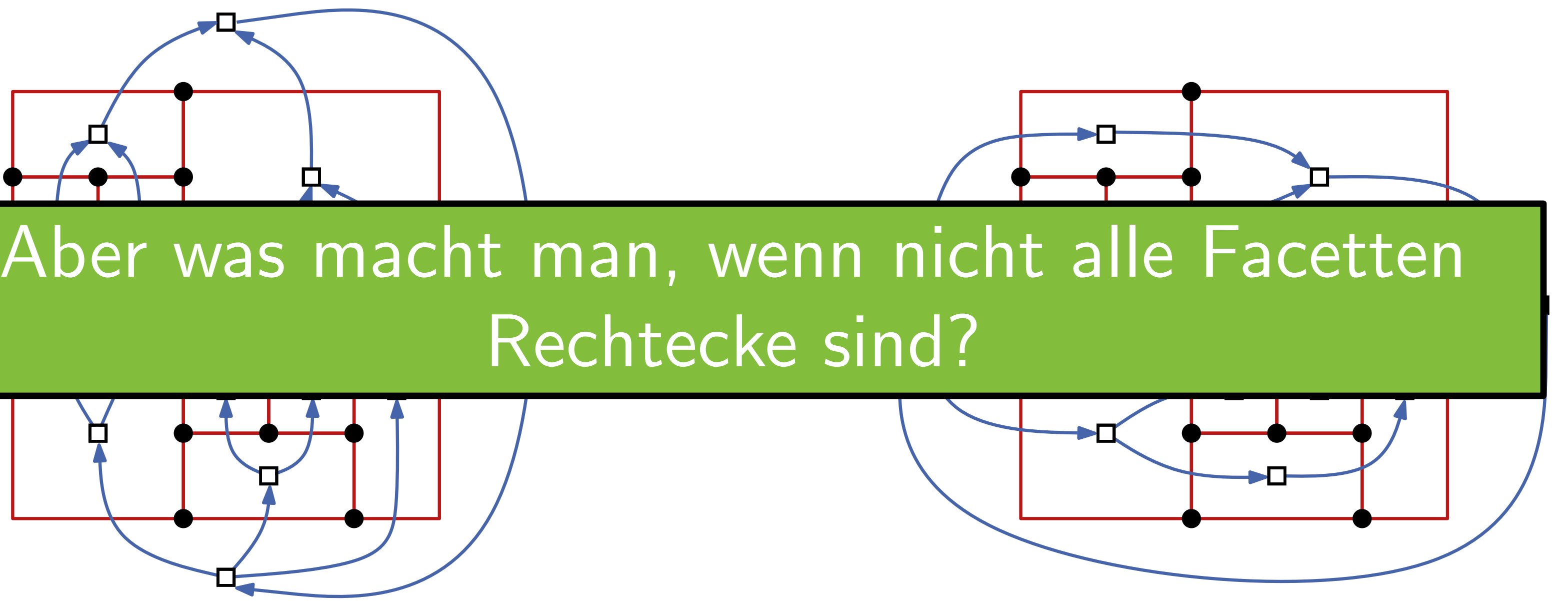




Satz 2: Ganzzahlige Flüsse x_{hor} und x_{ver} in N_{hor} und N_{ver} mit minimalen Kosten liefern:

- zugeh. Seitenlängen induzieren gültiges Layout
- $|x_{\text{hor}}(t,s)|$ und $|x_{\text{ver}}(t,s)|$ entsprechen minimaler Breite und Höhe des Layouts
- $\sum_{a \in A_{\text{hor}}} x_{\text{hor}}(e) \cdot \text{cost}(a) + \sum_{e \in A_{\text{ver}}} x_{\text{ver}}(a) \cdot \text{cost}(a)$ entsprechen minimaler Gesamtkantenlänge

Optimales Layout

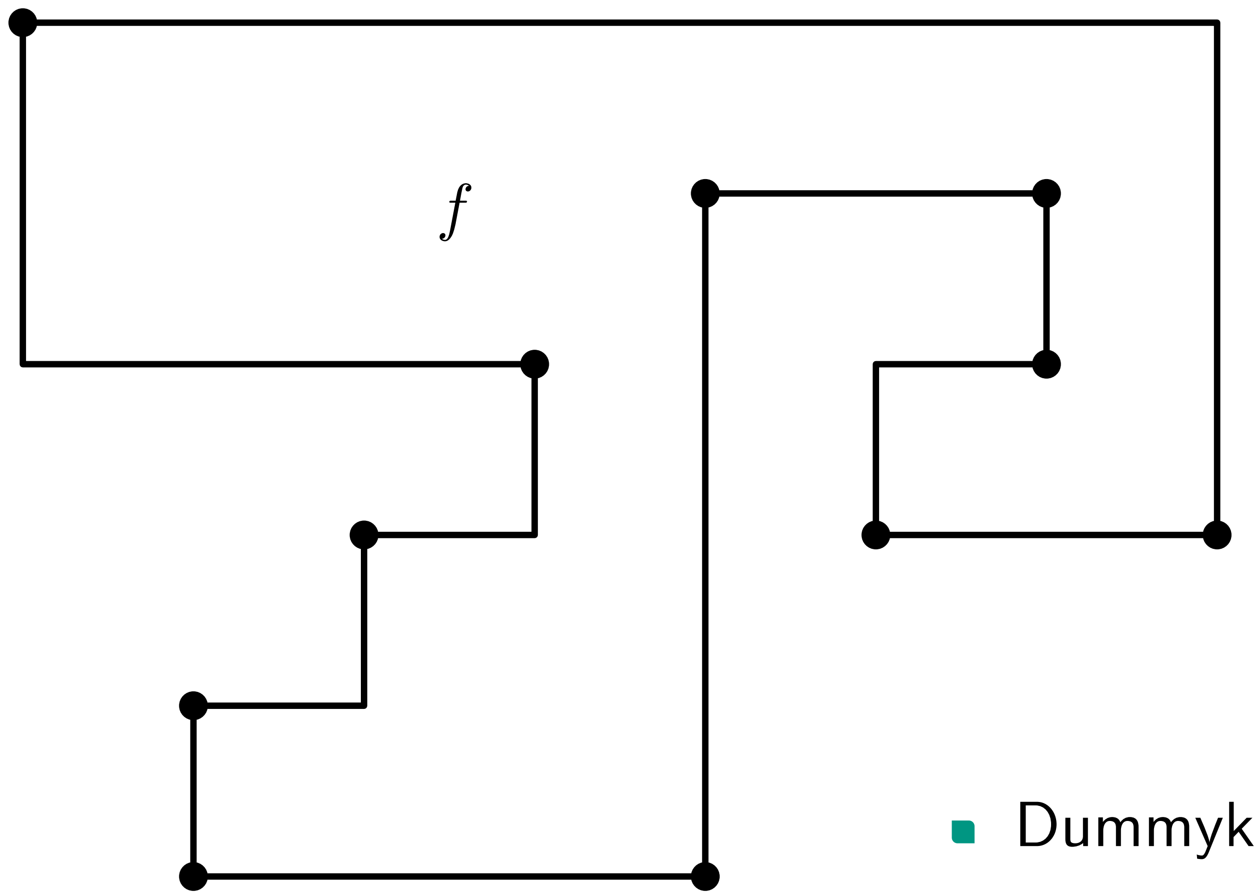


Aber was macht man, wenn nicht alle Facetten Rechtecke sind?

Satz 2: Ganzzahlige Flüsse x_{hor} und x_{ver} in N_{hor} und N_{ver} mit minimalen Kosten liefern:

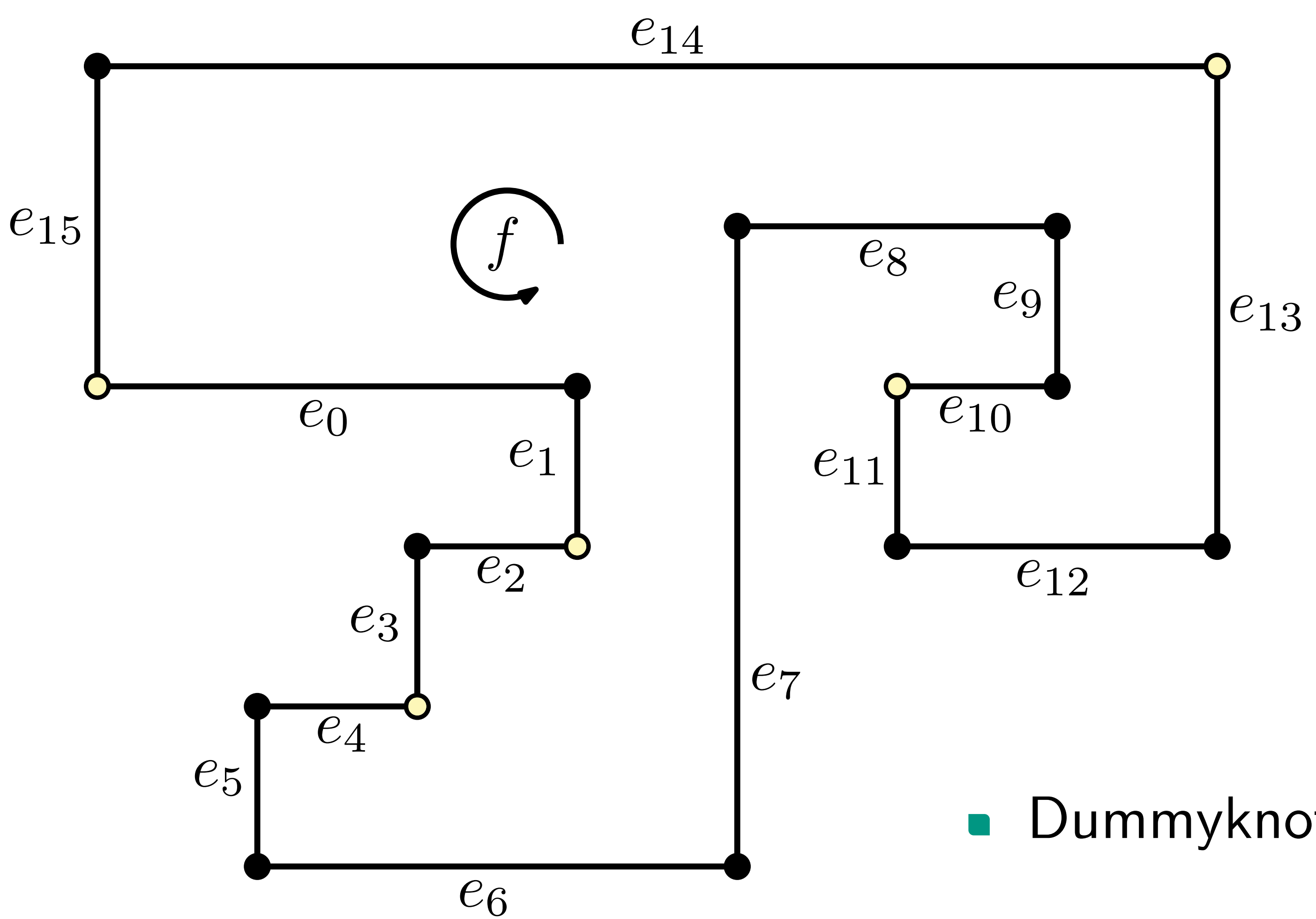
- zugeh. Seitenlängen induzieren gültiges Layout
- $|x_{\text{hor}}(t,s)|$ und $|x_{\text{ver}}(t,s)|$ entsprechen minimaler Breite und Höhe des Layouts
- $\sum_{a \in A_{\text{hor}}} x_{\text{hor}}(e) \cdot \text{cost}(a) + \sum_{e \in A_{\text{ver}}} x_{\text{ver}}(a) \cdot \text{cost}(a)$ entsprechen minimaler Gesamtkantenlänge

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



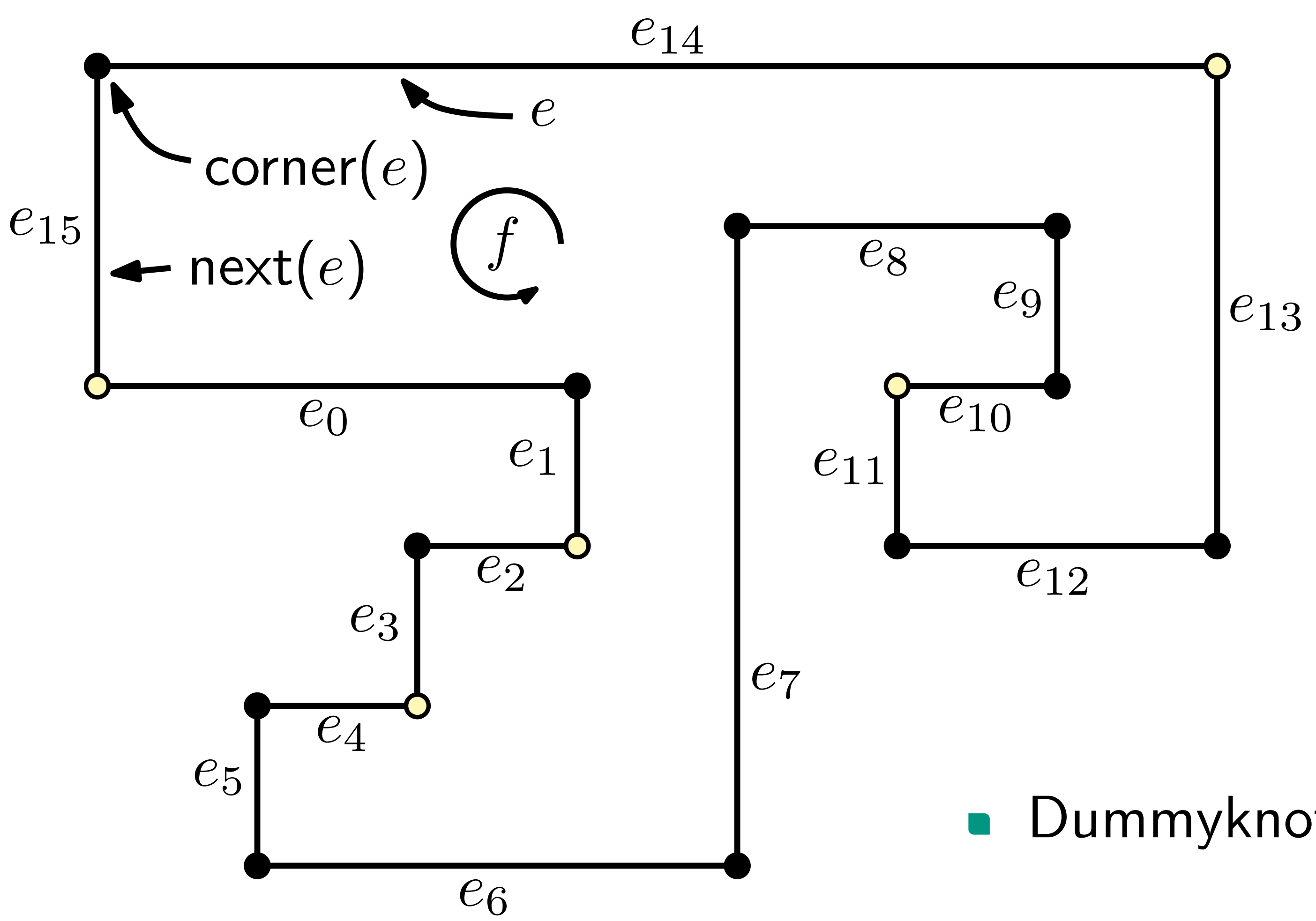
- Dummyknoten für Knicke

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



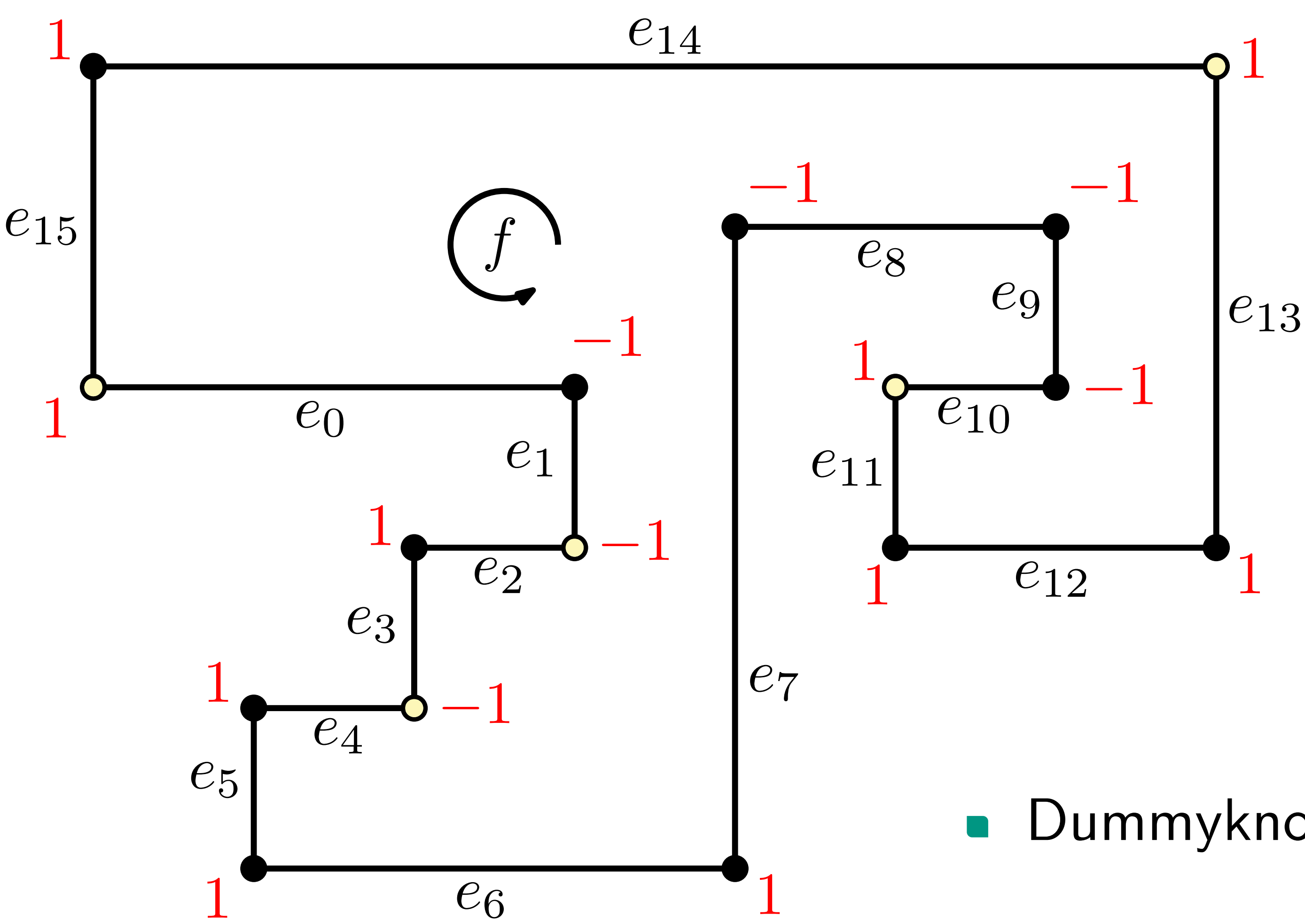
- Dummyknoten für Knicke

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



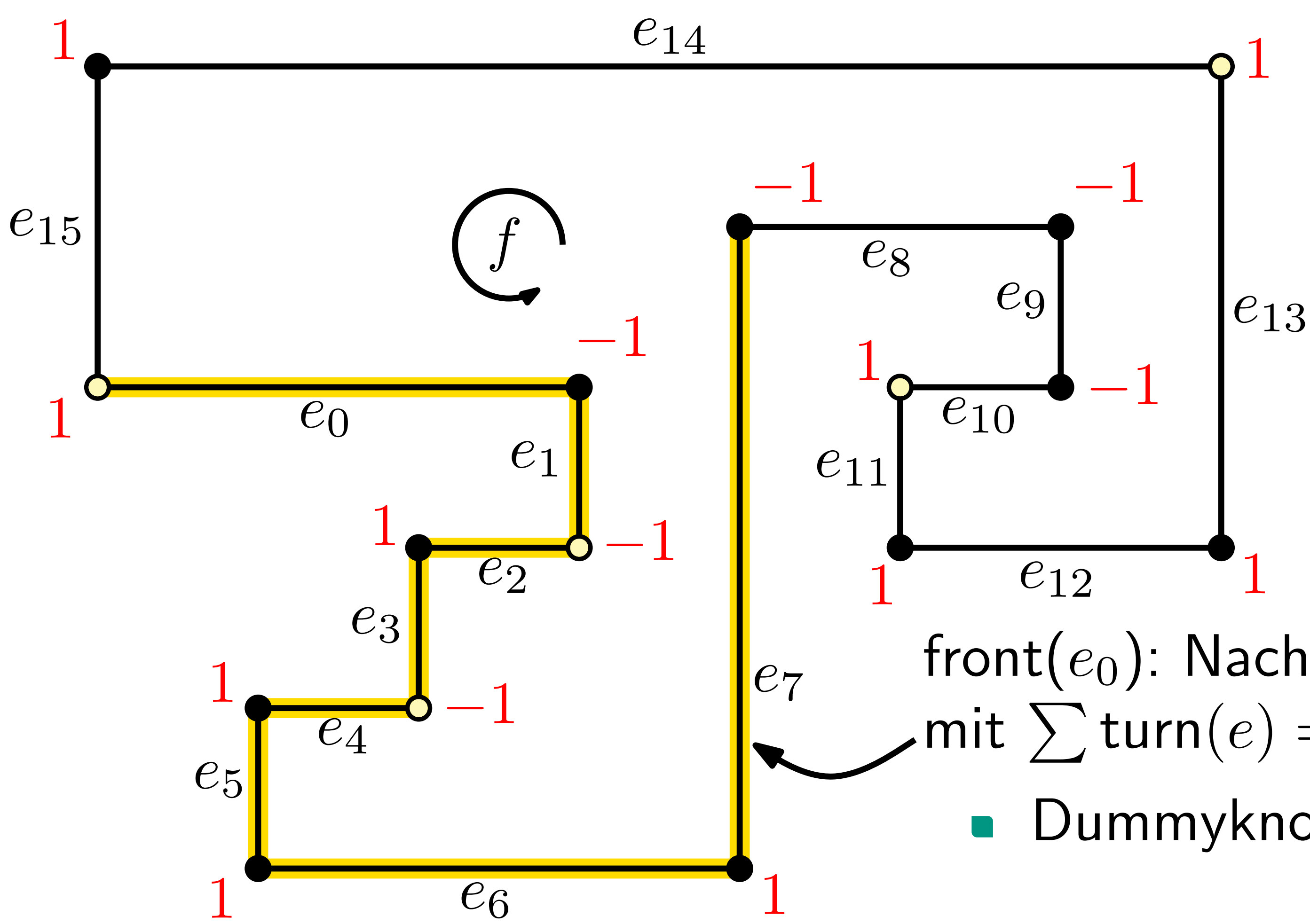
- Dummyknoten für Knicke

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



- Dummyknoten für Knicke
- $\text{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

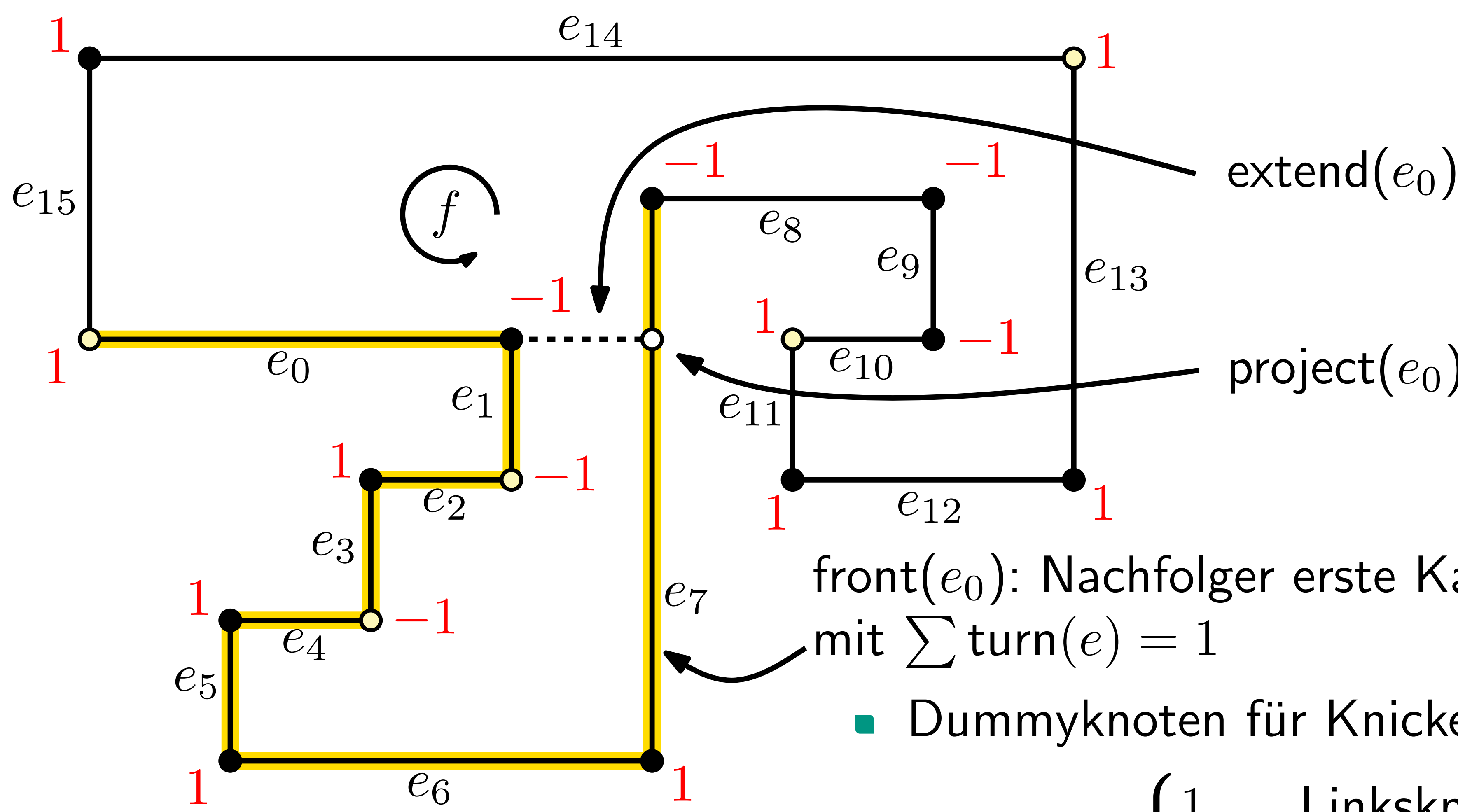
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



front(e_0): Nachfolger erste Kante mit $\sum$ turn$(e) = 1$

- Dummyknoten für Knicke
- turn$(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

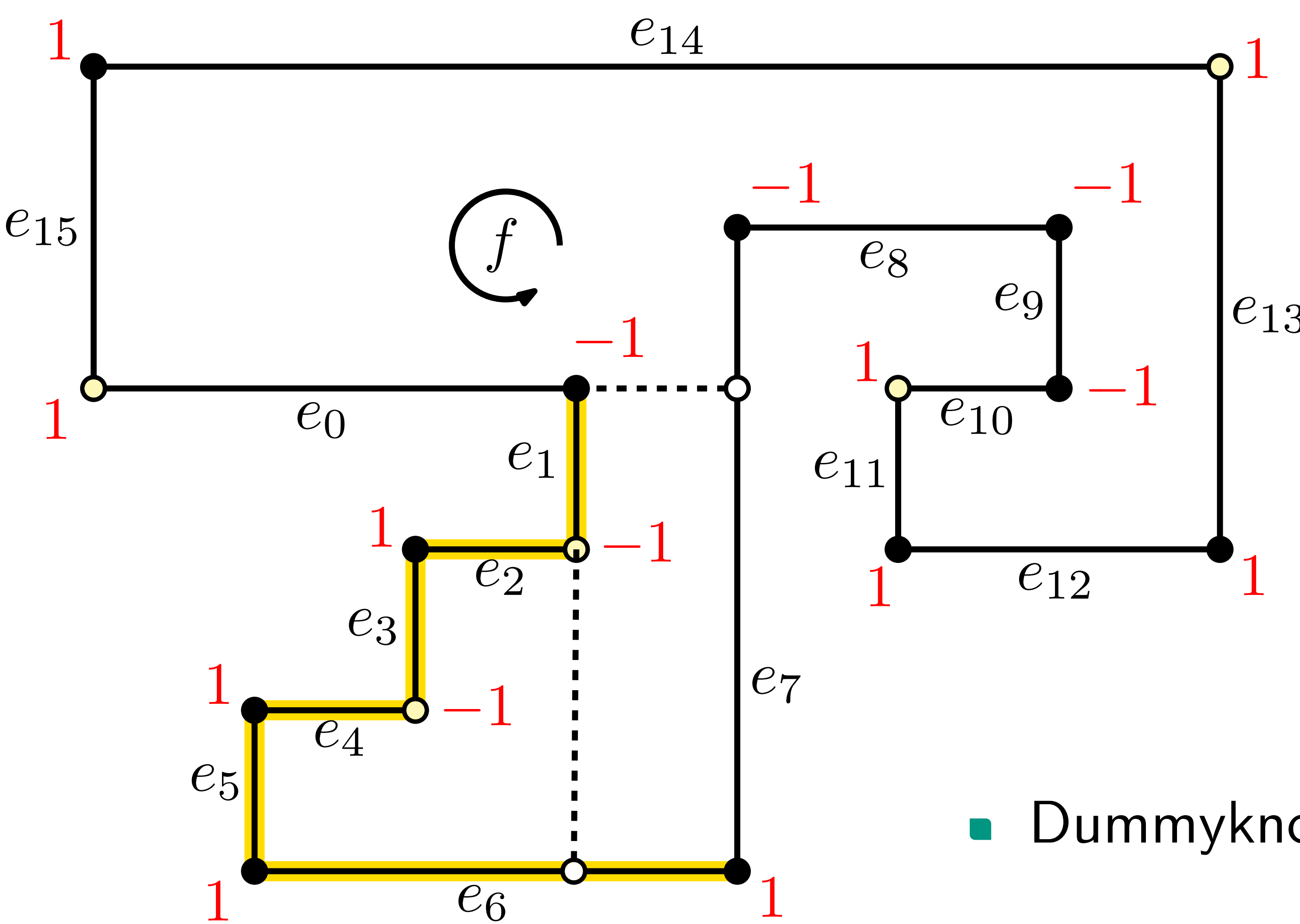
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



front(e_0): Nachfolger erste Kante mit $\sum$ turn$(e) = 1$

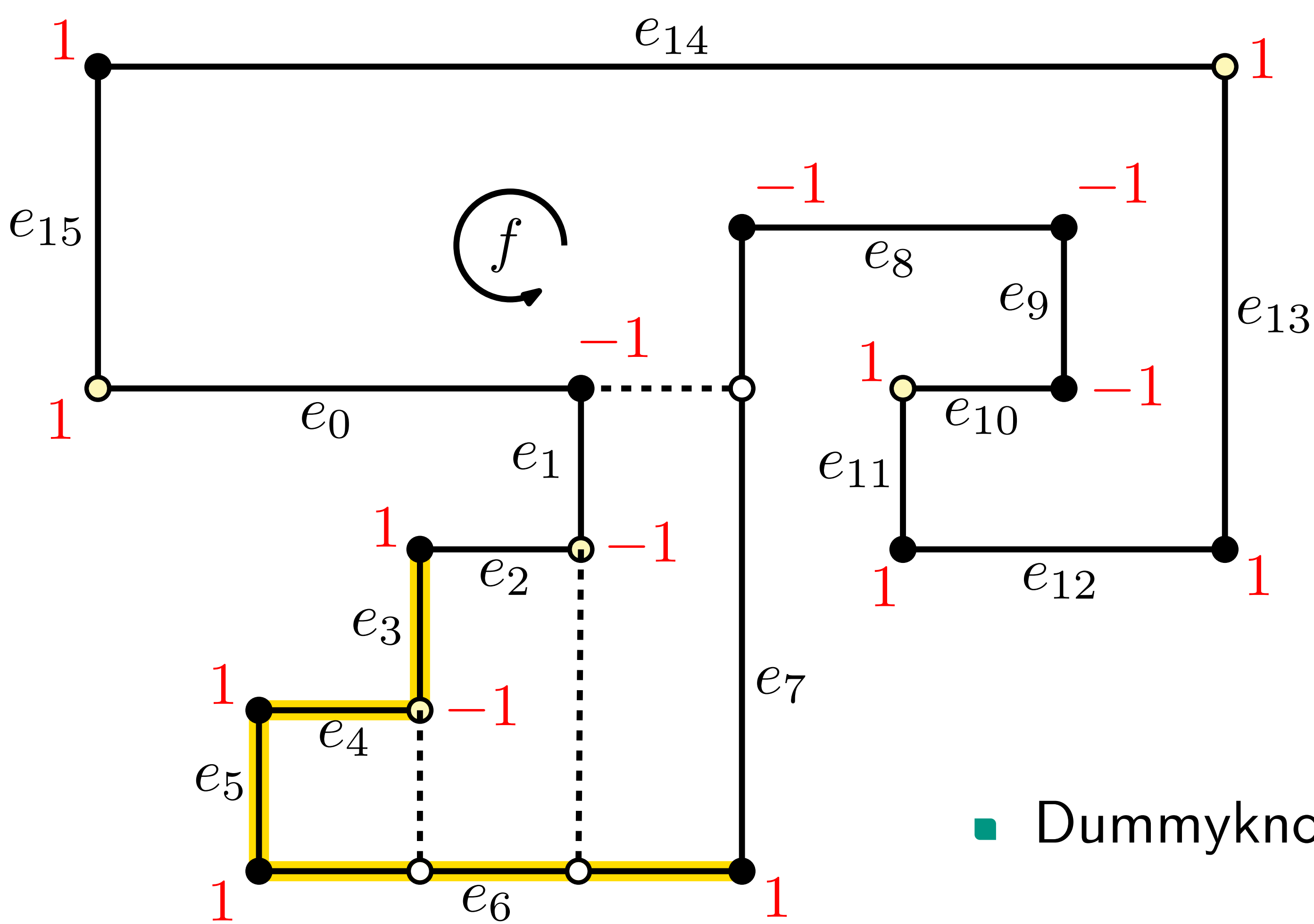
- Dummyknoten für Knicke
- turn$(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



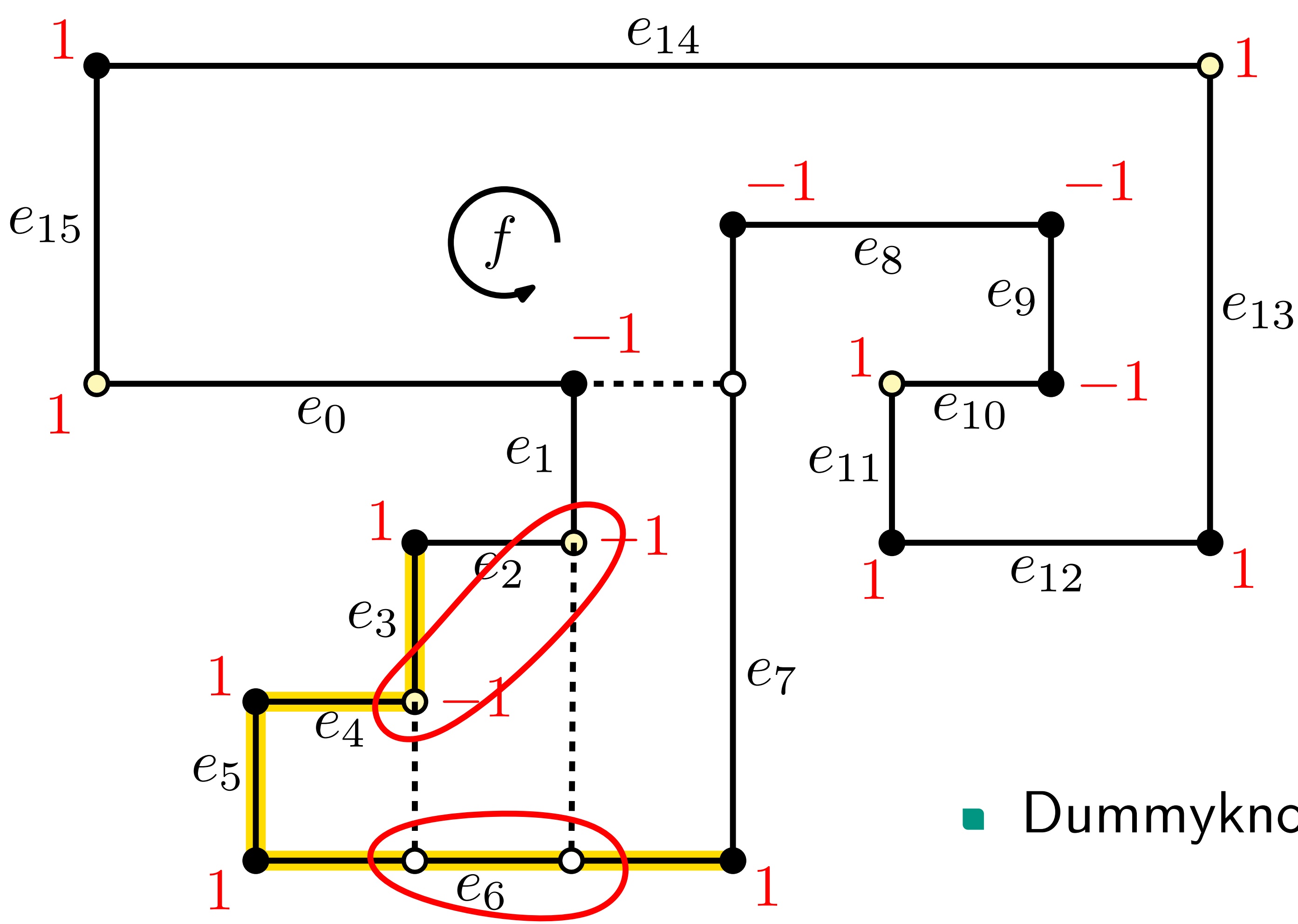
- Dummyknoten für Knicke
- $\text{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



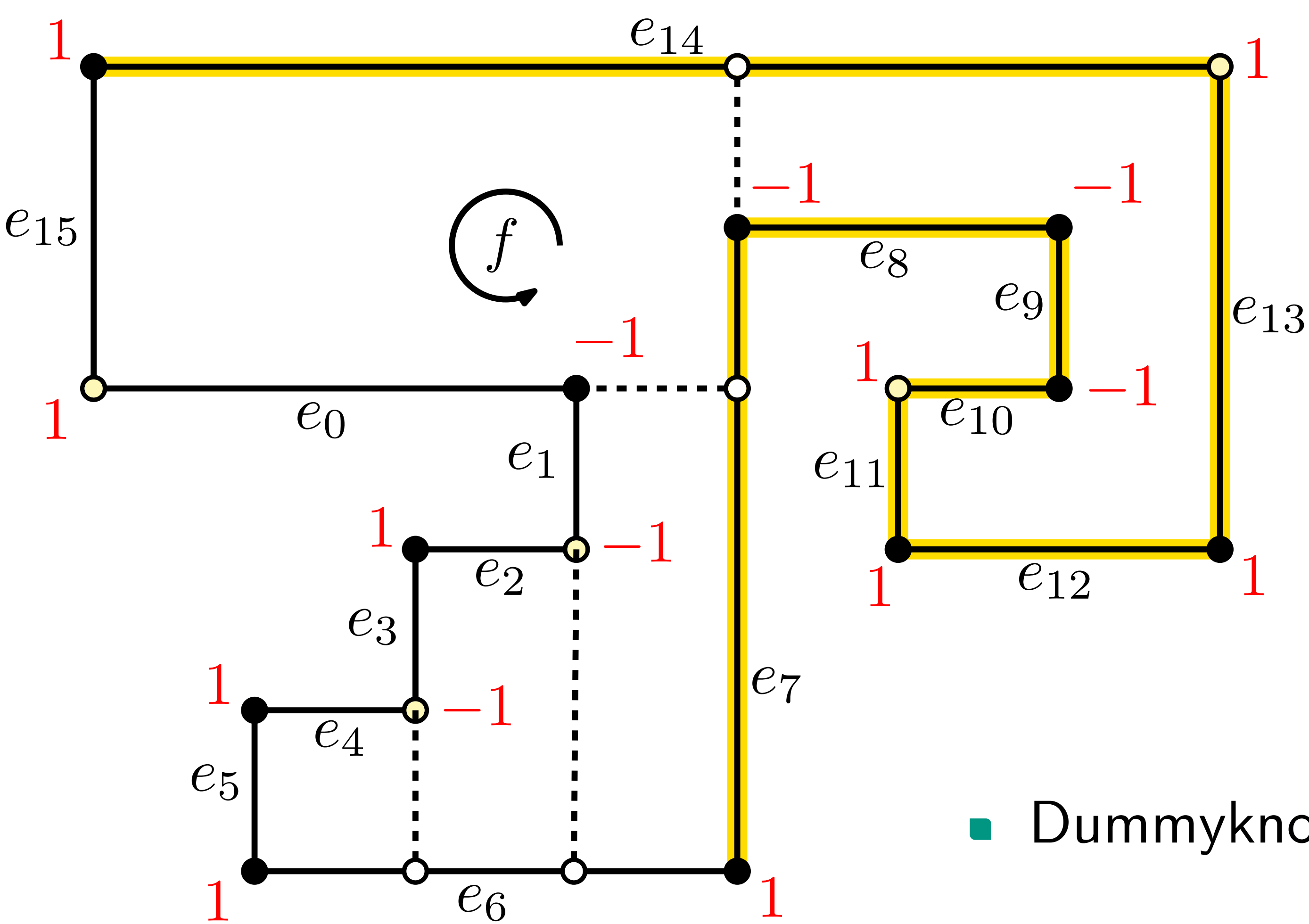
- Dummyknoten für Knicke
- $\text{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



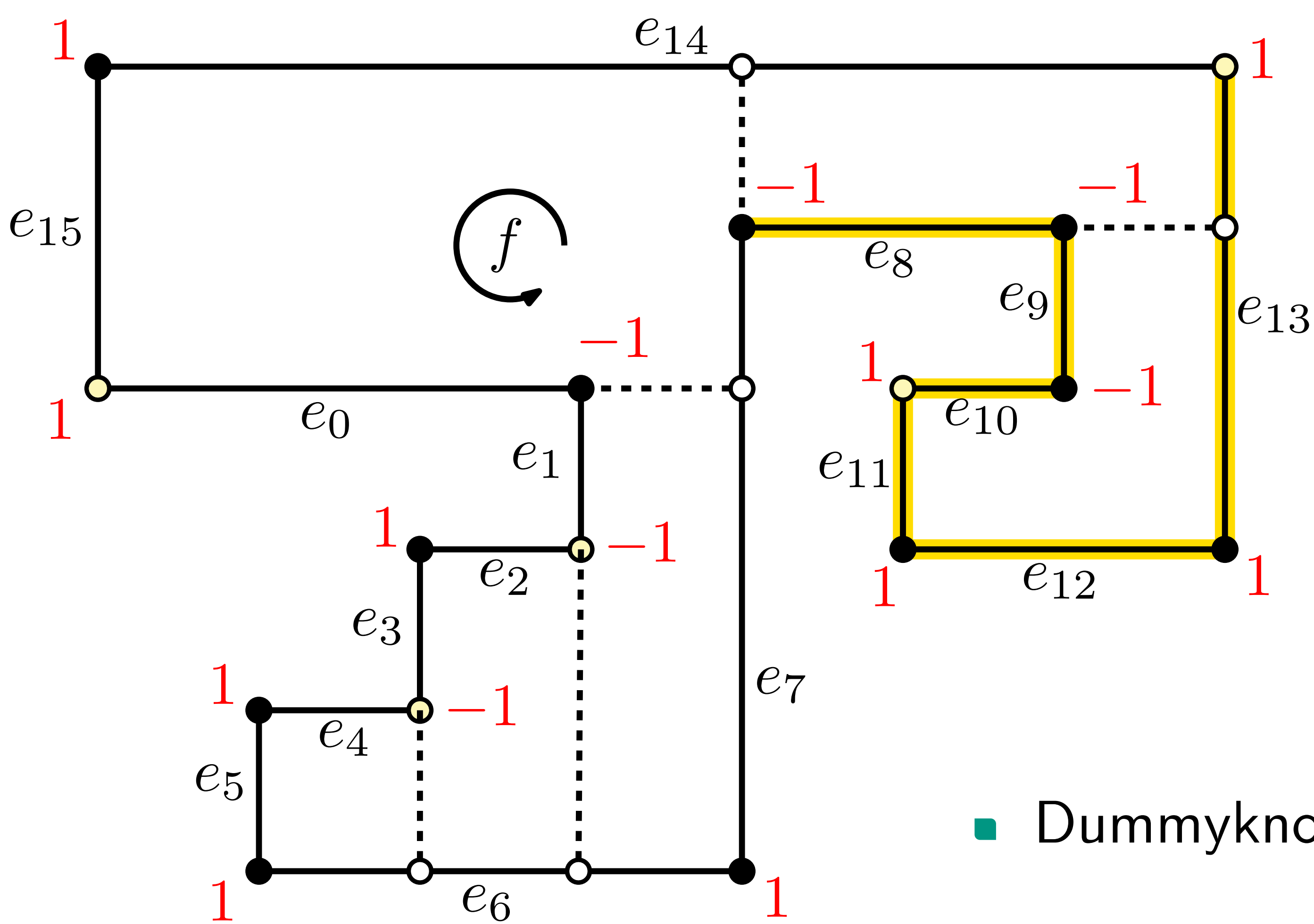
- Dummyknoten für Knicke
- $\text{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



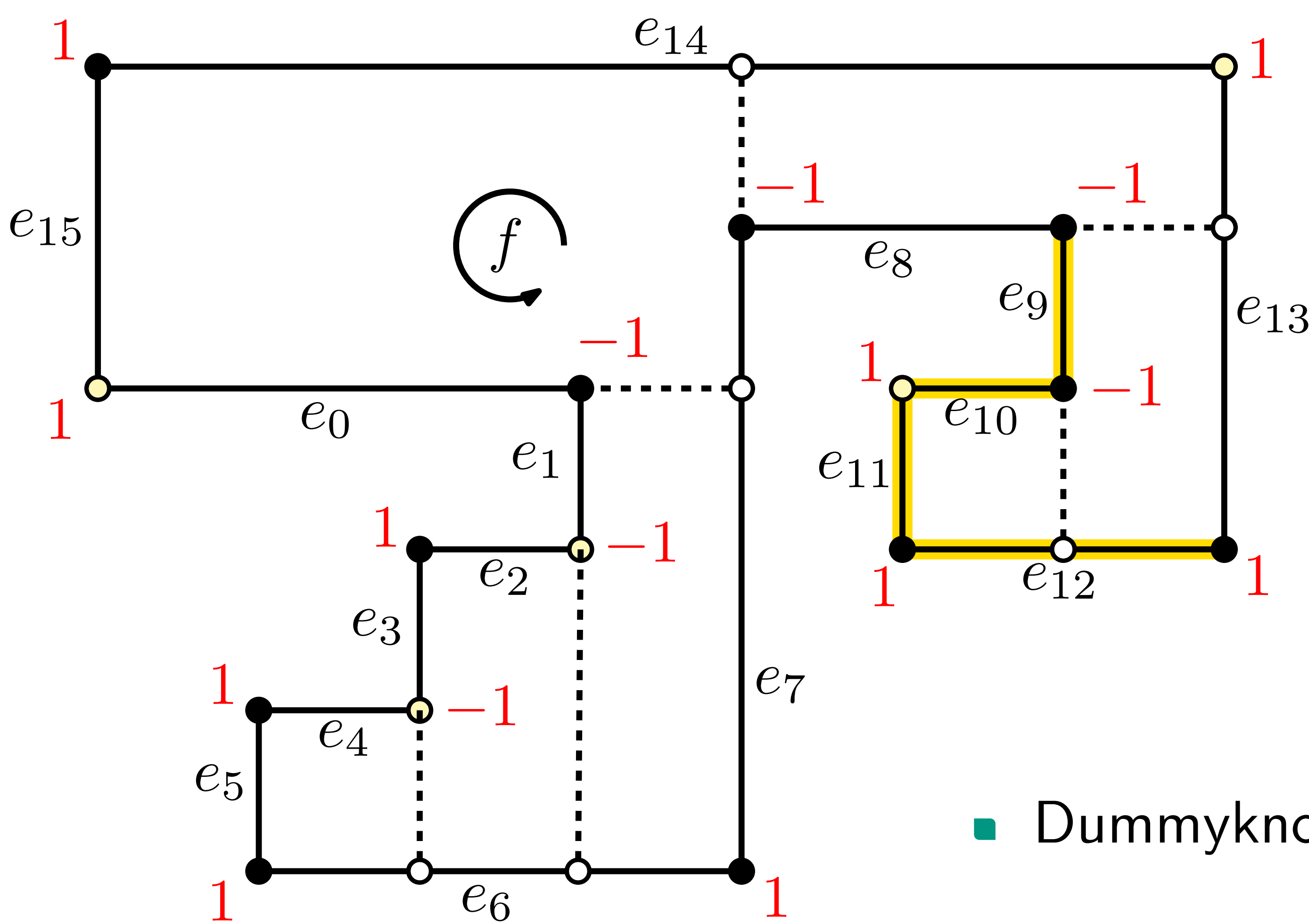
- Dummyknoten für Knicke
- $\mathrm{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



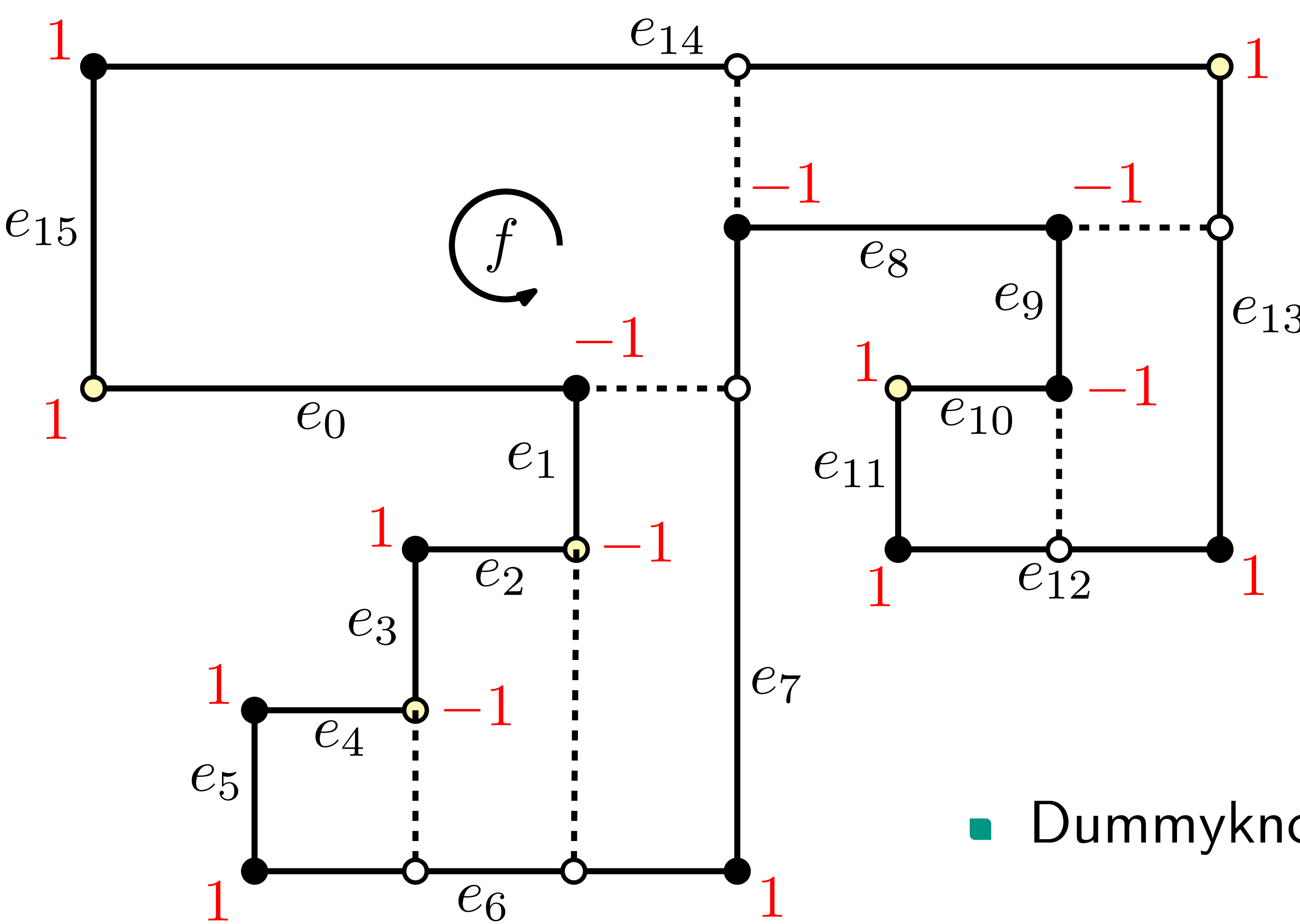
- Dummyknoten für Knicke
- $\text{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



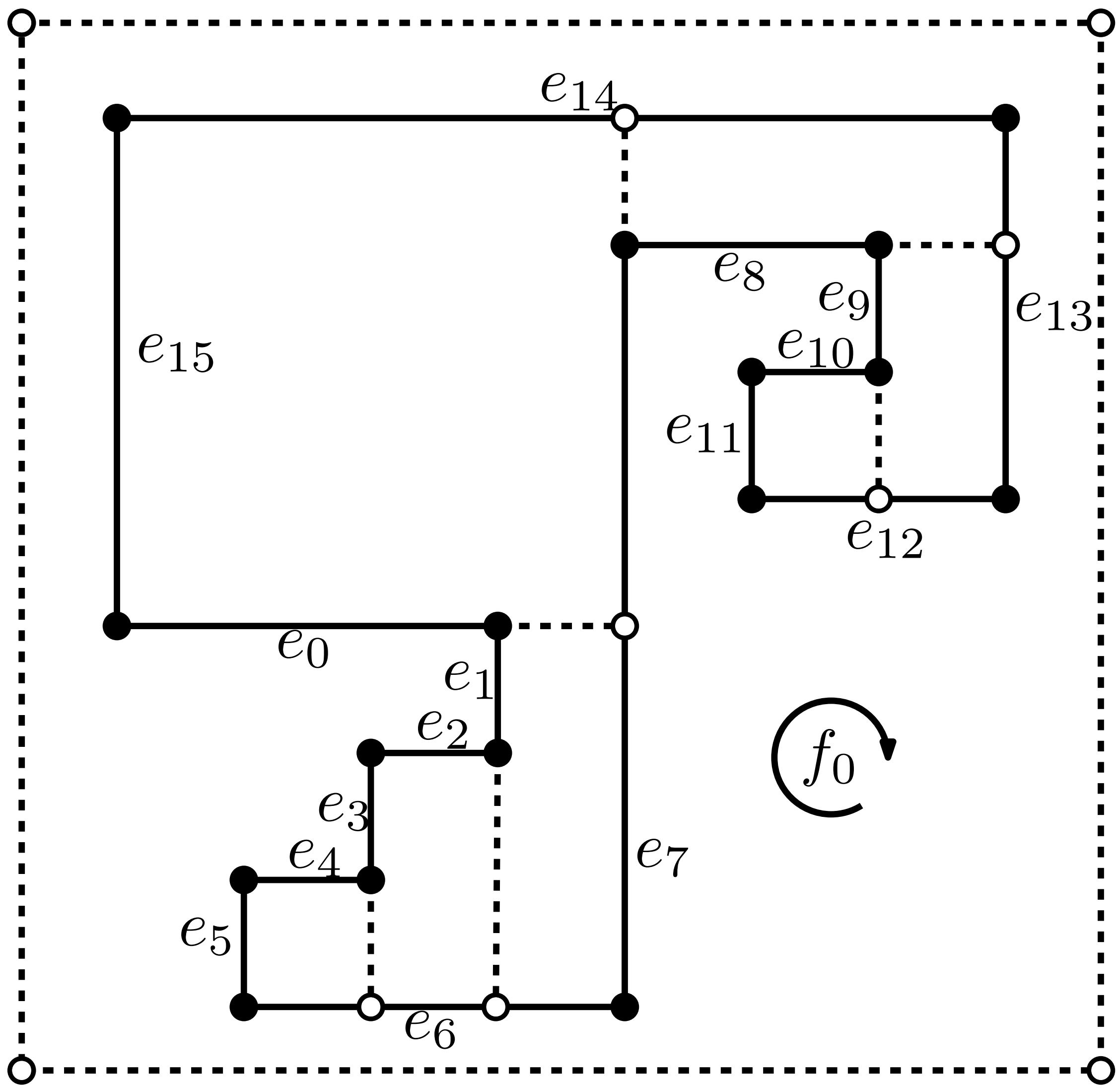
- Dummyknoten für Knicke
- $\mathrm{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

Verfeinerung von (G, H) – innere Facette

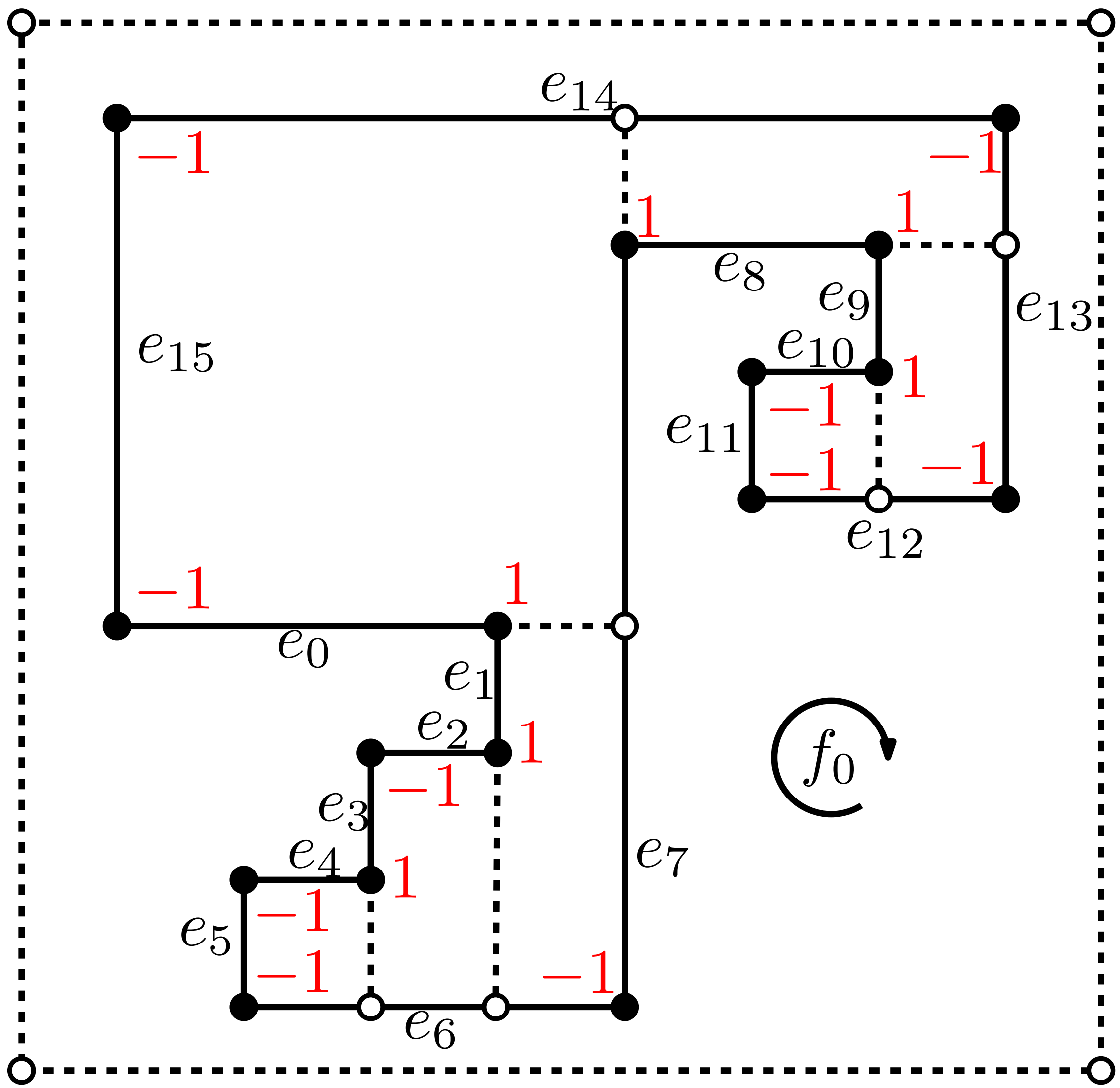


- Dummyknoten für Knicke
- $\text{turn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{Linksknick} \\ 0 & \text{kein Knick} \\ -1 & \text{Rechtsknick} \end{cases}$

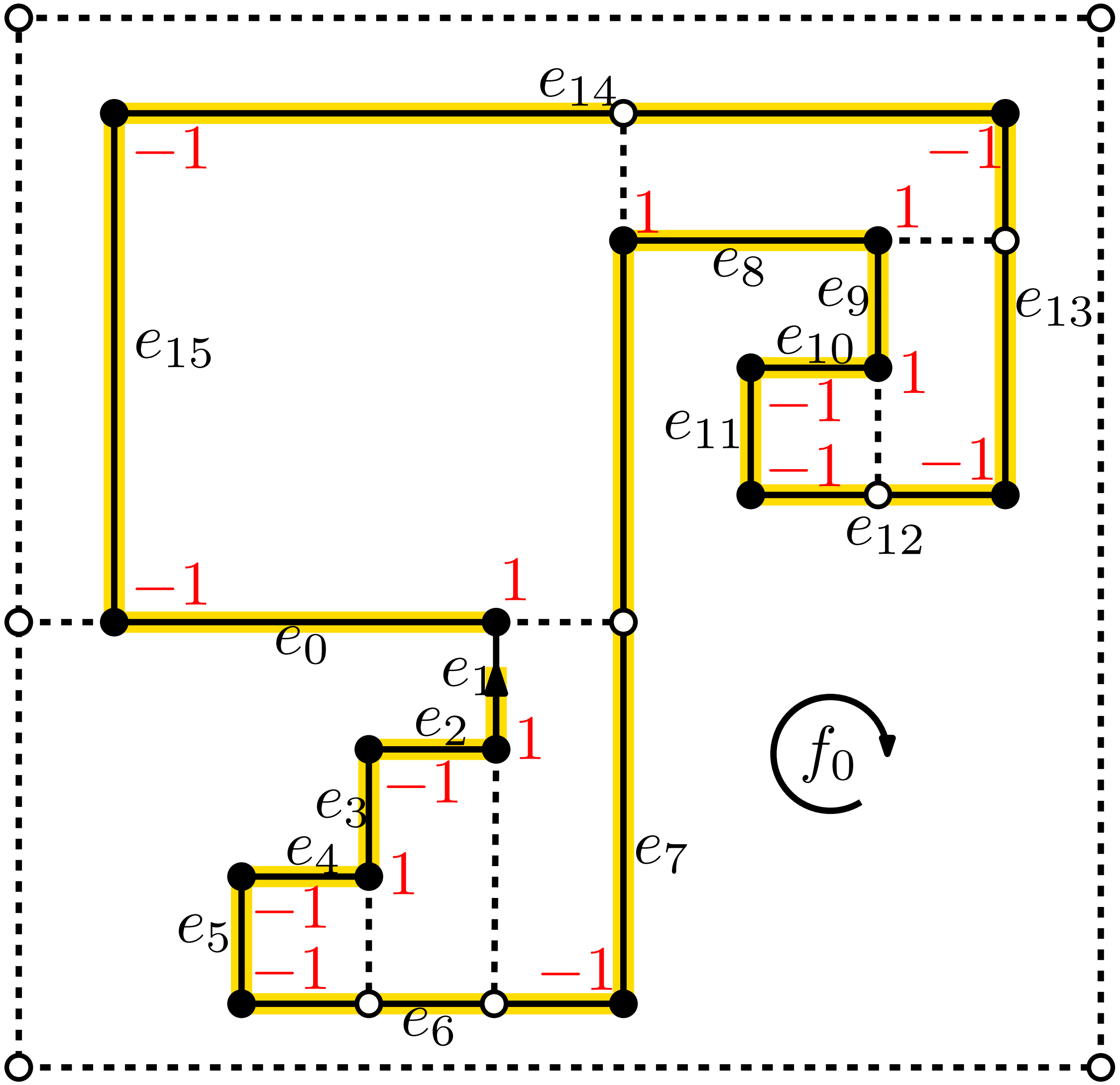
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



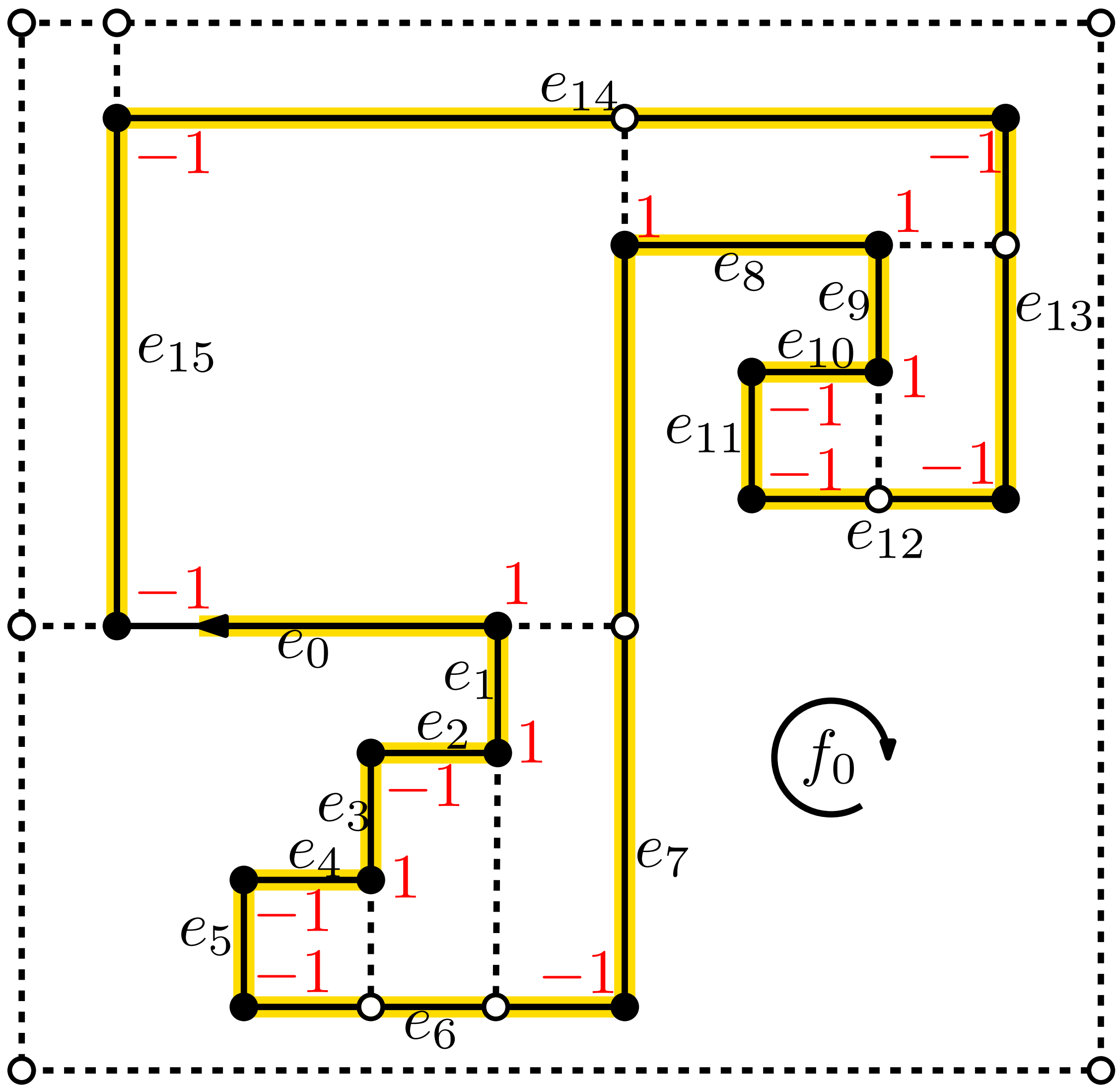
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



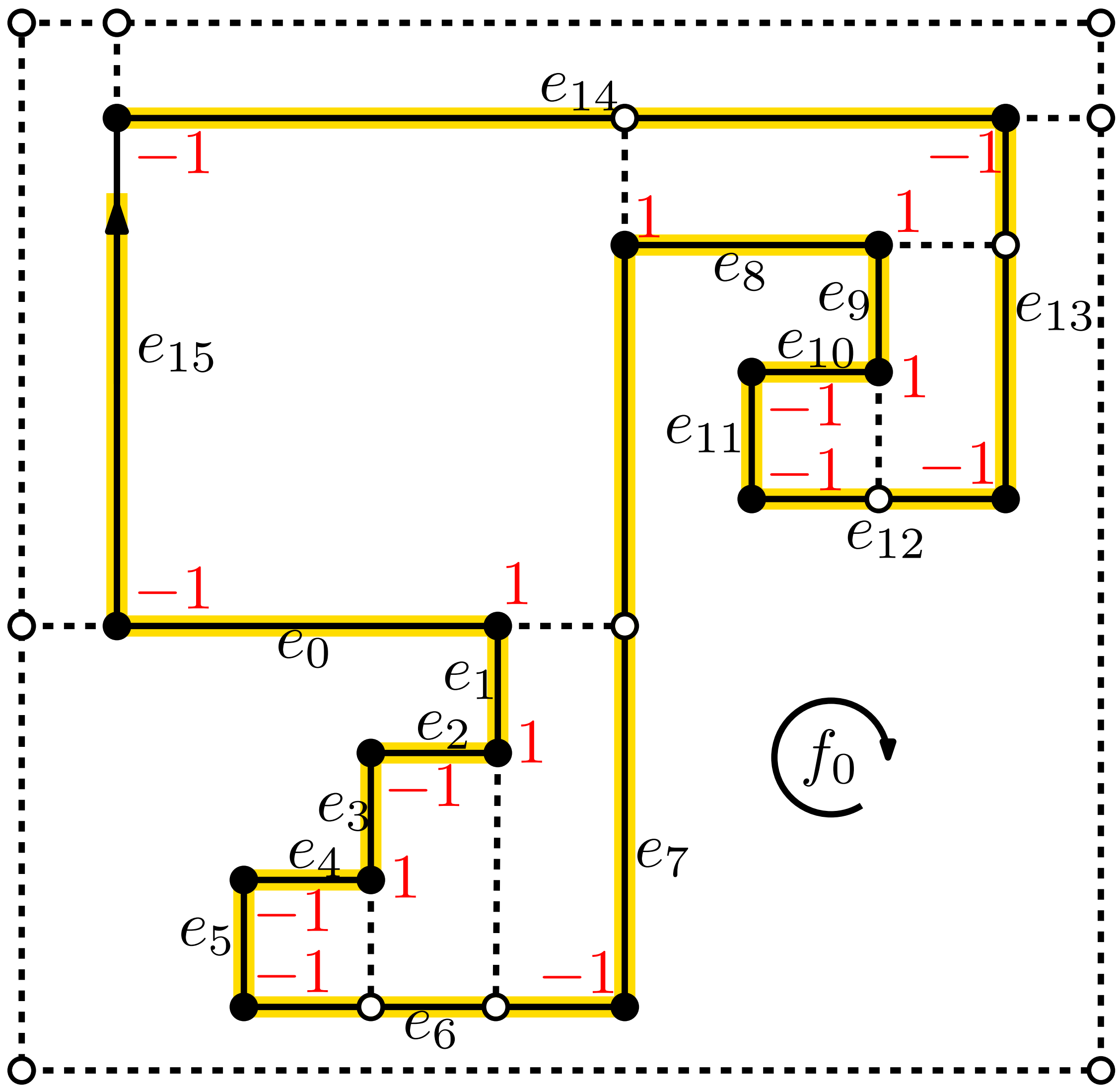
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



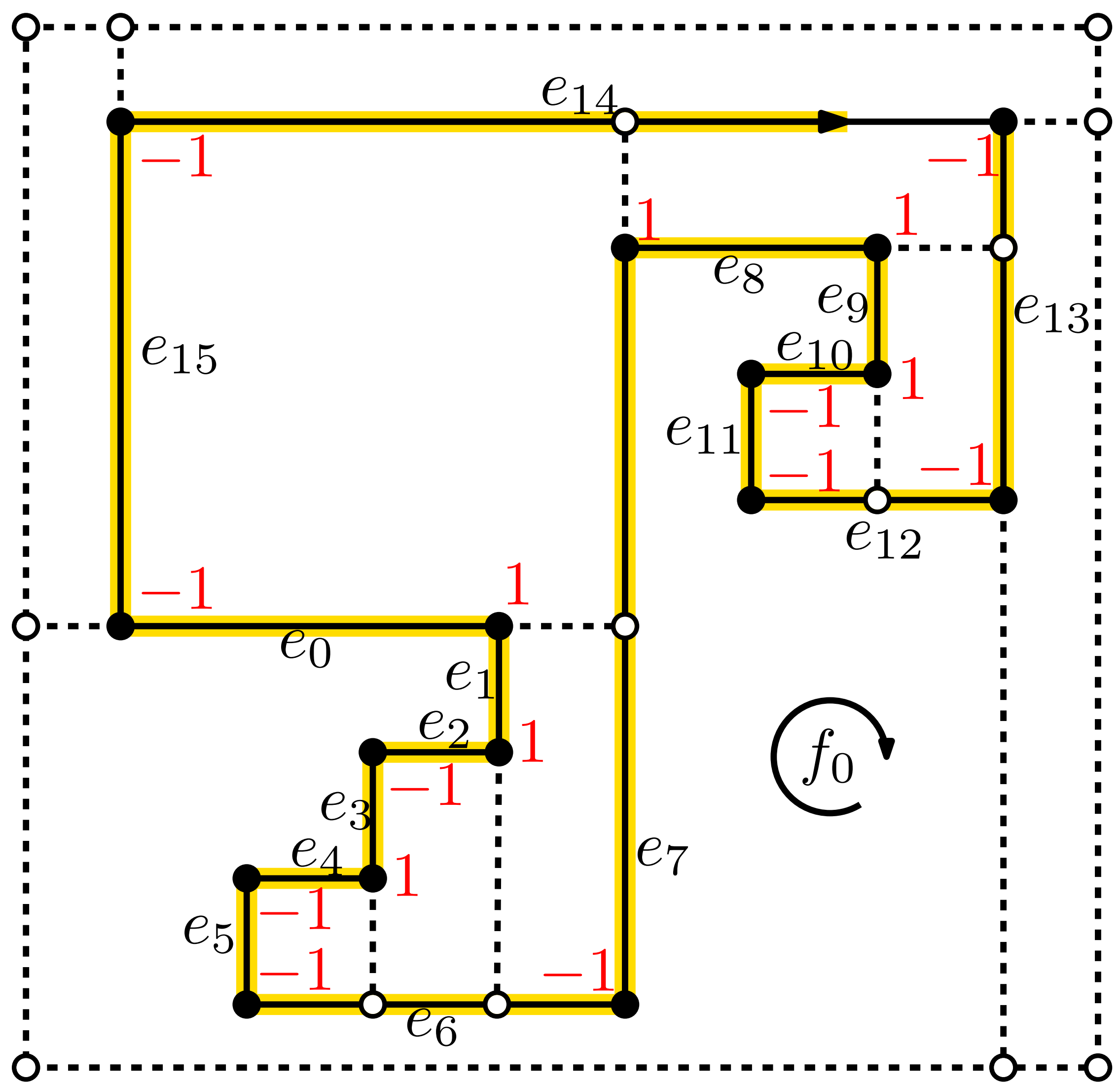
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



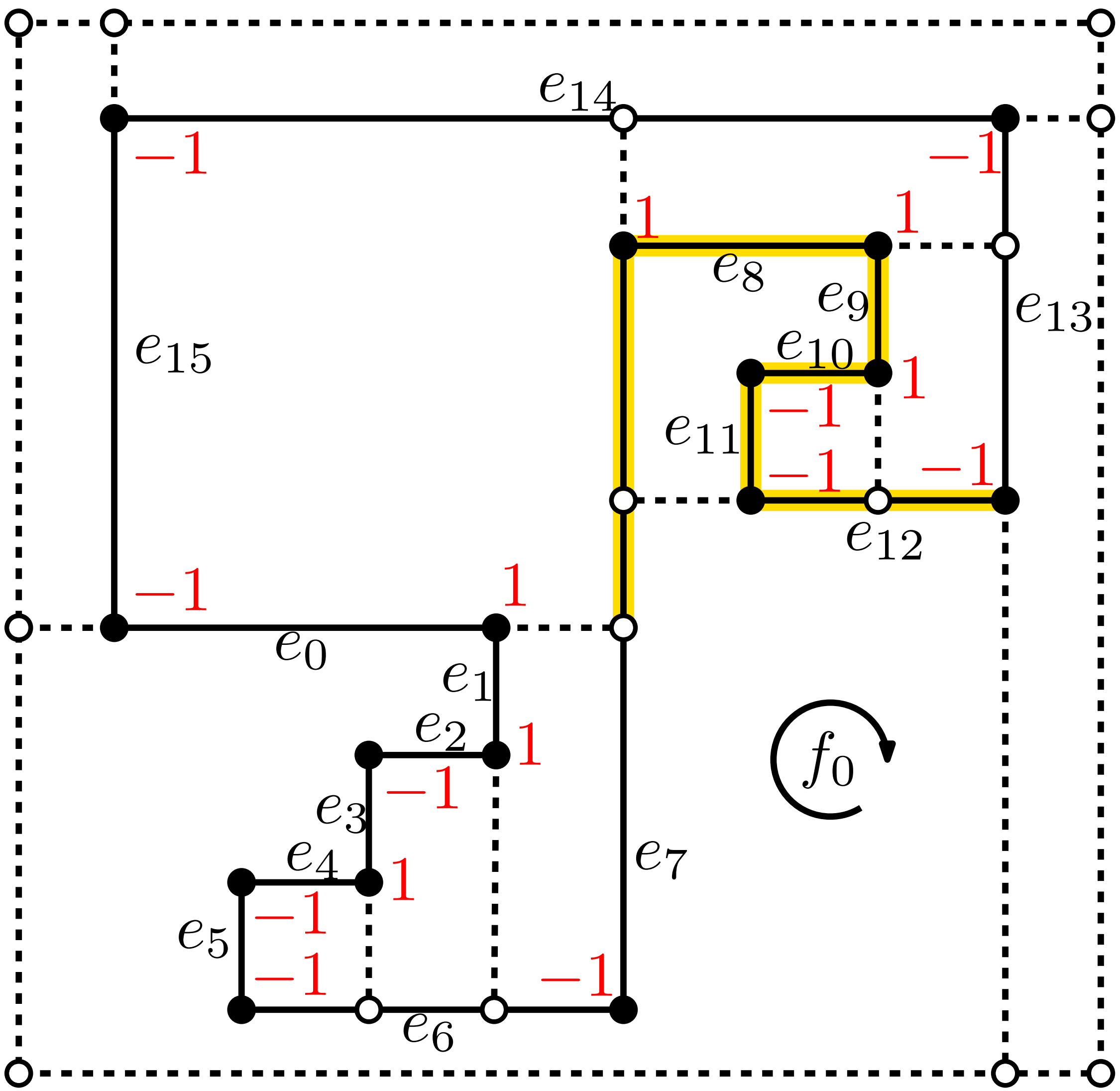
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



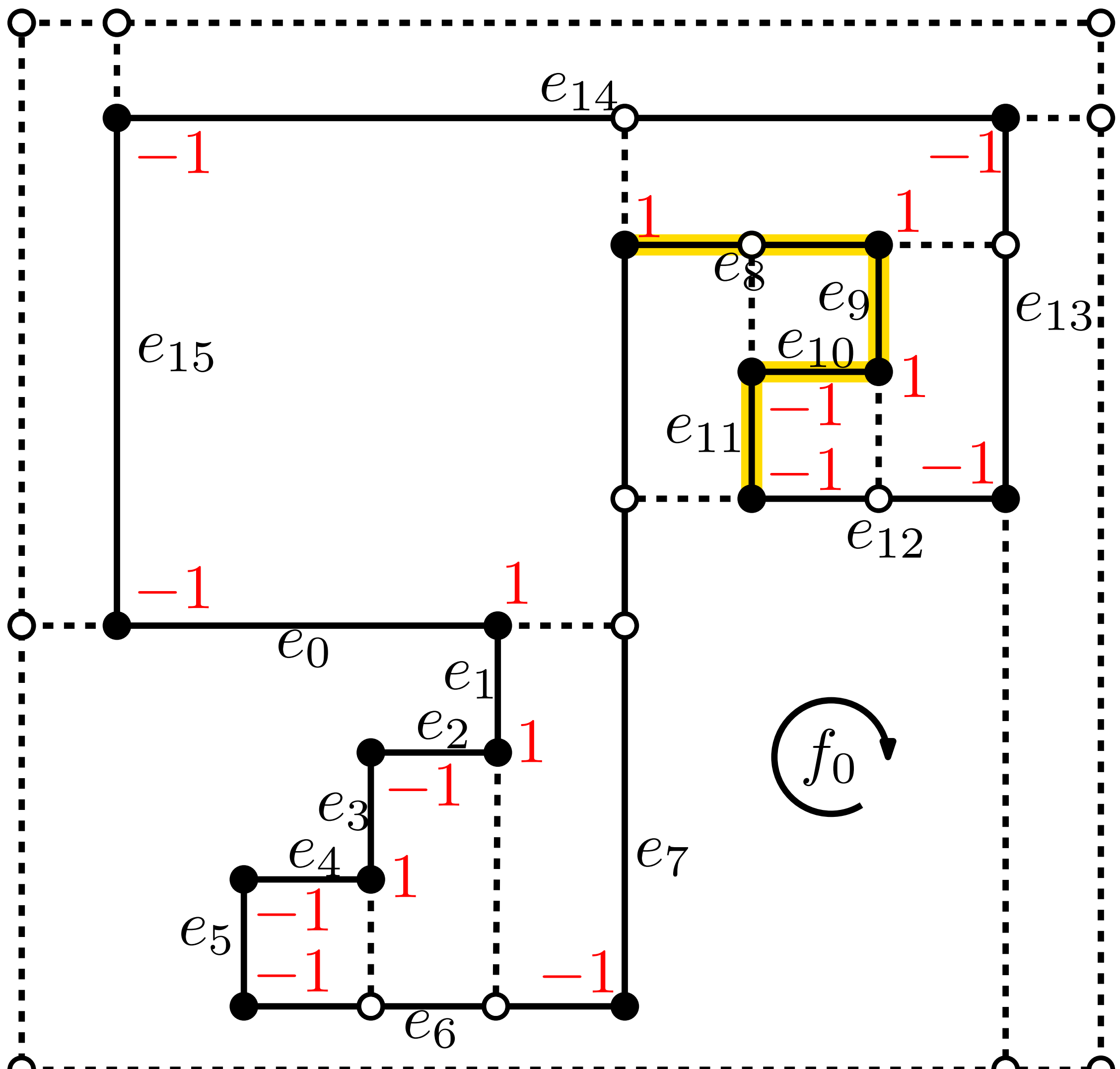
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



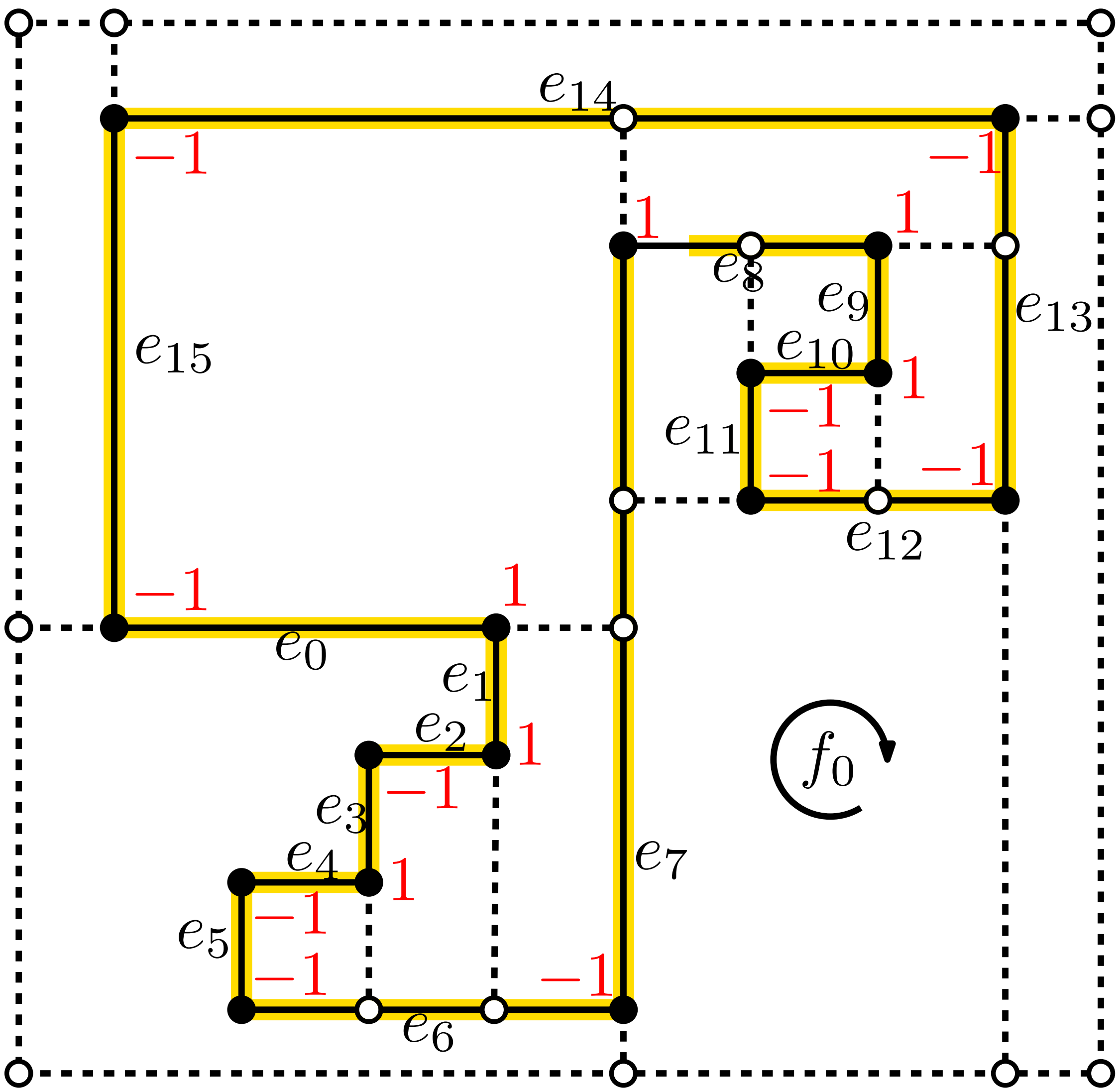
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



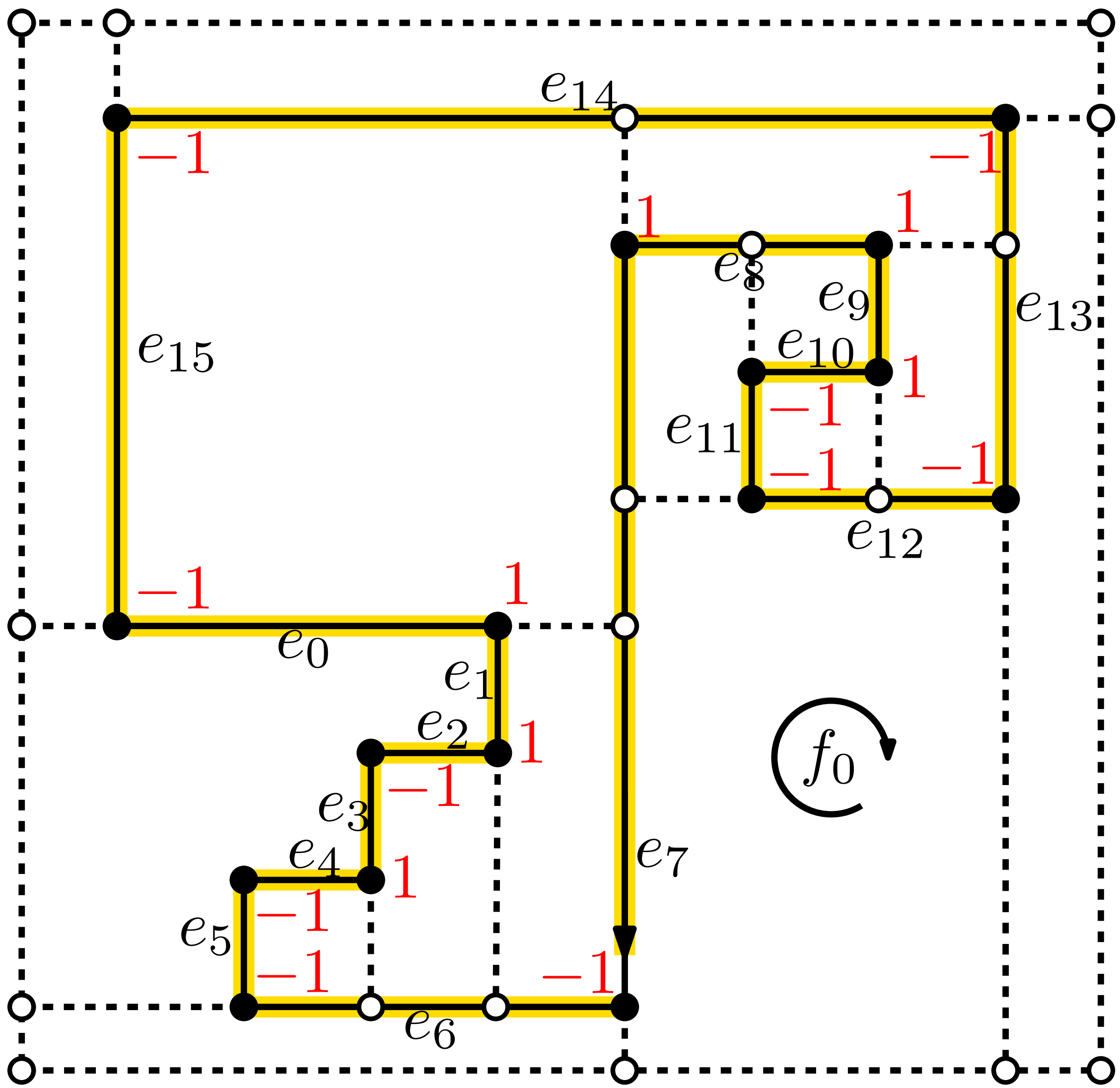
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



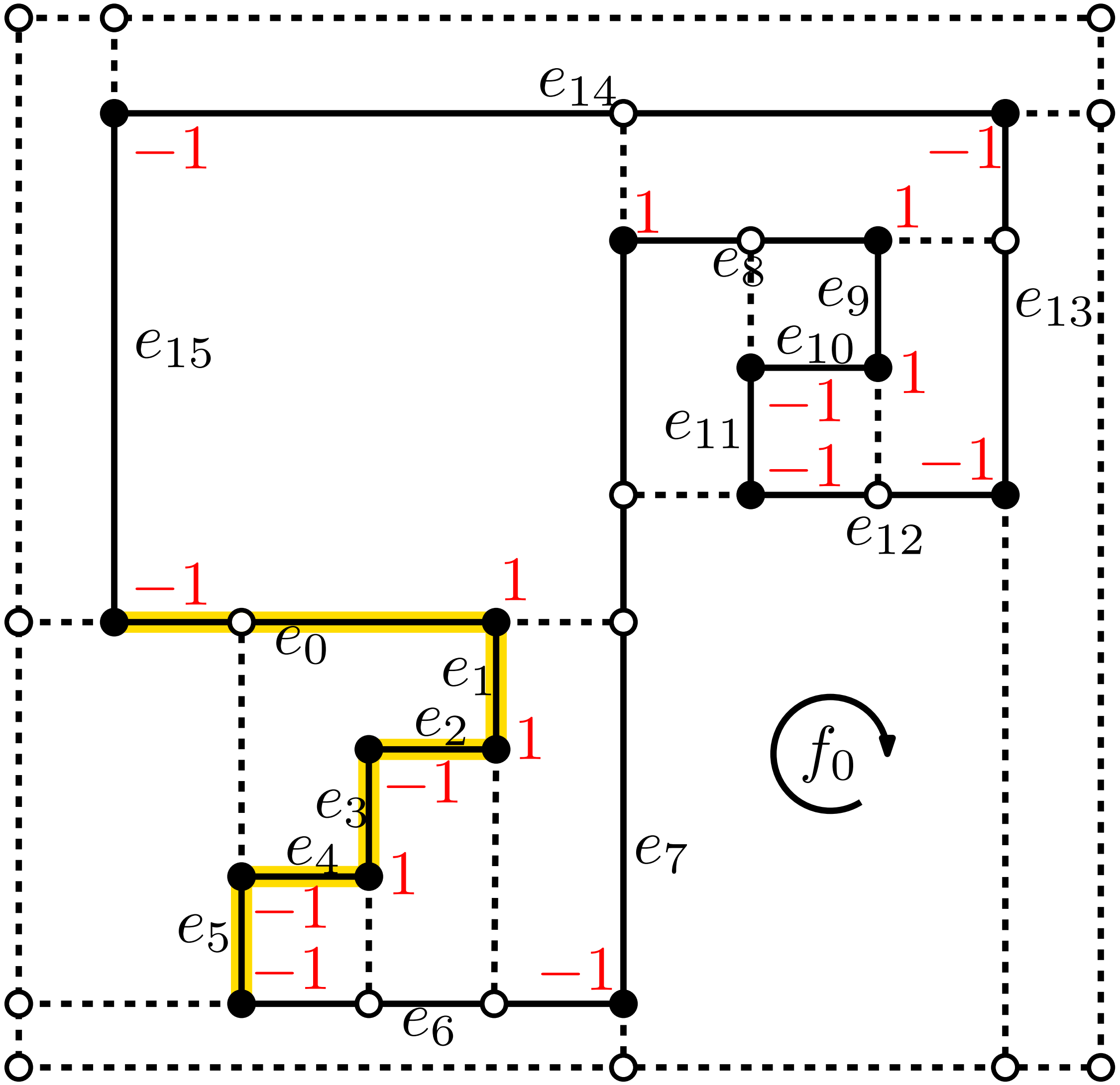
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



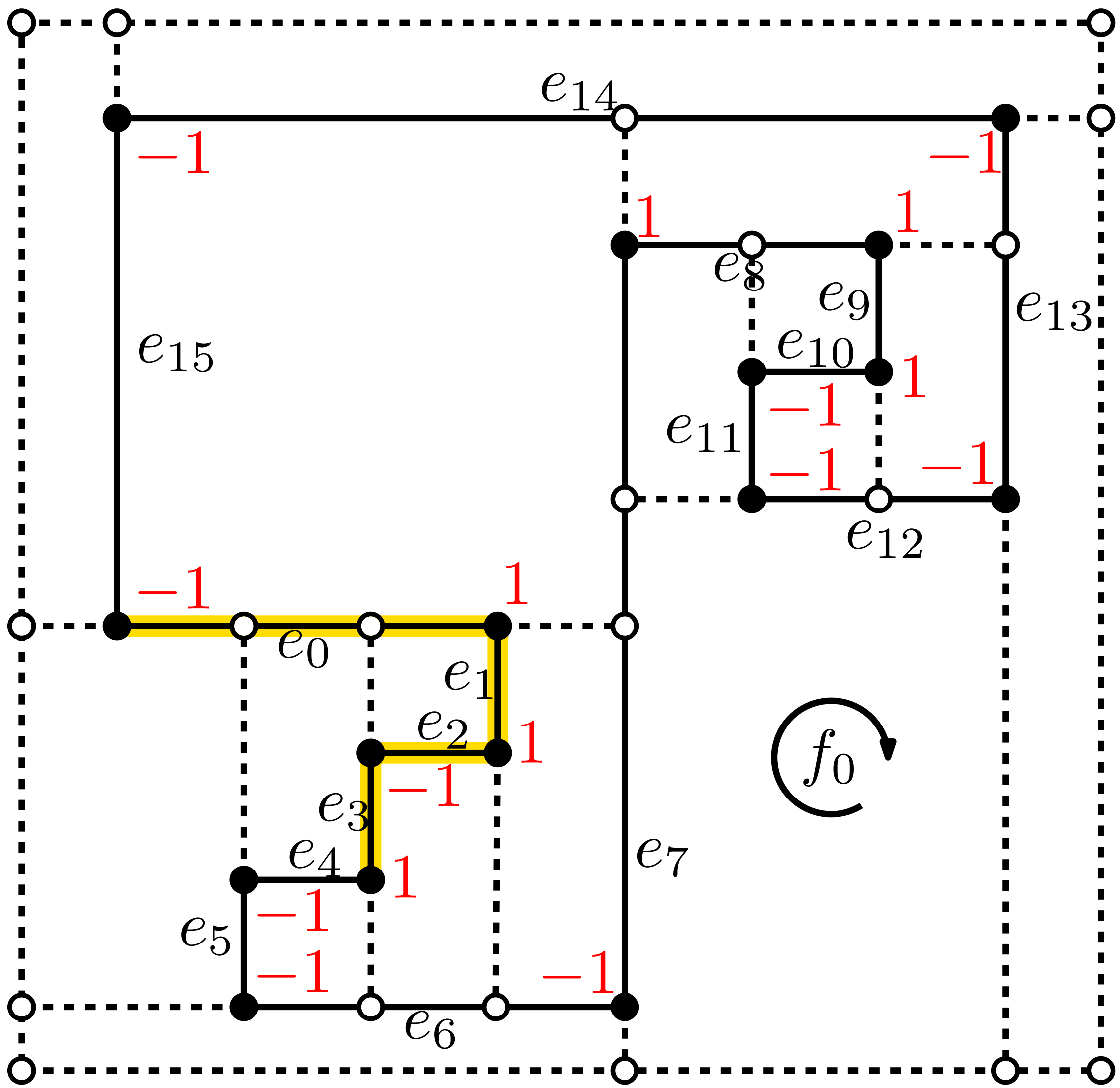
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



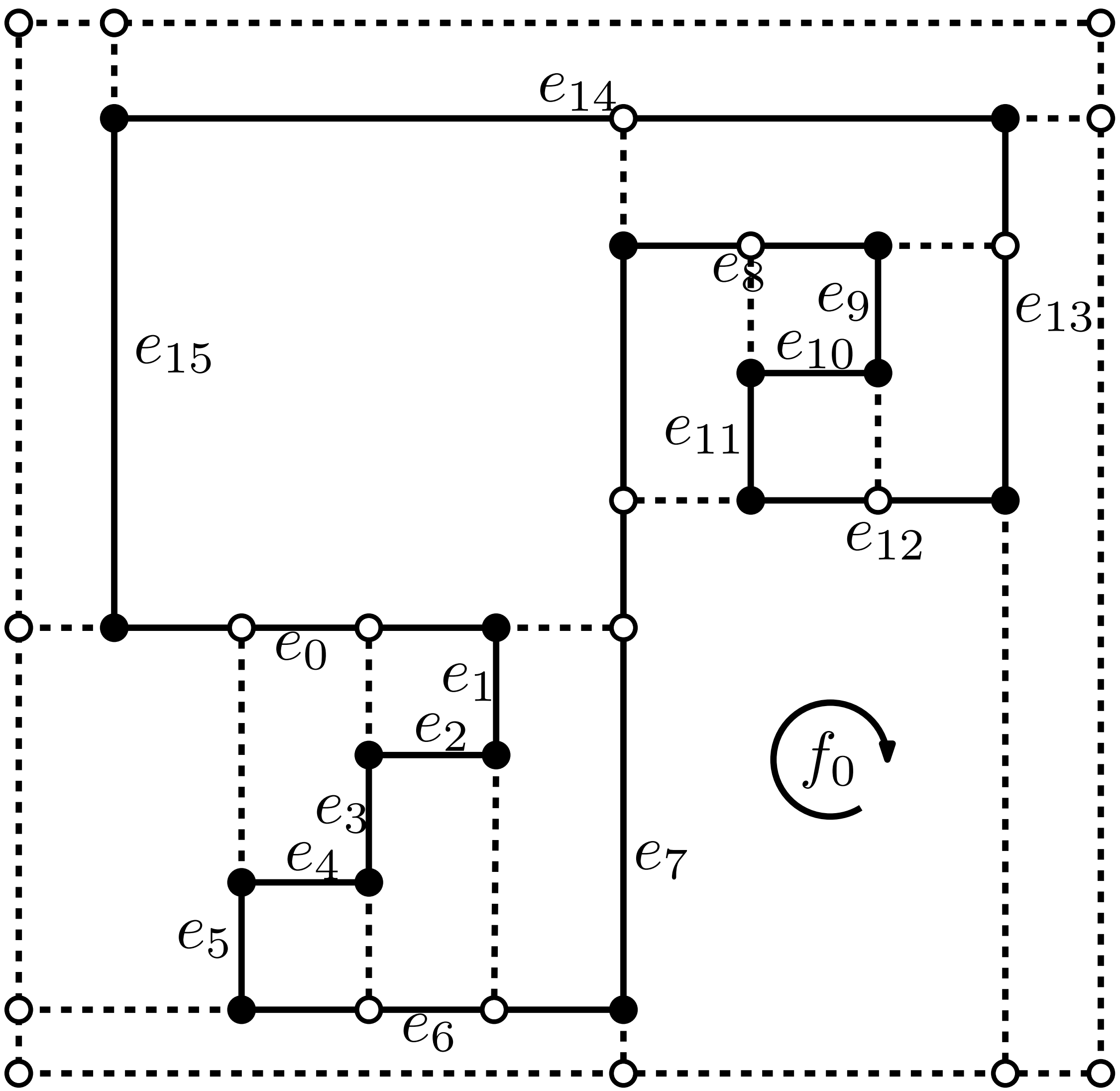
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



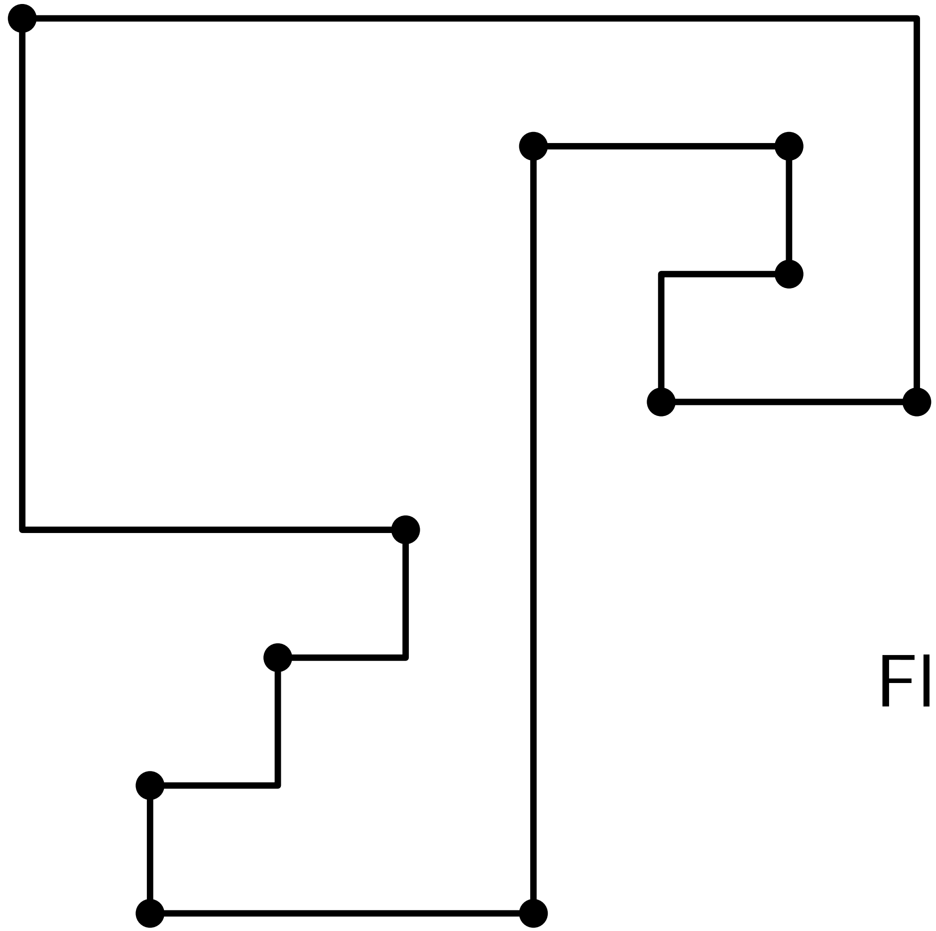
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette

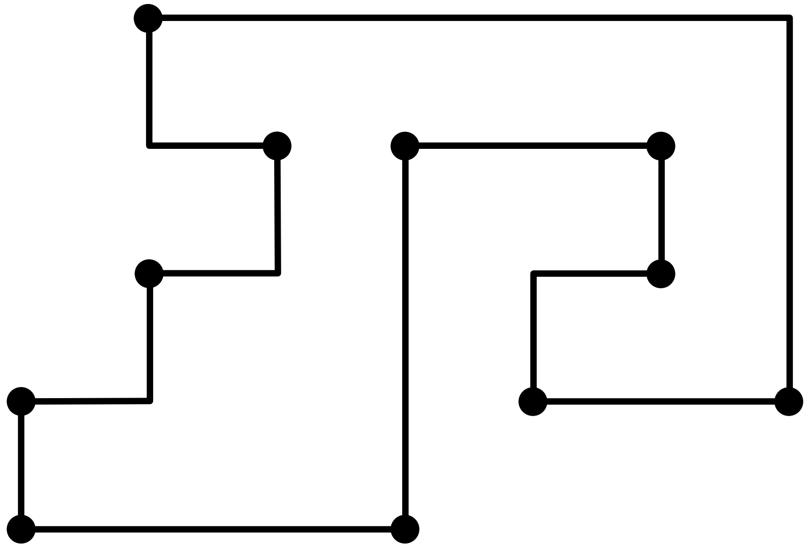


Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

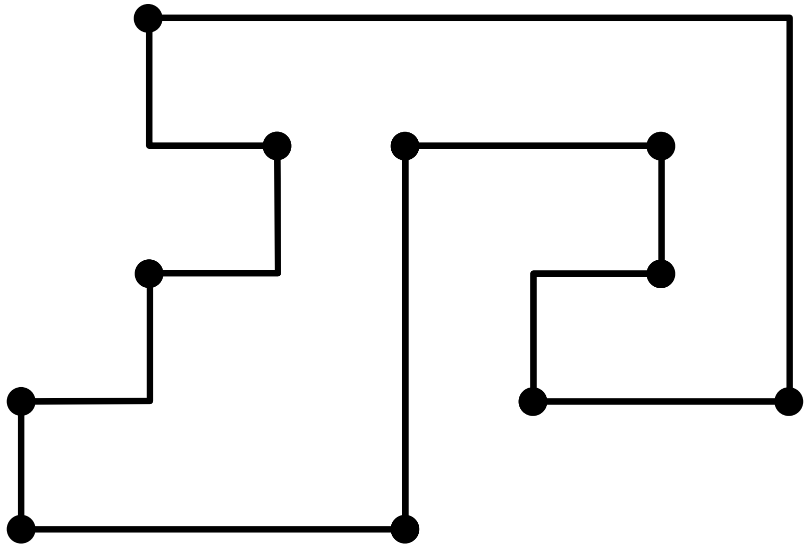
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Nein!

Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Nein!

Die Flächenkompaktierung bei gegebener orthogonaler Beschreibung ist im Allgemeinen NP-schwer.