Algorithmen II
Vorlesung am 28.01.2014

Parametrisierte Algorithmen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Wiederholung

FPT - Wiederholung

Definition: Fixed Parameter Tractable **(Definition 10.1)**
Ein parametrisiertes Problem Π heißt *fixed parameter tractable*, wenn es in $O(\mathcal{C}(k) \cdot p(n))$ gelöst werden kann. Dabei ist n die Eingabegröße, p ein Polynom, k der Parameter und $\mathcal{C}$ eine berechenbare Funktion, die nur von k abhängt.

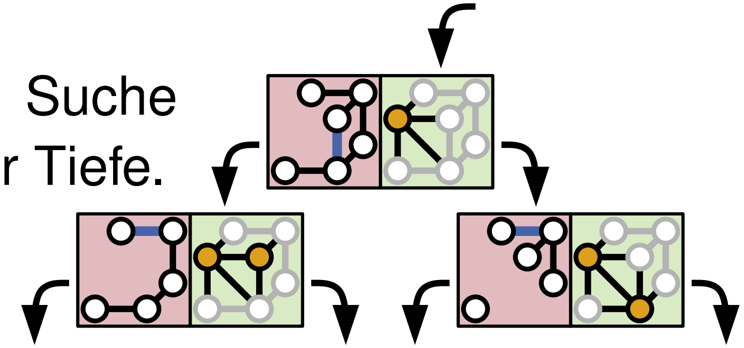
Zwei Techniken:

1. Kernbildung: Reduziere die Instanz durch Anwendung verschiedener Regeln auf einen (schweren) Problemkern.

Konkreter:

- Reduziere Instanz $(\mathcal{I}, k)$ in $O(p(|\mathcal{I}|))$ Zeit auf eine äquivalente Instanz $\mathcal{I}'$, sodass $|\mathcal{I}'|$ nur von k (und nicht von $|\mathcal{I}|$) abhängt.
- Löse $\mathcal{I}'$ mit erschöpfender Suche.

2. Tiefenbeschränkte Suchbäume: Erschöpfende Suche in einem geeigneten Suchbaum mit beschränkter Tiefe.

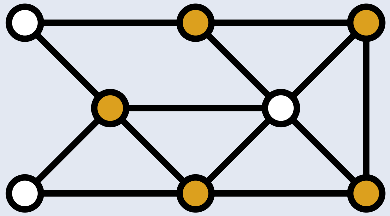


Kernbildung mit Linearer Programmierung

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Vertex Cover als ILP

Problem: Vertex Cover
Finde *Vertex Cover* $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$. V' heißt Vertex Cover genau dann, wenn für jede Kante $\{v, w\} \in E$ gilt $v \in V'$ oder $w \in V'$. (ist $\mathcal{NP}$-Schwer)



Formulierung als ILP:

- Eine Variable x_v für jeden Knoten $v \in V$.
  $\rightarrow x_v = 1$ bedeutet $v \in V'$, $x_v = 0$ bedeutet $v \notin V'$.
- Minimiere also

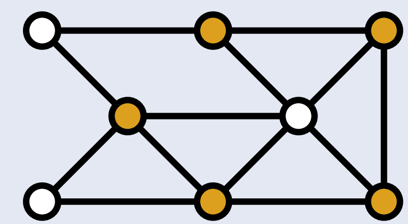
$$\sum_{x \in V} x_v$$

  unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_v &\in \{0, 1\} && \text{für alle } v \in V \\ x_v + x_w &\geq 1 && \text{für alle } \{v, w\} \in E \end{aligned}$$

VERTEX COVER als ILP

Problem: VERTEX COVER
Finde *Vertex Cover* $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$. V' heißt Vertex Cover genau dann, wenn für jede Kante $\{v, w\} \in E$ gilt $v \in V'$ oder $w \in V'$. (ist $\mathcal{NP}$-Schwer)



Formulierung als ILP:

- Eine Variable x_v für jeden Knoten $v \in V$.
  $\rightarrow x_v = 1$ bedeutet $v \in V'$, $x_v = 0$ bedeutet $v \notin V'$.
- Minimiere also

$$\sum_{x \in V} x_v$$

  unter den Nebenbedingungen

$$x_v \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } v \in V$$
$$x_v + x_w \geq 1 \qquad \text{für alle } \{v, w\} \in E$$

Relaxierung des ILP's:
Ersetze Bedingung $x_v \in \{0, 1\}$ durch $0 \leq x_v \leq 1$.

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**

Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Sei $(x_v)_{v \in V}$ eine optimale Lösung des LP.
- Ziel: finde Lösung $(x_v^\star)_{v \in V}$ gleicher Größe mit $x_v^\star \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Sei $(x_v)_{v \in V}$ eine optimale Lösung des LP.
- Ziel: finde Lösung $(x_v^\star)_{v \in V}$ gleicher Größe mit $x_v^\star \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

Definiere:

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x_v' = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x_v'' = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Sei $(x_v)_{v \in V}$ eine optimale Lösung des LP.
- Ziel: finde Lösung $(x_v^\star)_{v \in V}$ gleicher Größe mit $x_v^\star \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

Definiere:

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x_v' = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x_v'' = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptung:

(i) $(x_v')_{v \in V}$ und $(x_v'')_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

(ii) $\sum\limits_{v \in V} x_v = \sum\limits_{v \in V} x_v' = \sum\limits_{v \in V} x_v''$

(iii) $(x_v')_{v \in V}$ oder $(x_v'')_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

$\Rightarrow$ Nach maximal n Schritten erhält man die gewünschte Lösung $(x_v^\star)_{v \in V}$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (i) $(x'_v)_{v \in V}$ und $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (i) $(x'_v)_{v\in V}$ und $(x''_v)_{v\in V}$ sind Lösungen des LP.

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (i) $(x'_v)_{v \in V}$ und $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug $\quad$ $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- Sei $\{v, w\} \in E$ und sei o.B.d.A. $x_v \leq x_w$.

Fallunterscheidung nach x_v:

- $x_v = 0$
- $0 < x_v < \frac{1}{2}$
- $x_v \geq \frac{1}{2}$

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (i) $(x'_v)_{v \in V}$ und $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug
  $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- Sei $\{v, w\} \in E$ und sei o.B.d.A. $x_v \leq x_w$.

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_v:

- $x_v = 0 \Rightarrow x_w = 1 \Rightarrow x'_w = 1$ und $x''_w = 1$.
- $0 < x_v < \frac{1}{2}$
- $x_v \geq \frac{1}{2}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (i) $(x'_v)_{v \in V}$ und $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug $\qquad$ $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- Sei $\{v, w\} \in E$ und sei o.B.d.A. $x_v \leq x_w$.

Fallunterscheidung nach x_v:

- $x_v = 0 \Rightarrow x_w = 1 \Rightarrow x'_w = 1$ und $x''_w = 1$.
- $0 < x_v < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_w = 1 \Rightarrow x'_w = 1 \text{ und } x''_w = 1. \\ \text{oder } \frac{1}{2} < x_w < 1 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow x'_v + x'_w = x_v + \varepsilon + x_w - \varepsilon = x_v + x_w \geq 1$$
$$\Rightarrow x''_v + x''_w = x_v - \varepsilon + x_w + \varepsilon = x_v + x_w \geq 1$$

- $x_v \geq \frac{1}{2}$

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (i) $(x'_v)_{v \in V}$ und $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

- Zu zeigen: $0 \leq x'_v, x''_v \leq 1$ für alle $v \in V$ und $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
  klar, da ε klein genug; $x''_v + x''_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$
- Sei $\{v, w\} \in E$ und sei o.B.d.A. $x_v \leq x_w$.

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fallunterscheidung nach x_v:

- $x_v = 0 \Rightarrow x_w = 1 \Rightarrow x'_w = 1$ und $x''_w = 1$.
- $0 < x_v < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_w = 1 \Rightarrow x'_w = 1 \text{ und } x''_w = 1. \\ \text{oder } \frac{1}{2} < x_w < 1 \end{array} \right.$

  $\Rightarrow x'_v + x'_w = x_v + \varepsilon + x_w - \varepsilon = x_v + x_w \geq 1$

  $\Rightarrow x''_v + x''_w = x_v - \varepsilon + x_w + \varepsilon = x_v + x_w \geq 1$
- $x_v \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x'_v, x'_w \geq \frac{1}{2}$ und $x''_v, x''_w \geq \frac{1}{2}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (ii) $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- Offensichtlich gilt für alle $v \in V$:

$$x_v = \frac{1}{2}\left(x'_v + x''_v\right)$$

- Und damit auch:

$$\underbrace{\sum_{v \in V} x_v}_{\text{Gesamtkosten von } (x_v)_{v \in V}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{v \in V} x'_v}_{\text{Gesamtkosten von } (x'_v)_{v \in V}} + \underbrace{\sum_{v \in V} x''_v}_{\text{Gesamtkosten von } (x''_v)_{v \in V}}\right)$$

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (ii) $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

- Offensichtlich gilt für alle $v \in V$:

$$x_v = \frac{1}{2}\left(x'_v + x''_v\right)$$

- Und damit auch:

$$\underbrace{\sum_{v \in V} x_v}_{\text{Gesamtkosten von } (x_v)_{v \in V}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{v \in V} x'_v}_{\text{Gesamtkosten von } (x'_v)_{v \in V}} + \underbrace{\sum_{v \in V} x''_v}_{\text{Gesamtkosten von } (x''_v)_{v \in V}}\right)$$

- Aus der Optimalität der Lösung $(x_v)_{v \in V}$ folgt:

$$\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$$

- $\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Behauptung (iii) $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

- Falls $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, dann auch $x'_v, x''_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
  $\rightarrow$ es geht also keine Variable „verloren“
- Aus der Wahl von ε folgt, dass mindestens eine Variable „hinzu kommt“.

- $\varepsilon = \min\limits_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \{|x_v|, |x_v - \frac{1}{2}|, |x_v - 1|\}$
- $x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$
- $x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$

Fast ganzzahlige Lösung

Lemma: Fast ganzzahlige Lösung **(Lemma 10.8)**
Das relaxierte LP hat eine optimale Lösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$. Eine solche Lösung kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beweis:

- Sei $(x_v)_{v \in V}$ eine optimale Lösung des LP.
- Ziel: finde Lösung $(x_v^\star)_{v \in V}$ gleicher Größe mit $x_v^\star \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

Definiere:

- $$\varepsilon = \min_{x_v \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}} \left\{ |x_v|, |x_v - \tfrac{1}{2}|, |x_v - 1| \right\}$$
- $$x'_v = \begin{cases} x_v + \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$
- $$x''_v = \begin{cases} x_v - \varepsilon & \text{falls } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \varepsilon & \text{falls } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: $\leftarrow$ gerade bewiesen

(i) $(x'_v)_{v \in V}$ und $(x''_v)_{v \in V}$ sind Lösungen des LP.

(ii) $\sum_{v \in V} x_v = \sum_{v \in V} x'_v = \sum_{v \in V} x''_v$

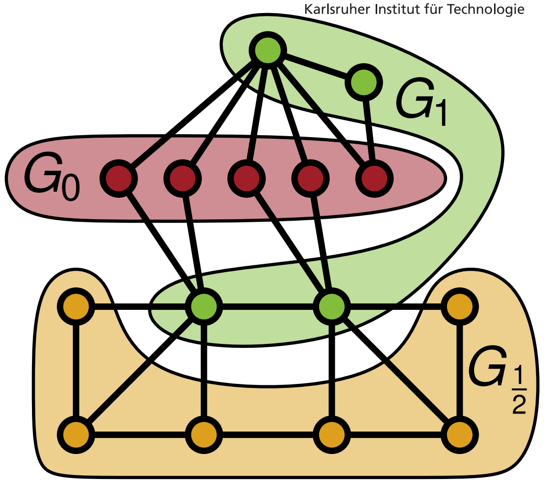
(iii) $(x'_v)_{v \in V}$ oder $(x''_v)_{v \in V}$ enthält weniger Variablen, die nicht in $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ sind als $(x_v)_{v \in V}$

$\Rightarrow$ Nach maximal n Schritten erhält man die gewünschte Lösung $(x_v^\star)_{v \in V}$.

Der Kern des Problems

Betrachte Optimallösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

- Sei $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
- Sei G_r der von V_r induzierte Graph.



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: später

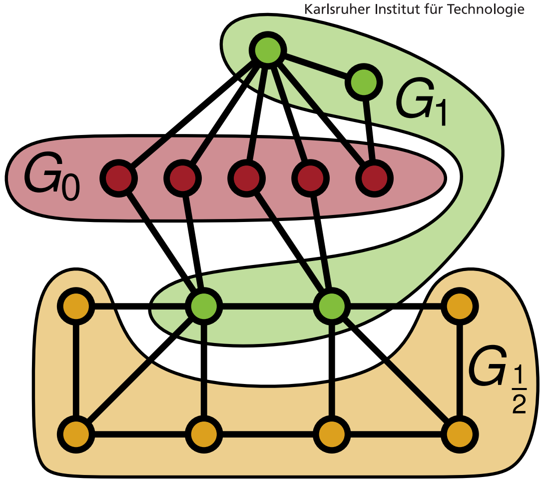
Interpretation: $G_{\frac{1}{2}}$ bildet den *Problemkern*

- Optimale Lösung für $G_{\frac{1}{2}}$ zusammen mit V_1 ist optimale Lösung für G **(ii)**.
- Entweder $G_{\frac{1}{2}}$ ist klein oder die optimale Lösung ist (zu) groß **(i)**.

Der Kern des Problems

Betrachte Optimallösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

- Sei $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
- Sei G_r der von V_r induzierte Graph.



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: später

Interpretation: $G_{\frac{1}{2}}$ bildet den *Problemkern*

- Optimale Lösung für $G_{\frac{1}{2}}$ zusammen mit V_1 ist optimale Lösung für G **(ii)**.
- Entweder $G_{\frac{1}{2}}$ ist klein oder die optimale Lösung ist (zu) groß **(i)**.

$\mathcal{A}(G = (V, E), k)$

Berechne Lösung des LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$k' \leftarrow k - |V_1|$

if $|V_{\frac{1}{2}}| > 2k'$ **then return** Es gibt kein VERTEX COVER der Größe k in G

$S' \leftarrow$ minimales VERTEX COVER für $G_{\frac{1}{2}}$

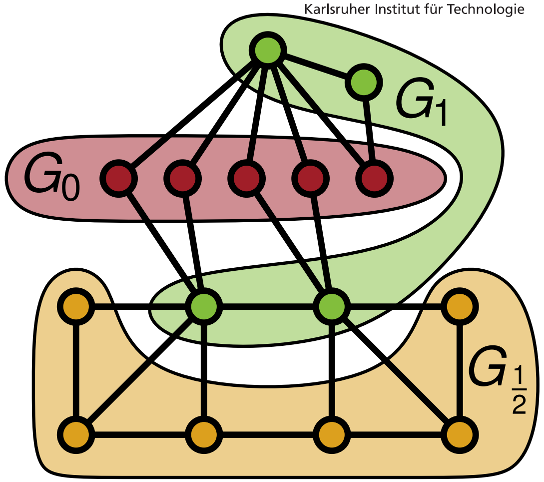
return $S' \cup V_1$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems

Betrachte Optimallösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

- Sei $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
- Sei G_r der von V_r induzierte Graph.



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: später

Interpretation: $G_{\frac{1}{2}}$ bildet den *Problemkern*

- Optimale Lösung für $G_{\frac{1}{2}}$ zusammen mit V_1 ist optimale Lösung für G **(ii)**.
- Entweder $G_{\frac{1}{2}}$ ist klein oder die optimale Lösung ist (zu) groß **(i)**.

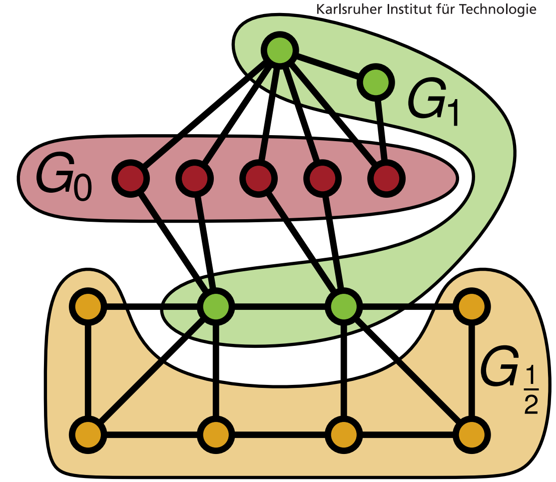
$\mathcal{A}(G = (V, E), k)$	$\mathcal{A}$ ist FPT-Algorithmus
Berechne Lösung des LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$	polynomiell in n
$k' \leftarrow k - |V_1|$ **if** $|V_{\frac{1}{2}}| > 2k'$ **then return** Es gibt kein Vertex Cover der Größe k in G	$O(1)$
$S' \leftarrow$ minimales Vertex Cover für $G_{\frac{1}{2}}$	exponentiell in $|V_{\frac{1}{2}}| \leq 2k' \leq 2k$
return $S' \cup V_1$	$O(1)$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems

Betrachte Optimallösung mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $v \in V$.

- Sei $V_r = \{v \in V \mid x_v = r\}$ für $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
- Sei G_r der von V_r induzierte Graph.



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: später

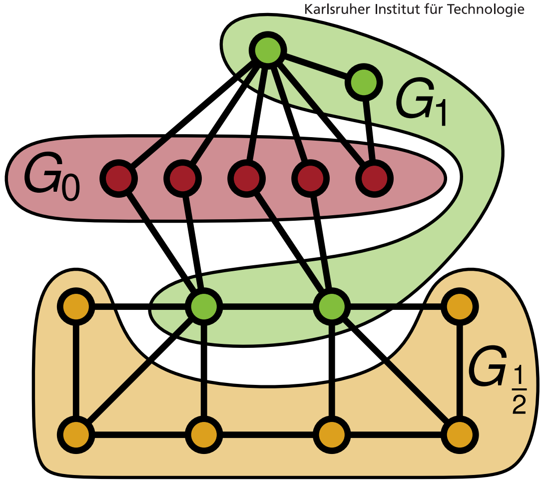
Interpretation: $G_{\frac{1}{2}}$ bildet den *Problemkern*

- Optimale Lösung für $G_{\frac{1}{2}}$ zusammen mit V_1 ist optimale Lösung für G **(ii)**.
- Entweder $G_{\frac{1}{2}}$ ist klein oder die optimale Lösung ist (zu) groß **(i)**.

$\mathcal{A}(G = (V, E), k)$	**Kernbildung** – Allgemeine Lösungsstrategie:
Berechne Lösung des LP mit $x_v \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$	löse „leichten“ Teil der Instanz; übrig bleibt der Kern
$k' \leftarrow k - \lvert V_1 \rvert$	es gibt keine Lösung, wenn der Kern zu groß ist
if $\lvert V_{\frac{1}{2}} \rvert > 2k'$ **then return** Es gibt kein VERTEX COVER der Größe k in G	
$S' \leftarrow$ minimales VERTEX COVER für $G_{\frac{1}{2}}$	löse kleinen Kern optimal (ggf. Brute Force)
return $S' \cup V_1$	kombiniere Lösung des Kerns mit „leichtem“ Teil

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r ($r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$)

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G

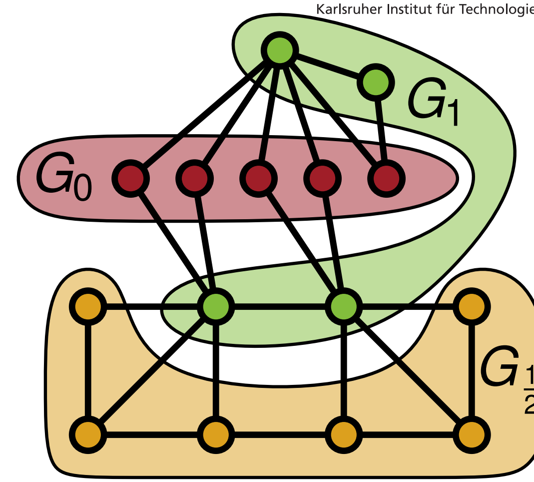
Der Kern des Problems – Beweis

Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc($\cdot$) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$



Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

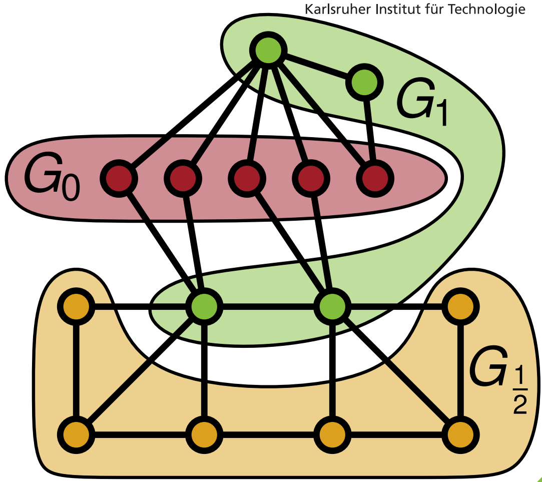
(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r ($r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$)

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G

Zu (a): Sei $\{v, w\} \in E_r$ eine Kante in G_r

- Dann ist $v \in S$ oder $w \in S$ und damit $v \in S_r$ oder $w \in S_r$.

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc($\cdot$) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r $(r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ ✓

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G ✓

Zu (a): Sei $\{v, w\} \in E_r$ eine Kante in G_r

- Dann ist $v \in S$ oder $w \in S$ und damit $v \in S_r$ oder $w \in S_r$.

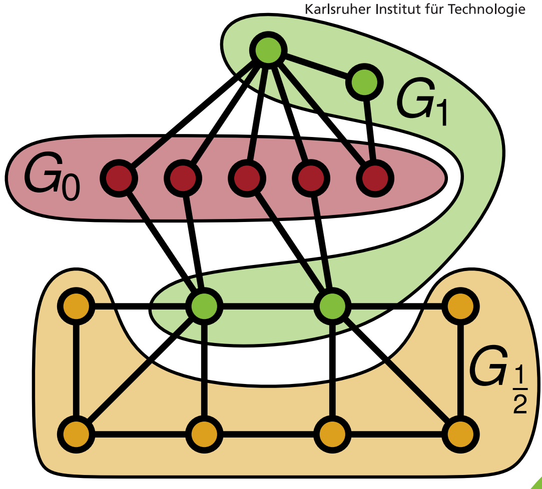
Zu (b): Sei $\{v, w\} \in E$ eine Kante in G

- Fall 1: $v \in V_1$ oder $w \in V_1$ $\Rightarrow$ e wird durch Knoten in V_1 abgedeckt.
- Fall 2: $v \in V_{\frac{1}{2}}$ und $w \in V_{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ e wird durch Knoten in S' abgedeckt.
- Weitere Fälle können nicht auftreten, da sonst $x_v + x_w < 1$

$\Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\text{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\text{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \text{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r $(r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\})$

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G

Sei S' minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$, also $|S'| = \text{vc}(G_{\frac{1}{2}})$. Es folgt:

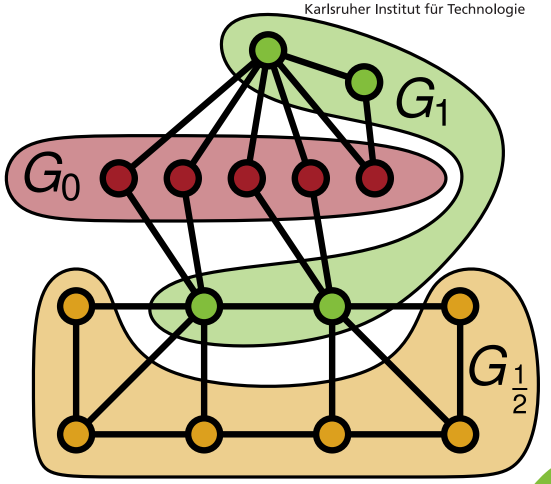
$$|S'| + |V_1| \geq \text{vc}(G) \geq \sum_{v \in V} x_v = \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| + |V_1|$$

Aus **(b)** folgt: $S' \cup V_1$ ist Vertex Cover.
$S' \cup V_1$ ist nicht kleiner als Optimum

Optimum ist nicht kleiner als LP-Lösung

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r $(r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\})$

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G

Sei S' minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$, also $|S'| = \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}})$. Es folgt:

$$|S'| + |V_1| \geq \mathrm{vc}(G) \geq \sum_{v \in V} x_v = \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| + |V_1|$$

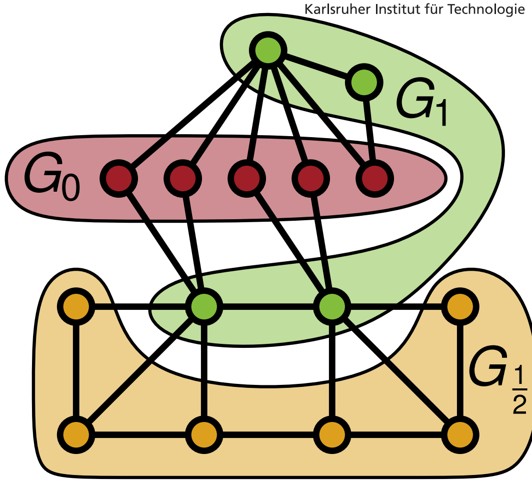
Aus **(b)** folgt: $S' \cup V_1$ ist Vertex Cover. $S' \cup V_1$ ist nicht kleiner als Optimum

Optimum ist nicht kleiner als LP-Lösung

Umstellen ergibt Aussage **(i)**:

$$\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = |S'| \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$$

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r $(r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ ✓

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G ✓

Sei S' minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$, also $|S'| = \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}})$. Es folgt:

$$\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |V_1| = |S'| + |V_1| \geq \mathrm{vc}(G)$$

Aus **(b)** folgt: $S' \cup V_1$ ist Vertex Cover.
$S' \cup V_1$ ist nicht kleiner als Optimum

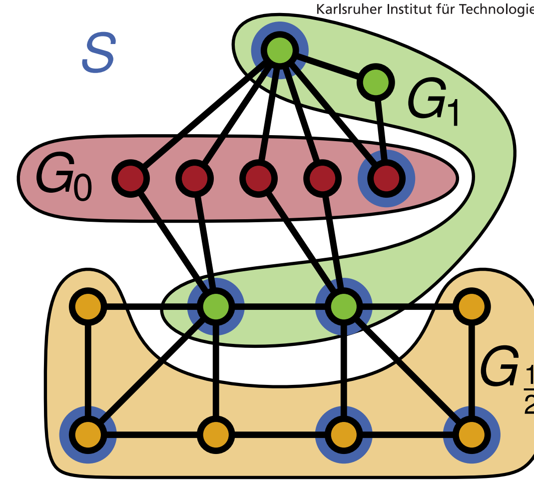
$$\mathrm{vc}(G) \geq \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |V_1|$$

noch zu zeigen, damit **(ii)** gilt

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis

Karlsruher Institut für Technologie



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r $(r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\})$

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G

Sei S' minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$, also $|S'| = \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}})$. Es folgt:

$$\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |V_1| = |S'| + |V_1| \geq \mathrm{vc}(G)$$

Aus **(b)** folgt: $S' \cup V_1$ ist Vertex Cover.
$S' \cup V_1$ ist nicht kleiner als Optimum

$$\mathrm{vc}(G) \geq \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |V_1|$$

noch zu zeigen, damit **(ii)** gilt

Sei S minimales Vertex Cover von G, also $|S| = \mathrm{vc}(G)$. Es folgt:

$$\mathrm{vc}(G) = |S| = |S_{\frac{1}{2}}| + |S_0| + |S_1| \geq \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |S_0| + |S_1|$$

Aus **(a)** folgt: $S_{\frac{1}{2}}$ ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$ und damit nicht kleiner als Optimum

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

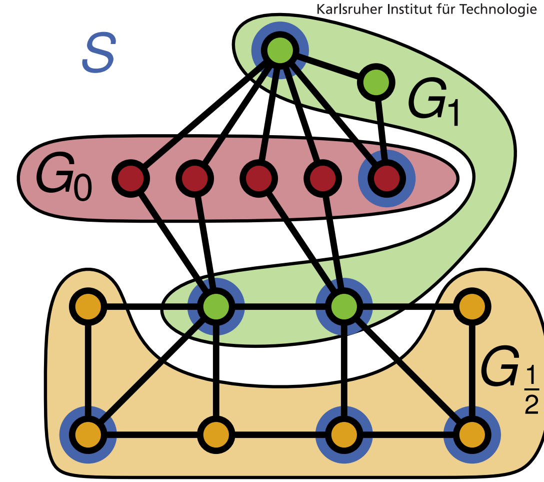
Der Kern des Problems – Beweis

Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$



Beweis: Zeige zunächst folgende Aussagen:

(a) S ist Vertex Cover von $G \Rightarrow S_r = S \cap V_r$ ist Vertex Cover von G_r $(r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\})$

(b) S' ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}} \Rightarrow S' \cup V_1$ ist Vertex Cover von G

Sei S' minimales Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$, also $|S'| = \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}})$. Es folgt:

$$\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |V_1| = |S'| + |V_1| \geq \mathrm{vc}(G)$$

Aus **(b)** folgt: $S' \cup V_1$ ist Vertex Cover.
$S' \cup V_1$ ist nicht kleiner als Optimum

$$\mathrm{vc}(G) \geq \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + |V_1|$$

noch zu zeigen, damit **(ii)** gilt

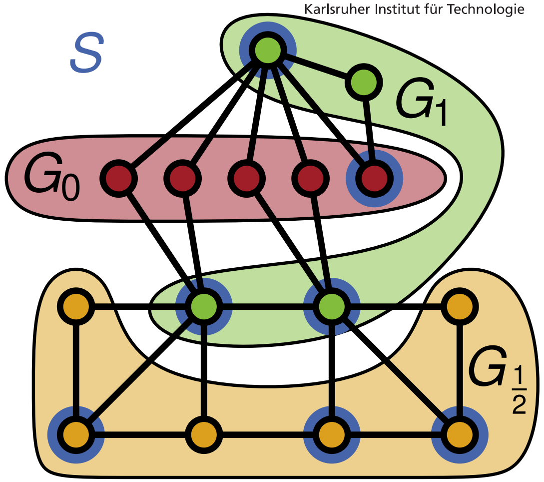
Sei S minimales Vertex Cover von G, also $|S| = \mathrm{vc}(G)$. Es folgt:

$$\mathrm{vc}(G) = |S| = |S_{\frac{1}{2}}| + |S_0| + |S_1| \geq \mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) + \underbrace{|S_0| + |S_1|}_{\geq |V_1|?}$$

Aus **(a)** folgt: $S_{\frac{1}{2}}$ ist Vertex Cover von $G_{\frac{1}{2}}$ und damit nicht kleiner als Optimum

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

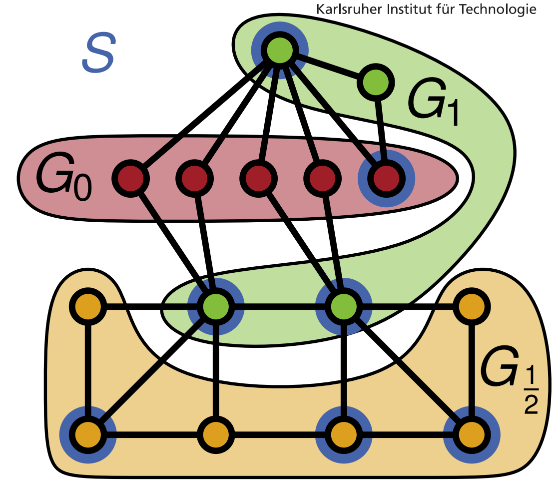
(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Sei S minimales Vertex Cover von G

Nur noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S_0| + |S_1|$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2} |V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Sei S minimales Vertex Cover von G

Nur noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S_0| + |S_1|$

Definiere $(x'_v)_{v \in V}$ wie folgt:

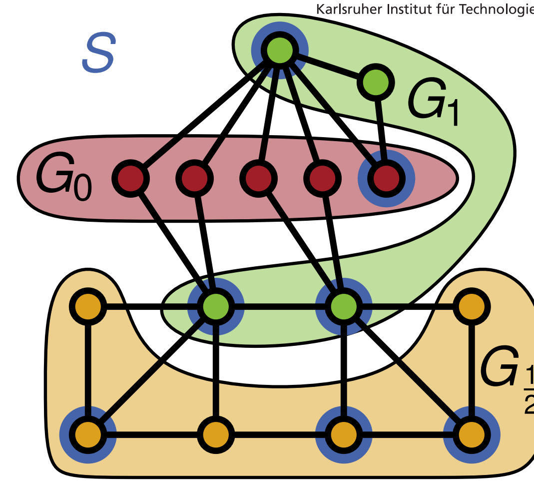
$$x'_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in S_1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S_1 \\ & \text{oder } v \in V_{\frac{1}{2}} \\ & \text{oder } v \in S_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung:

$(x'_v)_{v \in V}$ ist Lösung des LP

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Sei S minimales Vertex Cover von G

Nur noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S_0| + |S_1|$

Definiere $(x'_v)_{v \in V}$ wie folgt:

$$x'_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in S_1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S_1 \\ & \text{oder } v \in V_{\frac{1}{2}} \\ & \text{oder } v \in S_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung:

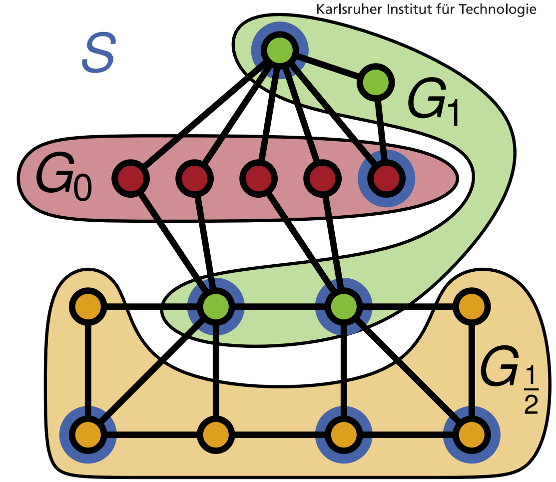
$(x'_v)_{v \in V}$ ist Lösung des LP

Beweis der Behauptung:

Zu zeigen: $x'_v + x'_w \geq 1$ für alle $\{v, w\} \in E$

- Fall 1: $v, w \in V_1 \cup V_{\frac{1}{2}} \cup S_0 \Rightarrow x'_v, x'_w \geq \frac{1}{2}$
  $\Rightarrow x'_v + x'_w \geq 1$
- Fall 2: $v \in V_0 \setminus S_0 \Rightarrow w \in S_1 \Rightarrow x'_v + x'_w = 1$
- Fall 3: $w \in V_0 \setminus S_0 \Rightarrow v \in S_1 \Rightarrow x'_v + x'_w = 1$
  (symmetrisch zu Fall 2)

Der Kern des Problems – Beweis



Lemma: Problemkern **(Lemma 10.9)**

Für den Wert vc(·) eines optimalen Vertex Covers gilt:

(i) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}|$

(ii) $\mathrm{vc}(G_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{vc}(G) - |V_1|$

Beweis: Sei S minimales Vertex Cover von G

Nur noch zu zeigen: $|V_1| \leq |S_0| + |S_1|$

Definiere $(x'_v)_{v \in V}$ wie folgt:

$$x'_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in S_1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } v \in V_1 \setminus S_1 \\ & \text{oder } v \in V_{\frac{1}{2}} \\ & \text{oder } v \in S_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: **(gerade bewiesen)**

$(x'_v)_{v \in V}$ ist Lösung des LP

Es folgt:

$(x_v)_{v \in V}$ ist optimal

$$\frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| + |V_1| = \sum_{v \in V} x_v \leq \sum_{v \in V} x'_v$$

$$= \frac{1}{2}|S_0| + \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| + \frac{1}{2}|V_1 \setminus S_1| + |S_1|$$

$$= \frac{1}{2}|S_0| + \frac{1}{2}|V_{\frac{1}{2}}| + \frac{1}{2}|V_1| + \frac{1}{2}|S_1|$$

$$\Rightarrow |V_1| \leq |S_0| + |S_1|$$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Reguläre Sprachen

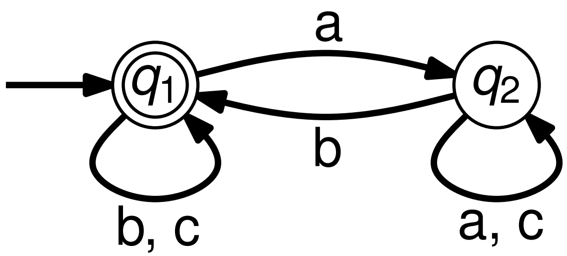
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Erkennen regulärer Sprachen

Problem:
Gegeben seien ein Text T, sowie ein regulärer Ausdruck R. Ist T ein Wort der Sprache $L(R)$?

Beispiel: Regulärer Ausdruck
$R = ((a(a \cup c)^\star b)^\star (b \cup c)^\star)^\star$
$\Rightarrow$ R beschreibt die Sprache $L(R)$ aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ in denen nach jedem Auftreten eines a's auch noch ein b auftritt.

Repräsentation als endlicher Automat:
Test ob $T \in L(R)$: Simulation des Automaten.

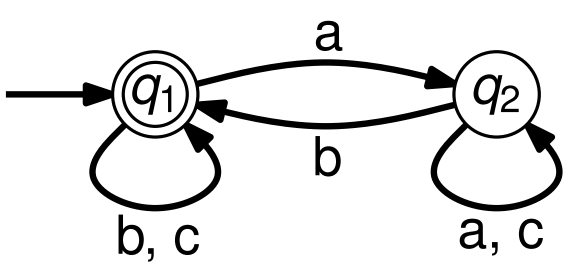


Erkennen regulärer Sprachen

Problem:
Gegeben seien ein Text T, sowie ein regulärer Ausdruck R. Ist T ein Wort der Sprache $L(R)$?

Beispiel: Regulärer Ausdruck
$R = ((a(a \cup c)^\star b)^\star (b \cup c)^\star)^\star$
$\Rightarrow$ R beschreibt die Sprache $L(R)$ aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ in denen nach jedem Auftreten eines a's auch noch ein b auftritt.

Repräsentation als endlicher Automat:
Test ob $T \in L(R)$: Simulation des Automaten.



Zu beantwortende Fragen:

- Wie konstruiert man (effizient) einen endlichen Automaten zu einem gegebenen regulären Ausdruck?
- Wie simuliert man ein Wort effizient?
- NEA oder DEA?

(NEA/DEA: nichtdeterministischer/deterministischer endlicher Automat)

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

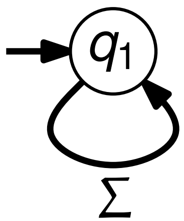
Regulärer Ausdruck → NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

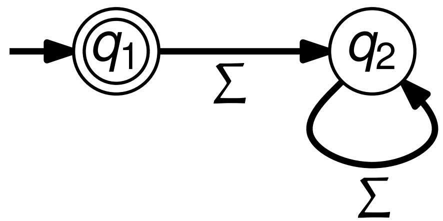
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^{+}$ und $(\alpha)^{\star}$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

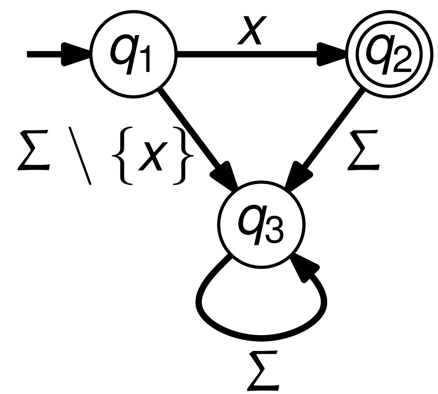
$\emptyset$:



ε:



x:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

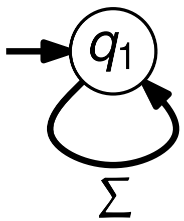
Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

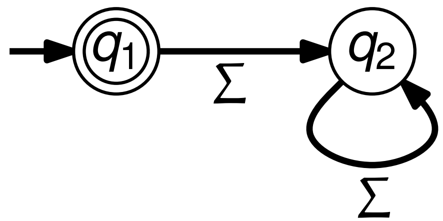
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

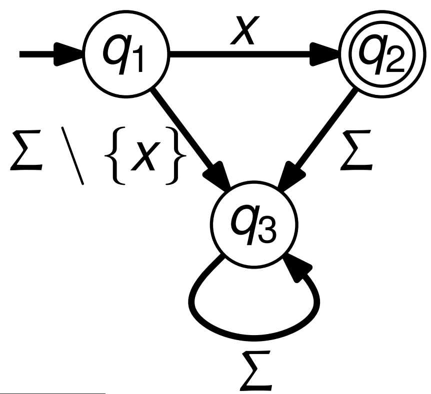
$\emptyset$:



ε:

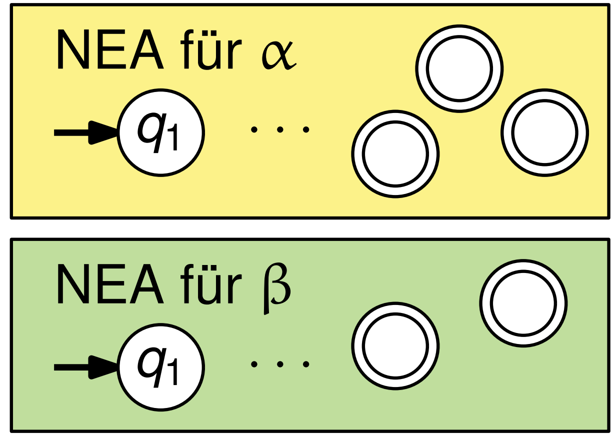


x:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha) \cup (\beta)$:



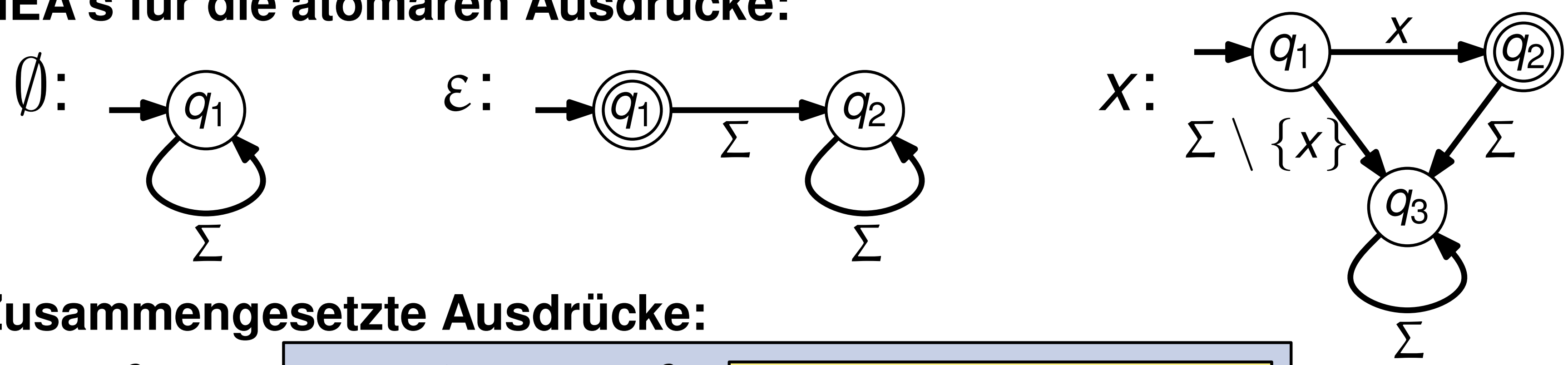
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Regulärer Ausdruck → NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

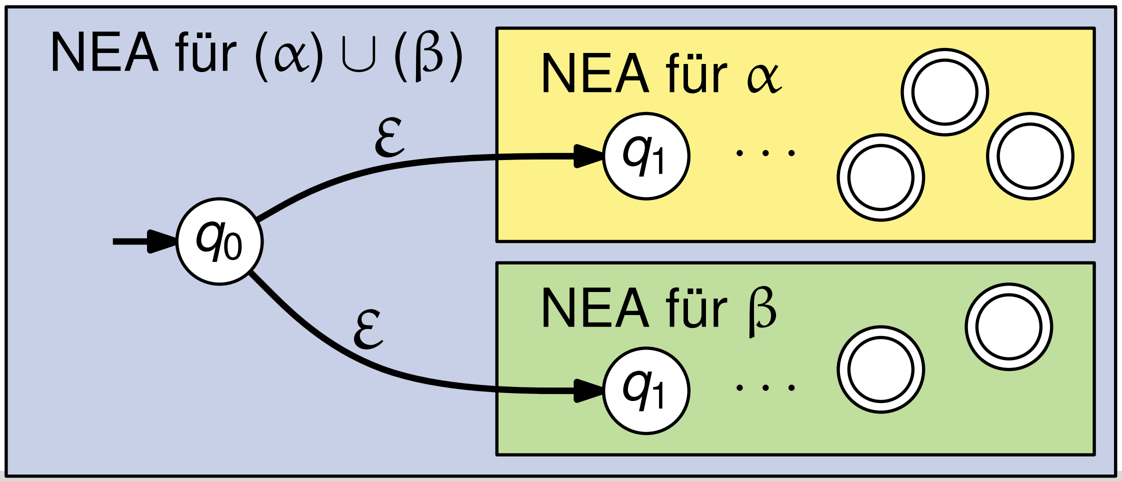
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha) \cup (\beta)$:



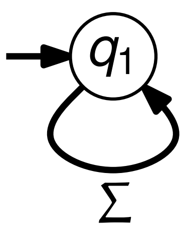
Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

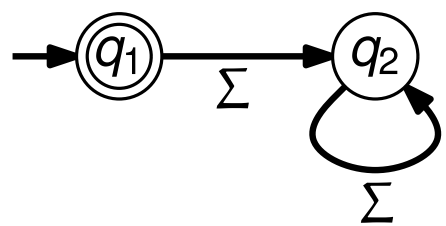
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

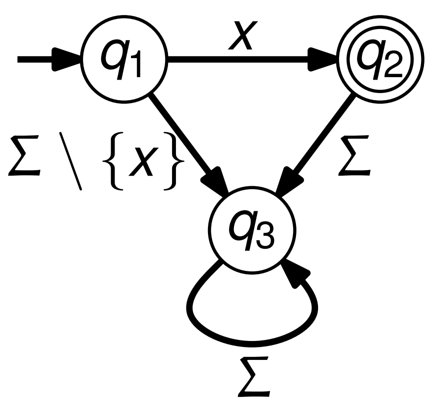
$\emptyset$:



ε:

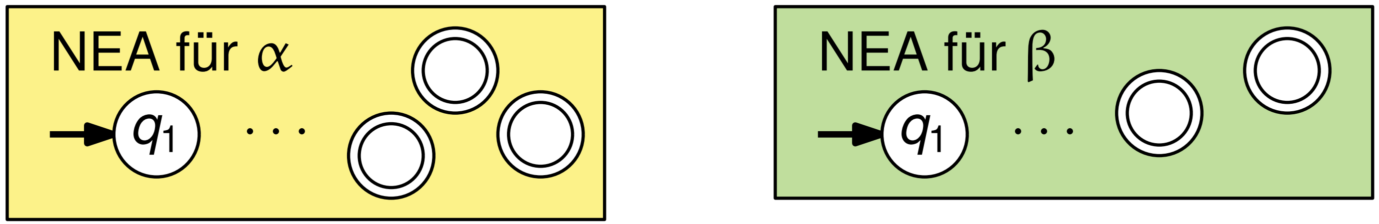


x:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha) \cdot (\beta)$:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

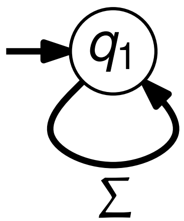
Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

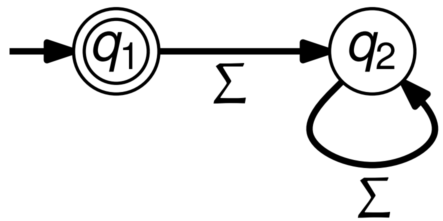
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

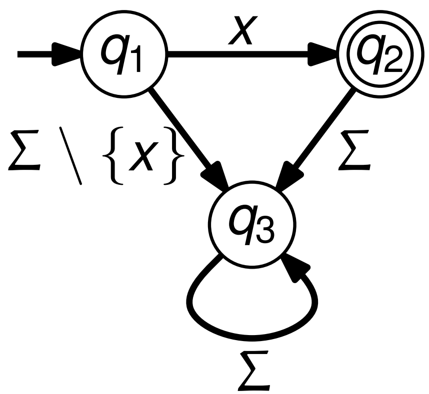
$\emptyset$:



ε:

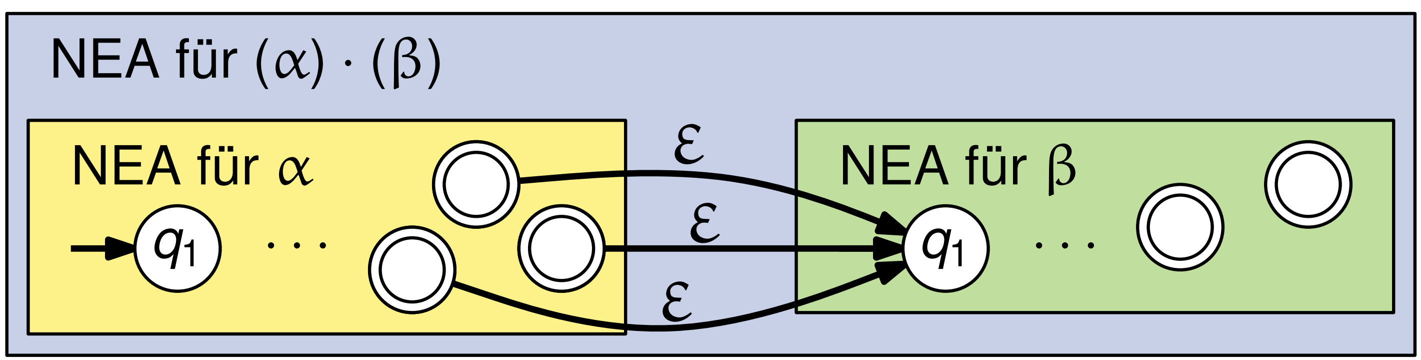


x:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha) \cdot (\beta)$:



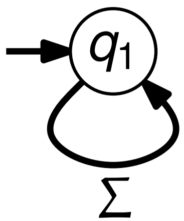
Regulärer Ausdruck → NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

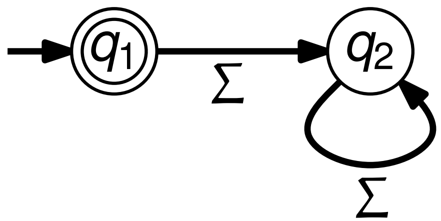
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

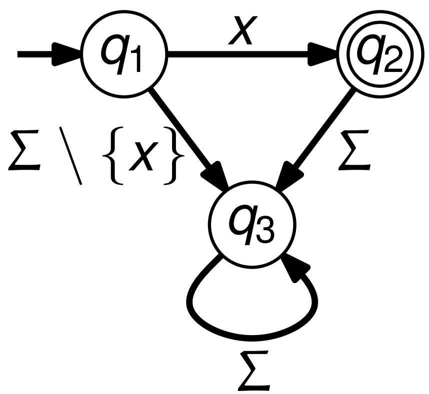
$\emptyset$:



ε:

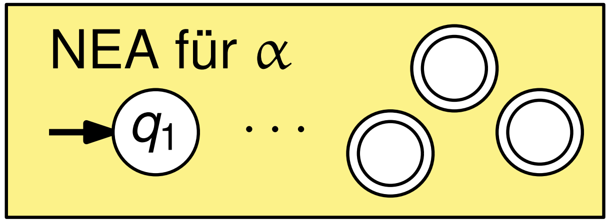


x:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha)^\star$:



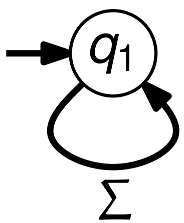
Regulärer Ausdruck → NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

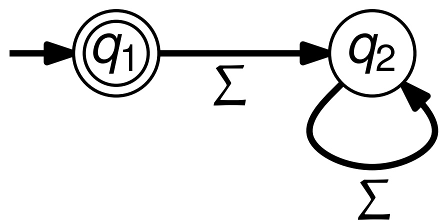
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

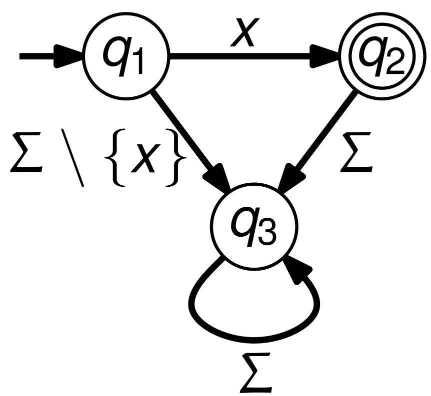
$\emptyset$:



ε:

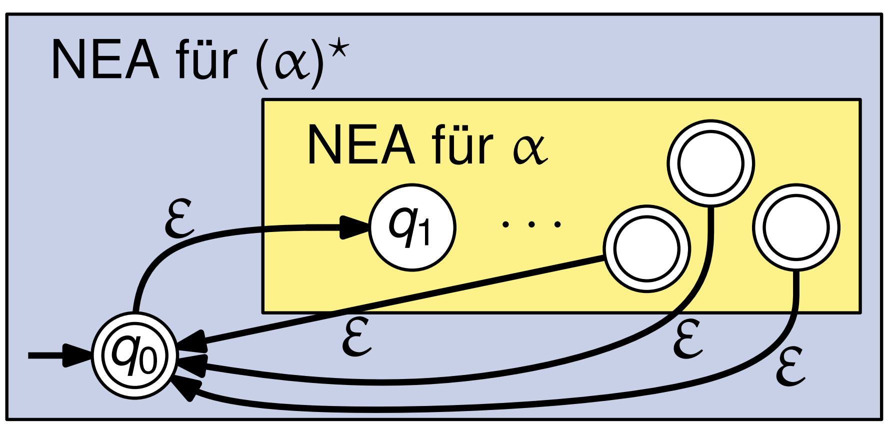


x:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha)^\star$:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

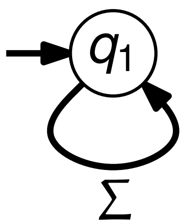
Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NEA

Rekursive Definition eines regulären Ausdrucks:

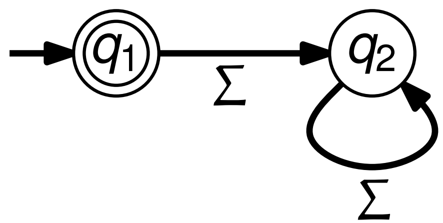
- Die leere Menge $\emptyset$, das leere Wort ε und einzelne Zeichen $x \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
- Für zwei reguläre Ausdrücke α, β sind auch $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cdot (\beta)$, $(\alpha)^+$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

NEA's für die atomaren Ausdrücke:

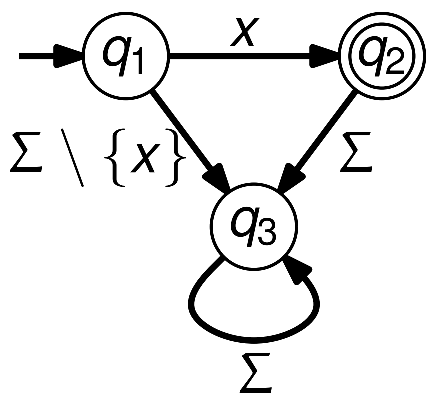
$\emptyset$:



ε:

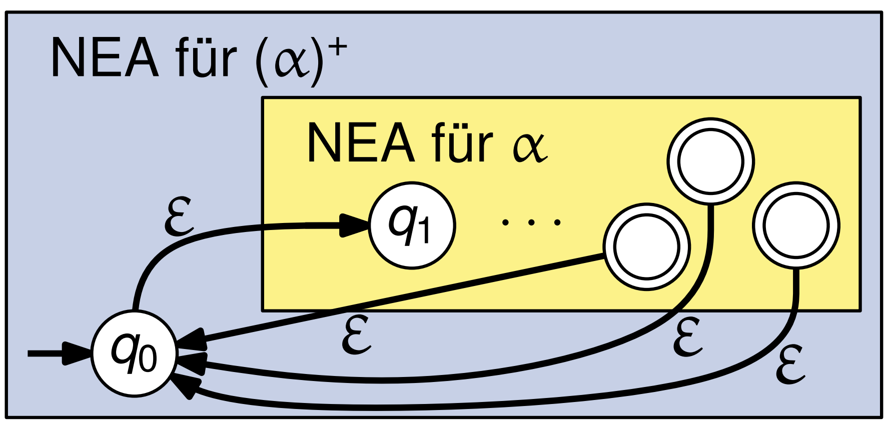


x:



Zusammengesetzte Ausdrücke:

$(\alpha)^+$:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Simulation des NEA

Größe des NEA's: Der so konstruierte NEA hat $O(k)$ viele Zustände, wobei $k = |R|$ die Länge des regulären Ausdrucks ist.

Simulation eines Wortes T:

- Erinnerung: T wird akzeptiert, wenn es eine Ausführung gibt, die in einem Endzustand landet.
- Alle möglichen Ausführungen auflisten $\rightarrow$ zu aufwendig.
- Markiere stattdessen zu jedem Zeitpunkt alle Zustände, in denen man sich aktuell befinden könnte.
- Berechne daraus, abhängig vom nächsten Zeichen, die neue Markierung.
- Akzeptiere, wenn am Ende ein Endzustand markiert ist.

Simulation des NEA

Größe des NEA's: Der so konstruierte NEA hat $O(k)$ viele Zustände, wobei $k = |R|$ die Länge des regulären Ausdrucks ist.

Simulation eines Wortes T:

- Erinnerung: T wird akzeptiert, wenn es eine Ausführung gibt, die in einem Endzustand landet.
- Alle möglichen Ausführungen auflisten $\rightarrow$ zu aufwendig.
- Markiere stattdessen zu jedem Zeitpunkt alle Zustände, in denen man sich aktuell befinden könnte.
- Berechne daraus, abhängig vom nächsten Zeichen, die neue Markierung.
- Akzeptiere, wenn am Ende ein Endzustand markiert ist.

Laufzeit:
$O(k)$ Aufwand für jedes Gelesene Zeichen $\Rightarrow$ insgesamt $O(k \cdot n)$.

Geht das Schneller?
Idee: In einem DEA braucht die Ausführung nur $O(1)$ Zeit pro Zeichen.

NEA $\rightarrow$ DEA

Potenzmengenkonstruktion (Idee): (bekannt aus TGI)

- Ein Knoten in dem DEA entspricht einer Teilmenge von Knoten in dem NEA.
- Eine solche Teilmenge kommt als Knoten vor, wenn sie als Markierung in einer Abarbeitung vorkommen kann.
- Die Übergänge wandeln entsprechend Markierungen ineinander um.
- Ein Zustand des DEA ist akzeptierend, falls er einen akzeptierenden Zustand des NEA enthält.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

NEA $\rightarrow$ DEA

Potenzmengenkonstruktion (Idee): (bekannt aus TGI)

- Ein Knoten in dem DEA entspricht einer Teilmenge von Knoten in dem NEA.
- Eine solche Teilmenge kommt als Knoten vor, wenn sie als Markierung in einer Abarbeitung vorkommen kann.
- Die Übergänge wandeln entsprechend Markierungen ineinander um.
- Ein Zustand des DEA ist akzeptierend, falls er einen akzeptierenden Zustand des NEA enthält.

Laufzeit:

- Der resultierende DEA kann $O(2^k)$ (also exponentiell) groß sein.
- Die Simulation von n Zeichen dauert dennoch nur $O(n)$ Zeit.
- Laufzeit: $O(2^k + n)$. $\Rightarrow$ FPT bezüglich Parameter k.

Beachte:

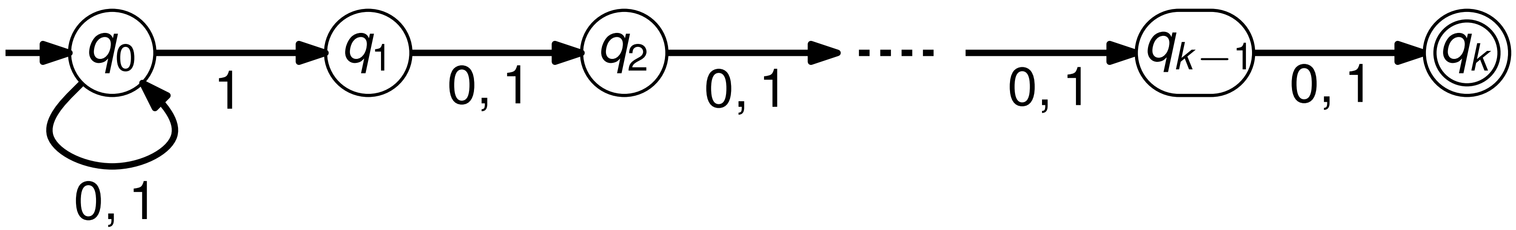
Auch wenn es einen polynomiellen Algorithmus mit Laufzeit $O(k \cdot n)$ gibt, kann es schneller sein den FPT-Algorithmus zu verwenden (für $k << n$).

Ein kleinerer DEA?

Kann man einen kleineren DEA finden?

Behauptung:

Der folgende NEA beschreibt eine Sprache, für die jeder DEA 2^k Zustände braucht.



(akzeptiert werden alle Wörter, die an der k-letzten Stelle eine 1 hatten)

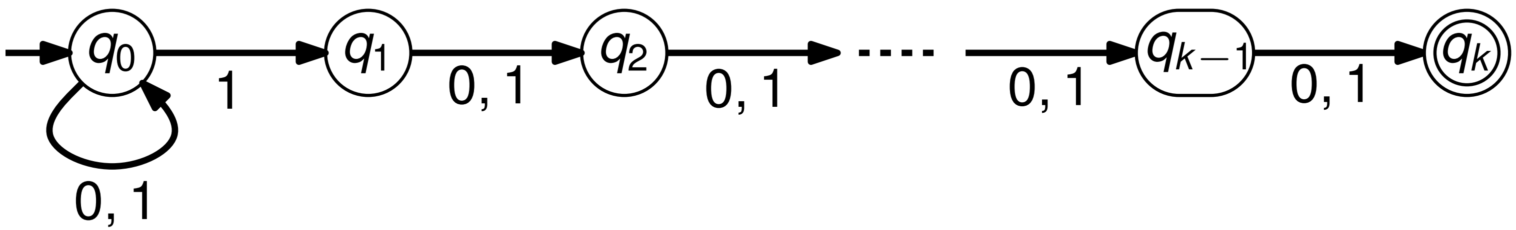
Ein kleinerer DEA?

Karlsruher Institut für Technologie

Kann man einen kleineren DEA finden?

Behauptung:

Der folgende NEA beschreibt eine Sprache, für die jeder DEA 2^k Zustände braucht.



(akzeptiert werden alle Wörter, die an der k-letzten Stelle eine 1 hatten)

Beweis Idee:

- Jedes der k zuletzt gelesenen Zeichen kann für die Akzeptanz entscheidend sein. (der DEA weiß nicht wie lang das Wort ist)
- Unterscheiden sich die letzten k Zeichen zweier Eingaben, so muss der DEA in unterschiedlichen, nichtäquivalenten Zuständen sein.
- Es gibt 2^k verschiedene Zeichenketten der Länge $k \Rightarrow 2^k$ Zustände nötig.