Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Übung 6: Kräftebasierte Verfahren & Lagenlayouts

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Tamara Mchedlidze · **Martin Nöllenburg**

22.01.2014

Aufgabe 1 – Kräfte und Potential

(a) Geben Sie Kräfte für ein kräftebasiertes Layoutverfahren an, die geeignet sind um
  (i) einen Knoten in der Nähe einer vorgegebenen Position zu halten,
  (ii) einen Knoten in der Nähe der x-Achse zu platzieren,
  (iii) eine Kante parallel zur y-Achse auszurichten,
  (iv) gerichtete Kanten (ähnlich wie in Lagenlayouts) aufwärts zu zeichnen.

(b) Sei nun zusätzlich zum Graphen $G = (V, E)$ noch eine Clusterung $\mathcal{C}$ gegeben, d.h. eine Partition der Knotenmenge V in disjunkte Teilmengen $C_1, \ldots, C_k$ mit $\cup_{C \in \mathcal{C}} C = V$. Überlegen Sie sich Kräfte, die dafür sorgen, dass die Knoten eines Clusters jeweils an einer ähnlichen Position liegen und verschiedene Cluster sich nicht zu nahe kommen.

Aufgabe 1 – Kräfte und Potential

(c) Für einen Knoten u mit Position $p_u = (x_u, y_u)$ sei die Verschiebungsrichtung in einem kräftebasierten Layoutverfahren definiert durch disp : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\text{disp}(p_u) = \sum_{\{u,v\} \in E} \frac{||p_v - p_u||^2}{d_{uv}}(p_v - p_u) - \sum_{v \in V} \frac{C}{||p_v - p_u||^2}(p_v - p_u).$$

Dabei sind $C \in \mathbb{R}$ und $d_{uv} \in \mathbb{R}$ (für alle Kanten $\{u,v\} \in E$) Konstanten. Bestimmen Sie eine Potentialfunktion pot : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $\text{disp}(p_u) = -\nabla \text{pot}(p_u)$, d.h. der Verschiebevektor für den Knoten u soll gleich dem negativen Gradienten der Potentialfunktion sein.

Aufgabe 2 – Stabilität im Springembedder

Karlsruhe Institute of Technology

(a) Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d\}$ und $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$. Geben Sie eine stabile Ausgabe des Springembedder-Algorithmus nach Fruchterman und Reingold an. Geben Sie eine Zeichnung vor, die nicht stabil ist, und zeichnen Sie die Richtungen der Kräfte ein.

(b) Überlegen Sie sich einen Graphen, der im Springembedder-Algorithmus in mindestens zwei unterschiedlichen stabilen Lösungen enden kann. Geben Sie zwei solche Lösungen an.

Aufgabe 3 – Knoten mit Fläche > 0

Bislang wurden die Springembedder-Algorithmen unter der vereinfachenden Annahme definiert, dass Knoten als Punkte dargestellt werden. Welche Anpassungen sind nötig, wenn Knoten als Kreise dargestellt werden? Wie sieht es für Rechtecke aus?

Aufgabe 4 – Schwerpunkt-Methode

Einer der ältesten Algorithmen zum Graphenzeichnen stammt von William T. Tutte aus dem Jahr 1963. Die Kräfte sind wie folgt definiert:

$$F(v) = \sum_{u \in N(v)} (p_u - p_v),$$

wobei $N(v)$ die Menge aller Nachbarknoten von v ist.

(a) Was gilt für die Position eines Knotens v, wenn er stabil ist, d.h. $F(v) = 0$ gilt?

(b) Sehen Sie ein Problem, wenn man versucht das Kräftemodell von Tutte iterativ in ein Gleichgewicht zu bringen? Entwickeln Sie einen Vorschlag, wie sich das Problem vermeiden lässt.

Satz von Tutte (1963)

Satz: Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph, f eine Facette von G, P eine konvexe planare Zeichnung von f. Dann ist das resultierende Schwerpunktlayout mit fixierter Facette f eine planare, konvexe Zeichnung von G.

Satz von Tutte (1963)

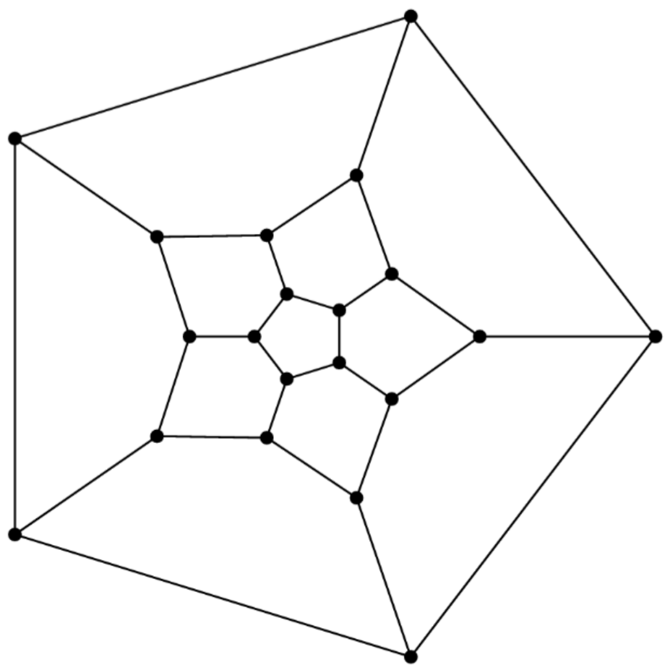
Satz: Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph, f eine Facette von G, P eine konvexe planare Zeichnung von f. Dann ist das resultierende Schwerpunktlayout mit fixierter Facette f eine planare, konvexe Zeichnung von G.

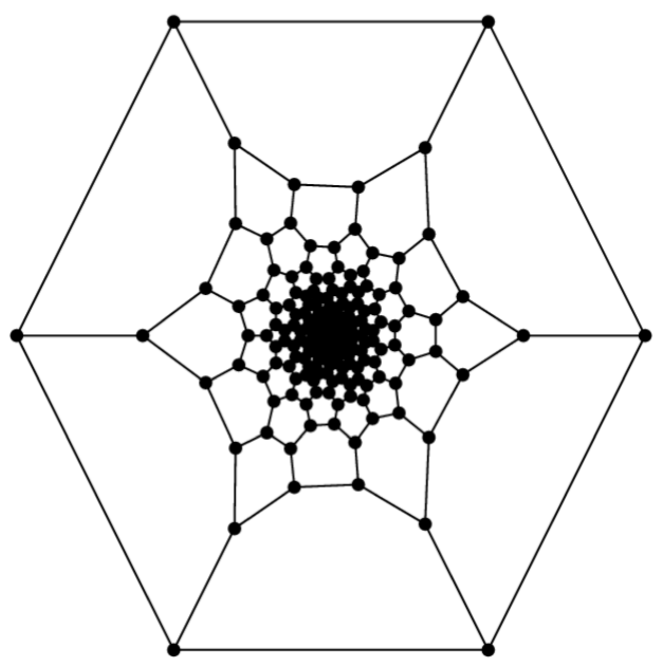
- Vorteile: schnell (dünne Graphen), einfach, effektiv
- Nachteile: Garantien nur für 3-zshg. planare Graphen, schlechte Auflösung

Satz von Tutte (1963)

Satz: Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph, f eine Facette von G, P eine konvexe planare Zeichnung von f. Dann ist das resultierende Schwerpunktlayout mit fixierter Facette f eine planare, konvexe Zeichnung von G.

- Vorteile: schnell (dünne Graphen), einfach, effektiv
- Nachteile: Garantien nur für 3-zshg. planare Graphen, schlechte Auflösung





Aufgabe 5 – Feedback Arc Set

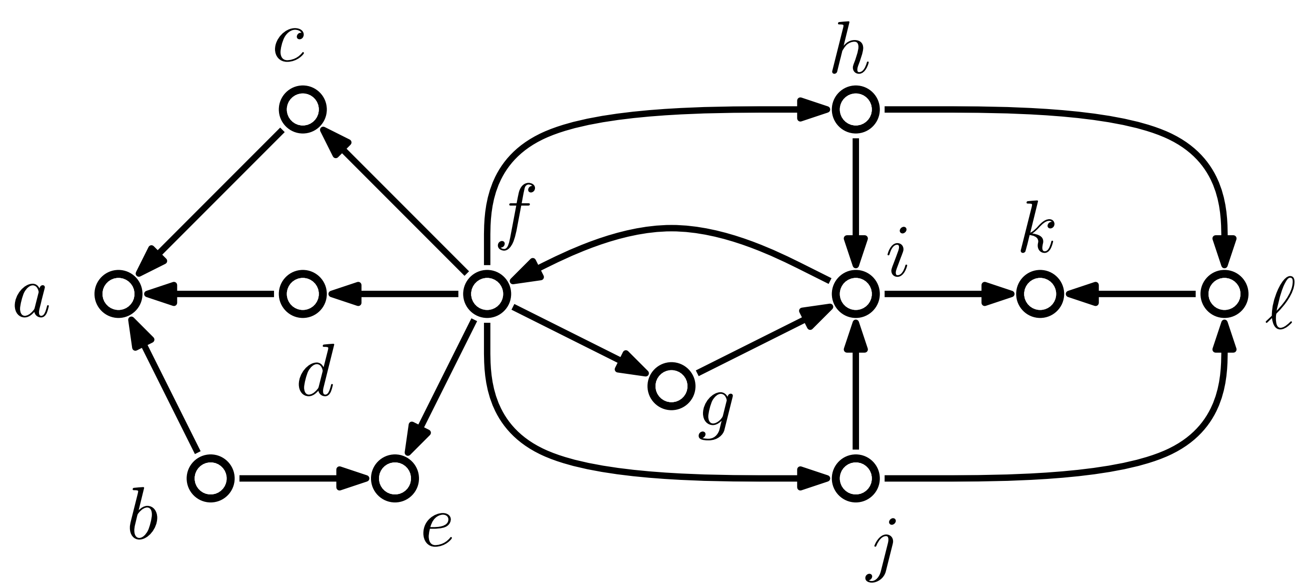
Minimum Feedback Arc Set: Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Bestimme eine Menge $A_f \subset A$ minimaler Kardinalität, so dass $D_f = (V, A \setminus A_f)$ azyklisch ist.

Minimum Feedback Set: Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Bestimme eine Menge $A_r \subset A$ minimaler Kardinalität, so dass $D_r = (V, A \setminus A_r \cup \mathrm{rev}(A_r))$ azyklisch ist. Dabei bezeichne $\mathrm{rev}(A)$ die Kantenmenge, die man erhält wenn die Richtung jeder Kante der Menge A invertiert wird.

Wir haben gesehen, dass jedes Feedback Set ein Feedback Arc Set ist, umgekehrt gilt dies im Allgemeinen jedoch nicht. Für minimale Mengen gilt die Äquivalenz: Zeigen Sie, dass die Lösungsmengen der beiden Probleme identisch sind.

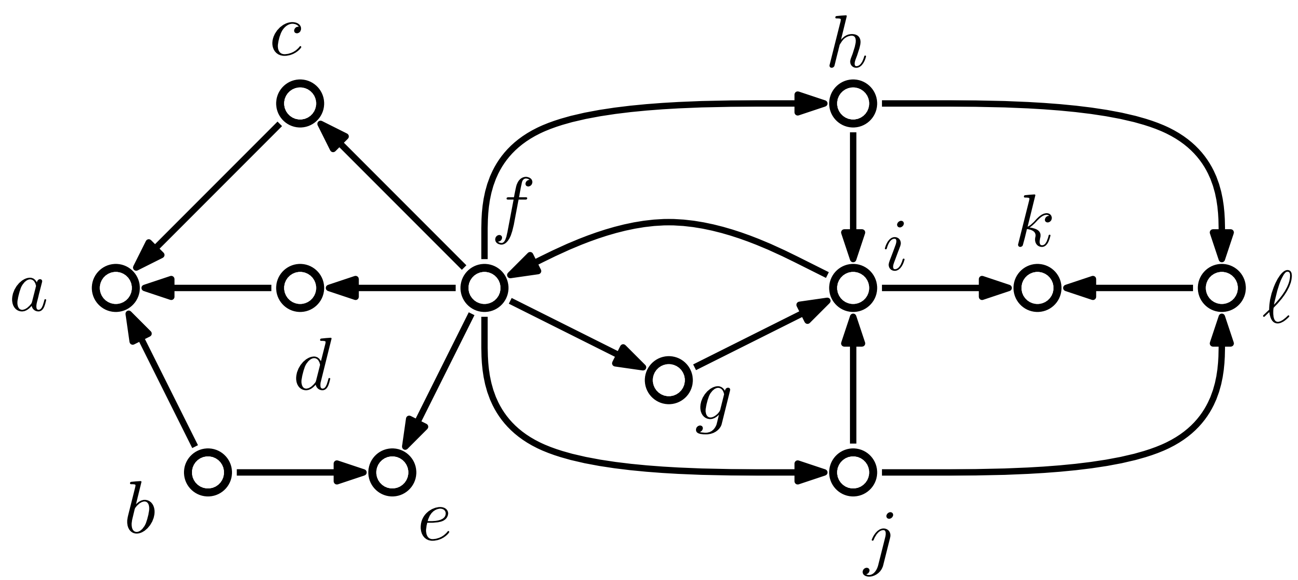
Aufgabe 6 – Lagenlayout

Führen Sie den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zur Generierung von Lagenlayouts schrittweise für den untenstehenden Graphen aus. Entfernen Sie dazu gerichtete Kreise indem Sie für eine möglichst kleine Menge an Kanten die Richtung umkehren, finden Sie eine Lagenzuordnung minimaler Höhe bei maximaler Breite 4 und ordnen sie die Knoten innerhalb der Lagen so an, dass die Anzahl an Kreuzungen minimal ist.



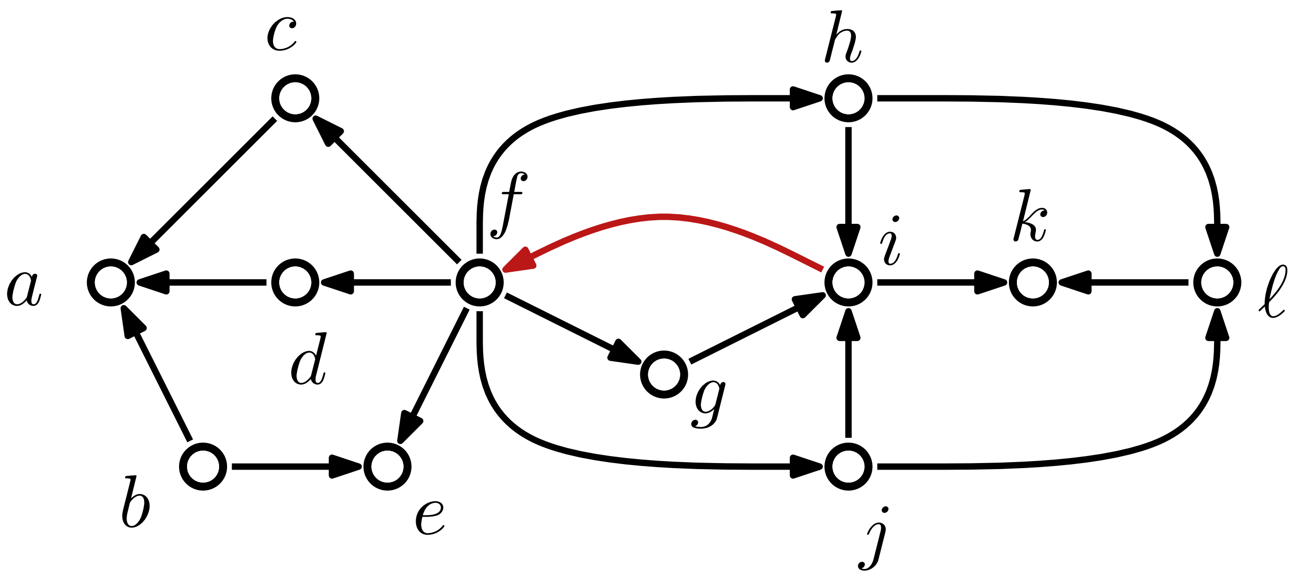
Lagenlayout – 1. FAS

Finde $E' \subseteq E$ sodass $G - E'$ azyklisch und $|E'|$ minimal (FAS)



Lagenlayout – 1. FAS

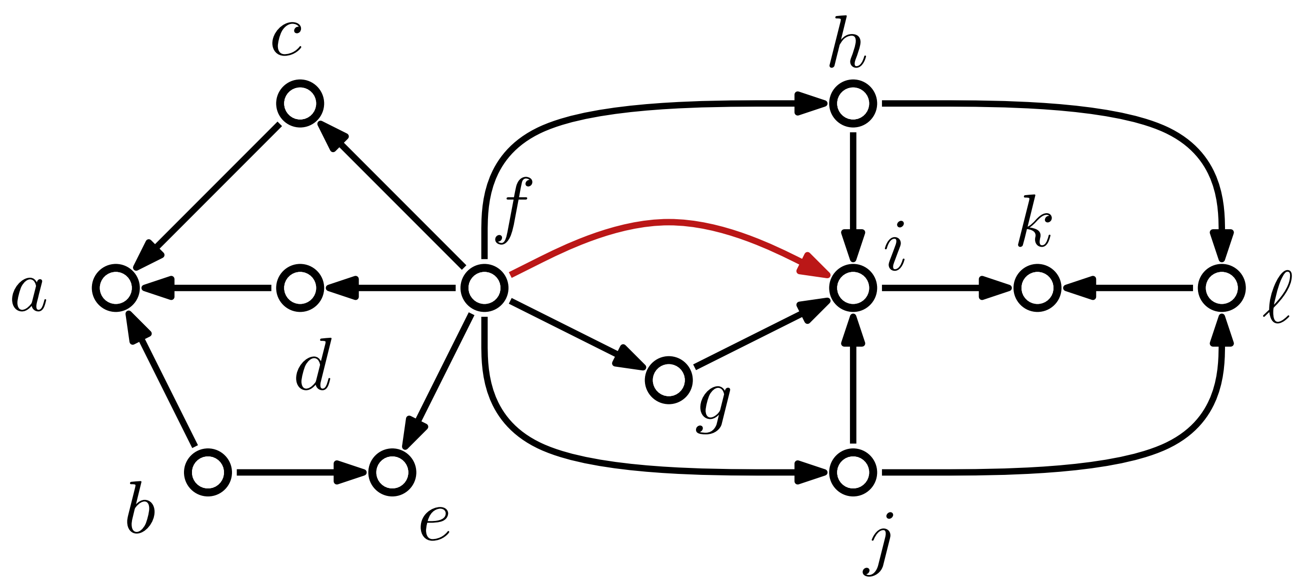
Finde $E' \subseteq E$ sodass $G - E'$ azyklisch und $|E'|$ minimal (FAS)



Lagenlayout – 1. FAS

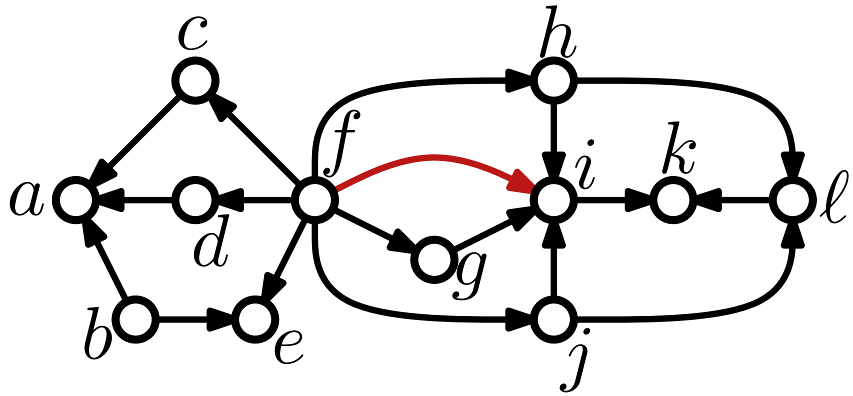
Finde $E' \subseteq E$ sodass $G - E'$ azyklisch und $|E'|$ minimal (FAS)

Kehre die Orientierung der Kanten in E' um



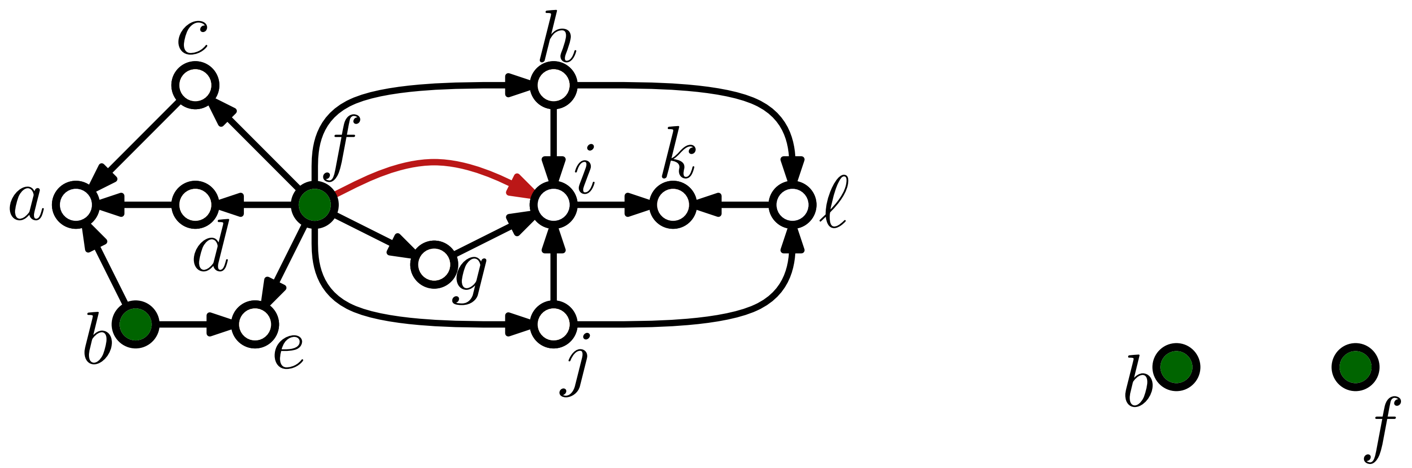
Lagenlayout – 2. Lagenzuordnung

Lagenzuordnung min. Höhe: iteratives Löschen von Quellen

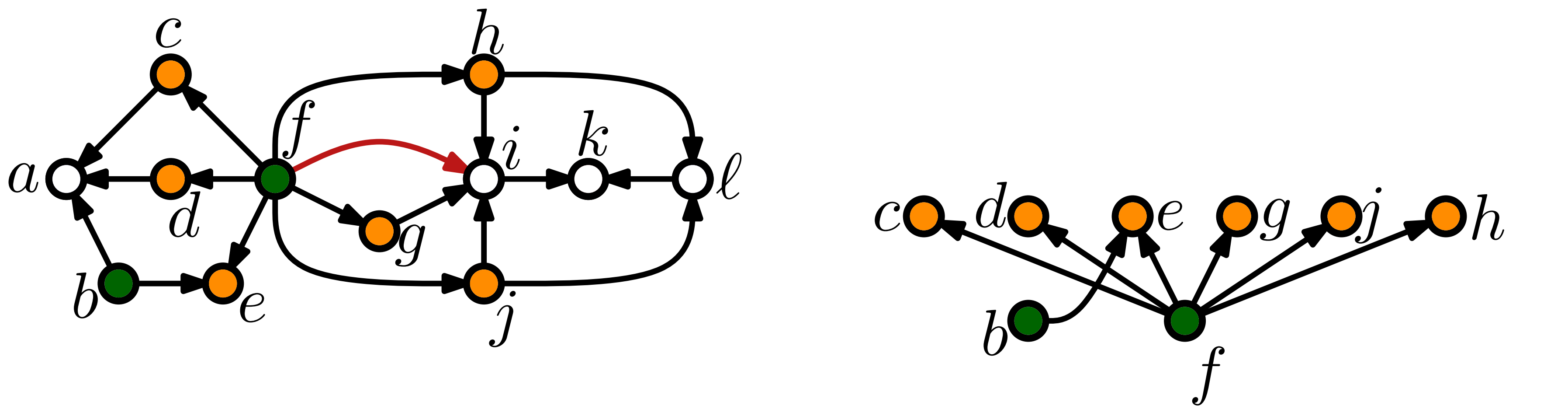


Lagenlayout – 2. Lagenzuordnung

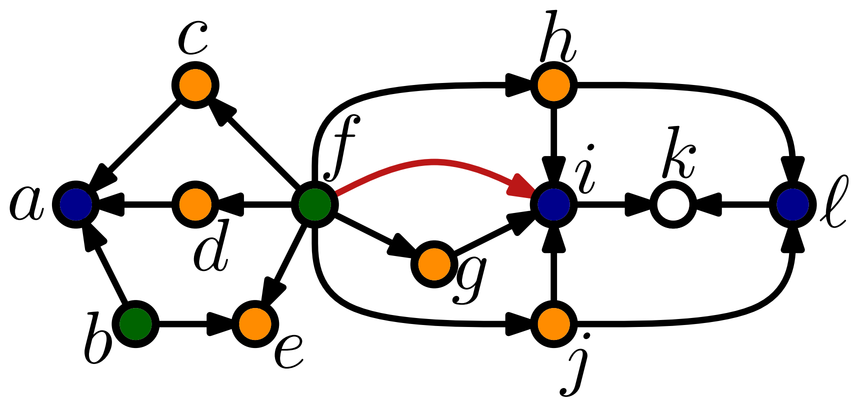
Lagenzuordnung min. Höhe: iteratives Löschen von Quellen

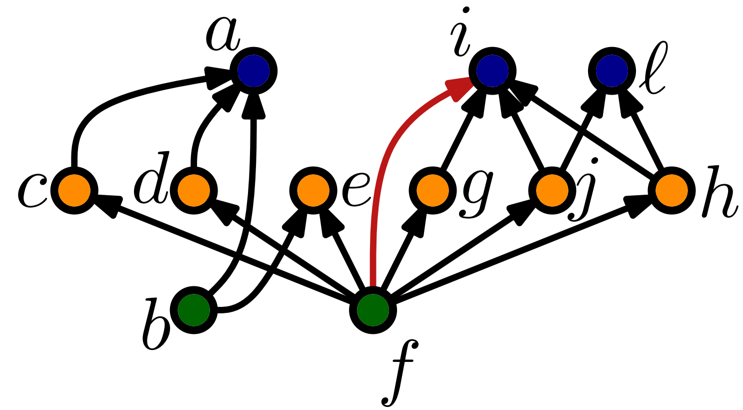


Lagenzuordnung min. Höhe: iteratives Löschen von Quellen



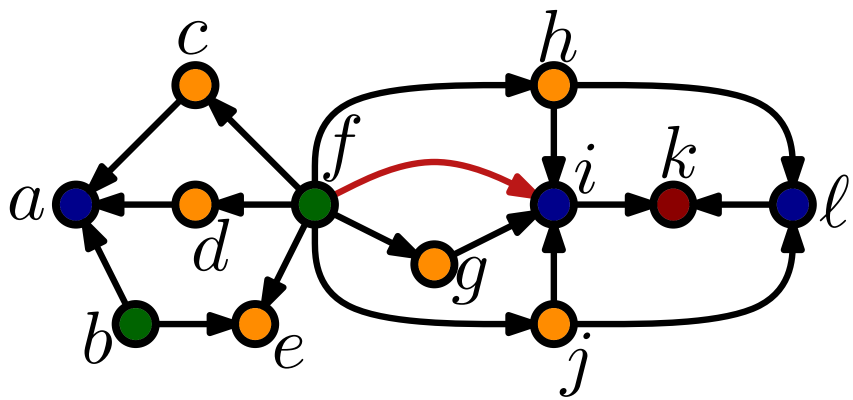
Lagenzuordnung min. Höhe: iteratives Löschen von Quellen

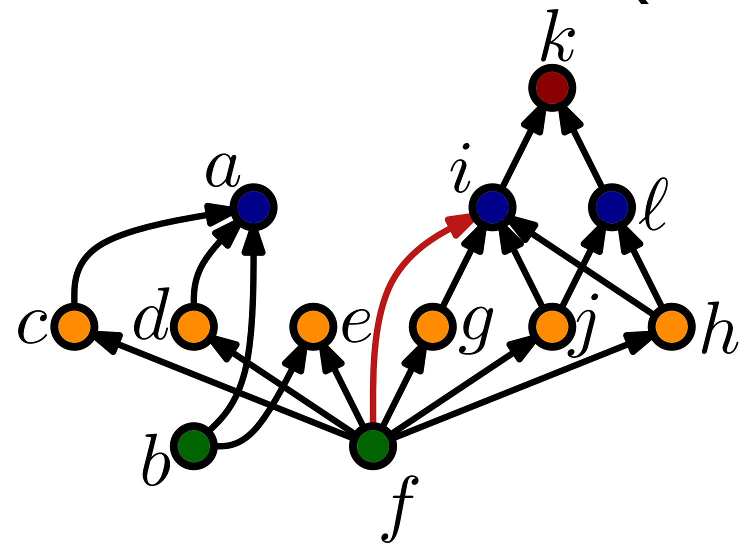




Lagenlayout – 2. Lagenzuordnung

Lagenzuordnung min. Höhe: iteratives Löschen von Quellen

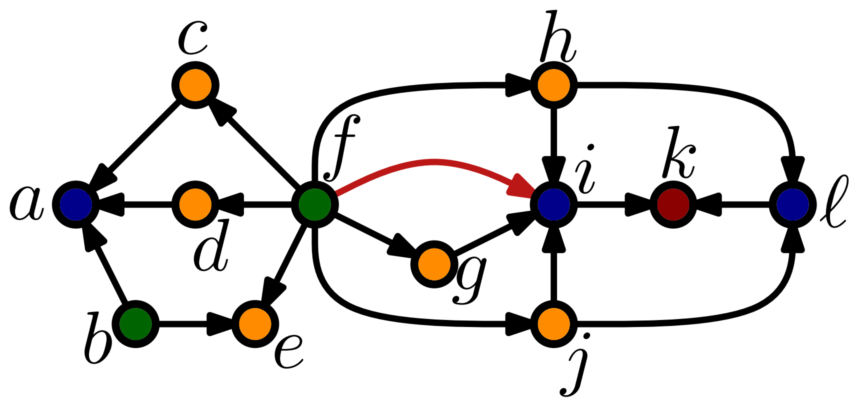


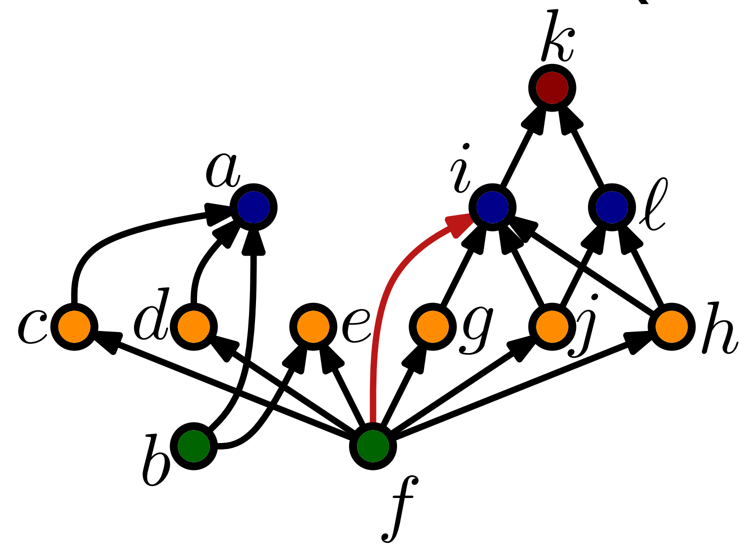


Lagenlayout – 2. Lagenzuordnung

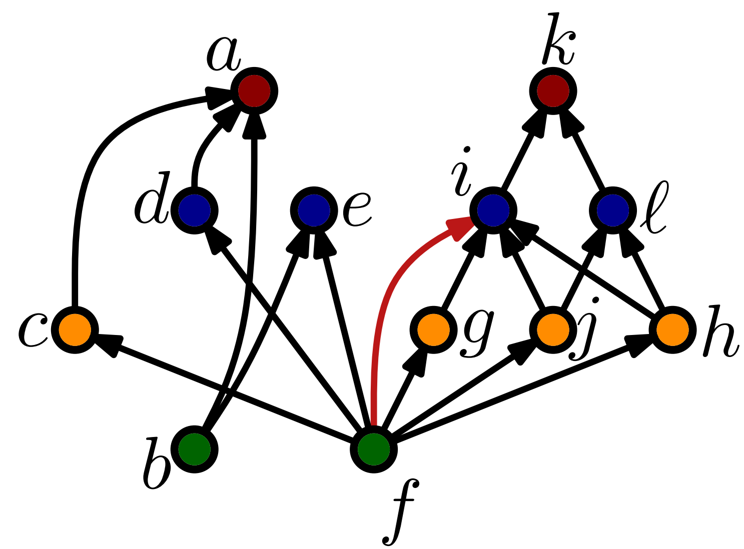
Karlsruhe Institute of Technology

Lagenzuordnung min. Höhe: iteratives Löschen von Quellen



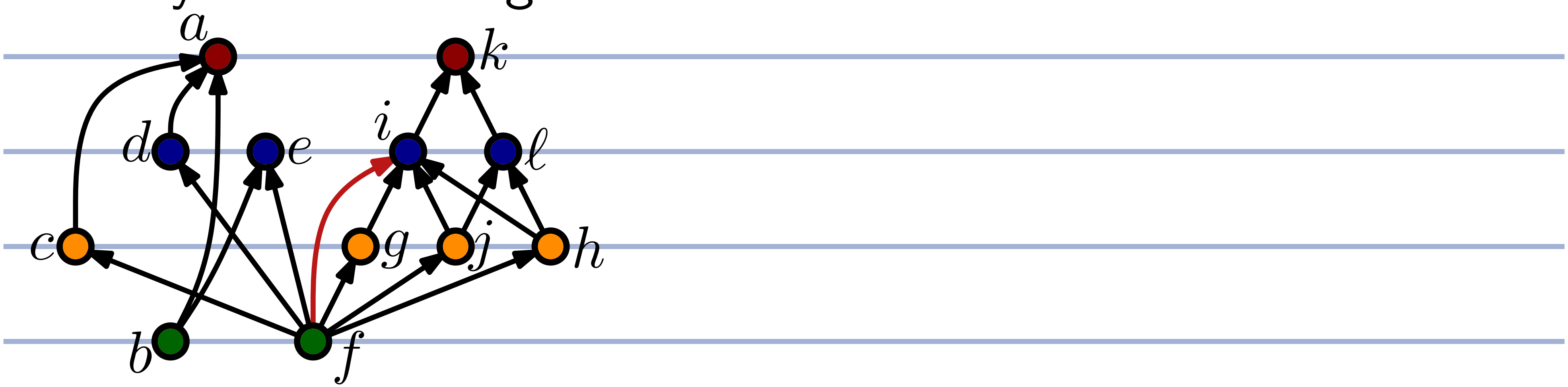


Min Höhe bei auf 4 beschränkter Breite: genaues hinschauen



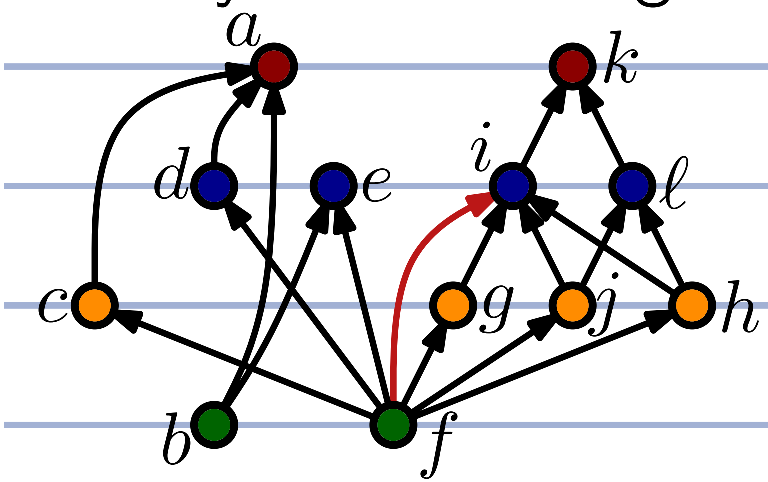
Lagenlayout – 3. Kreuzungsminimierung

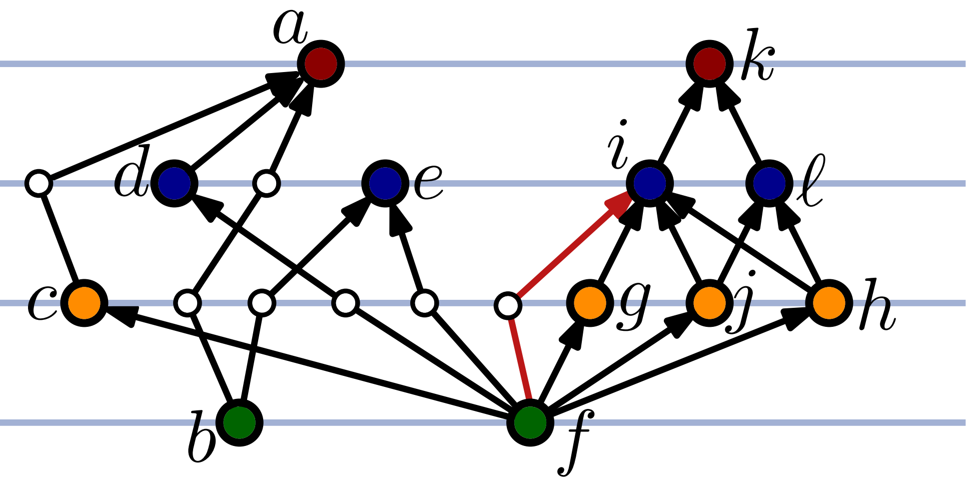
Dummyknoten einfügen



Lagenlayout – 3. Kreuzungsminimierung

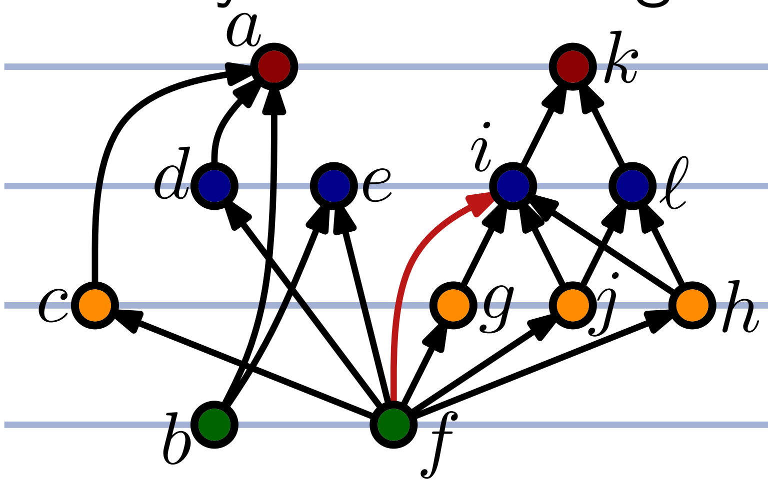
Dummyknoten einfügen

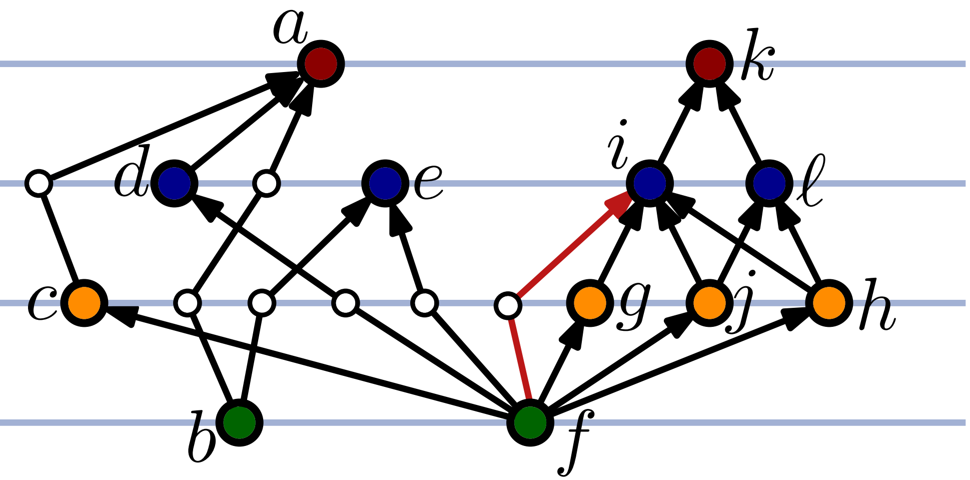




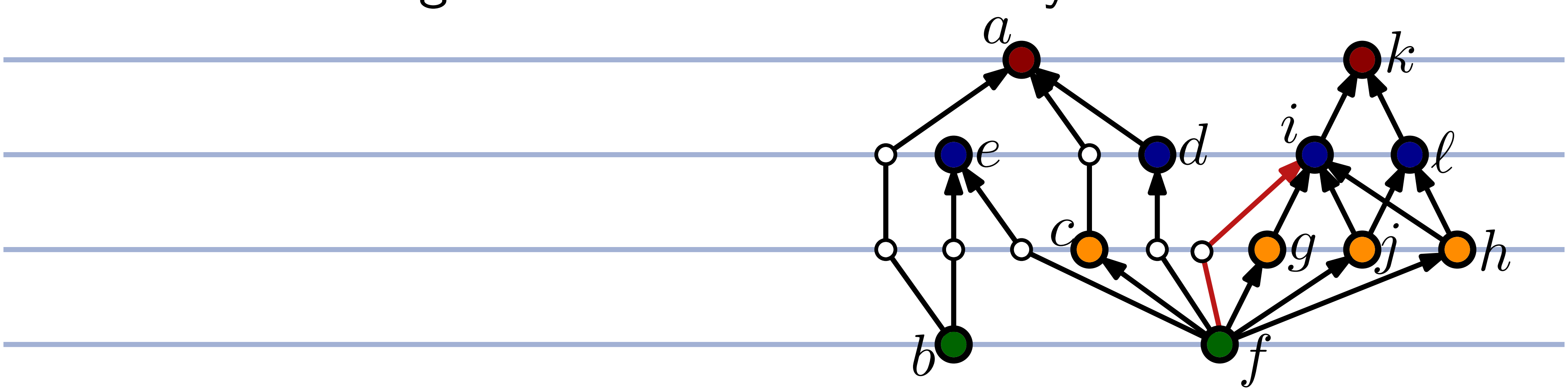
Lagenlayout – 3. Kreuzungsminimierung

Dummyknoten einfügen



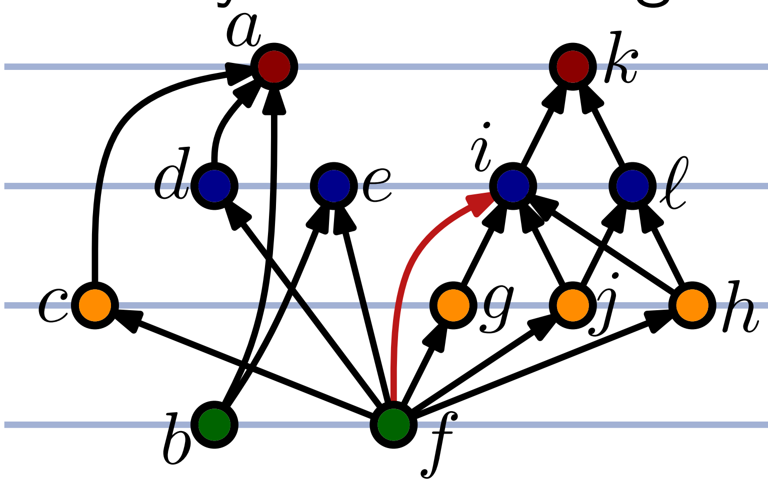


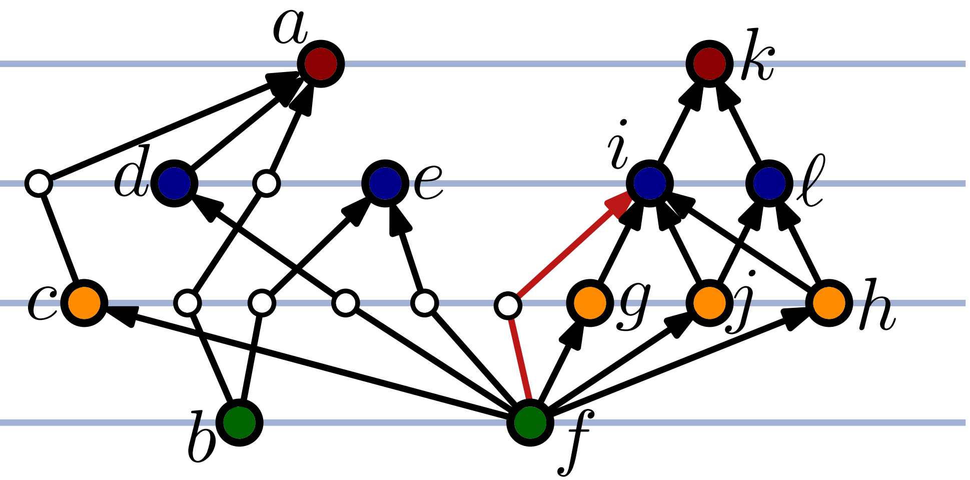
Knickminimierung und löschen der Dummyknoten



Lagenlayout – 3. Kreuzungsminimierung

Dummyknoten einfügen





Knickminimierung und löschen der Dummyknoten