Algorithmen II
Vorlesung am 22.10.2013

Institut für Theoretische Informatik · Prof. Dr. Dorothea Wagner

Algorithmen II - Team

Vorlesung:

Prof. Dr. Dorothea Wagner

Übung:

- Thomas Bläsius (`thomas.blaesius@kit.edu`)
- Benjamin Niedermann (`benjamin.niedermann@kit.edu`)
- Sprechzeiten: Termin nach Vereinbarung

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Homepage und Forum

- `http://i11www.iti.kit.edu`
- Aktuelle Informationen/Termine
- Skripte, Folien, Übungsblätter
- Literaturempfehlungen
- Forum
  - Für Fragen an die Übungsleiter.
  - Für Fragen untereinander.
  - erreichbar unter: `https://ilias.studium.kit.edu`

  ↳ Fakultät für Informatik

  ↳ WS 2013/2014

  ↳ Algorithmen II mit Übung

  ↳ Anmeldung mit Rechenzentrum-account erforderlich

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Übungsbetrieb

Karlsruher Institut für Technologie

- In der Regel findet jede zweite Woche eine Übung statt.
- Besprechung von Übungsblättern.
- Übungsblätter werden auf der Homepage rechtzeitig online gestellt.
- Übungsblätter können/**sollten** bearbeitet werden.

  ↳ Helfen den Stoff zu vertiefen +
  gute Vorbereitung für Klausur

1. Übungsblatt bereits online,
Besprechung in der 1. Übung am 29. Oktober

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Klausur

- Umfasst zwei Stunden.
- Orientierung: Vorlesung Algorithmen II des Vorjahres + Vorlesung Algorithmentechnik behandelte ähnlichen Stoff.
- Hauptklausur: vorausichtlich am 24.02.2014
- Nachklausur: Termin noch nicht bekannt.

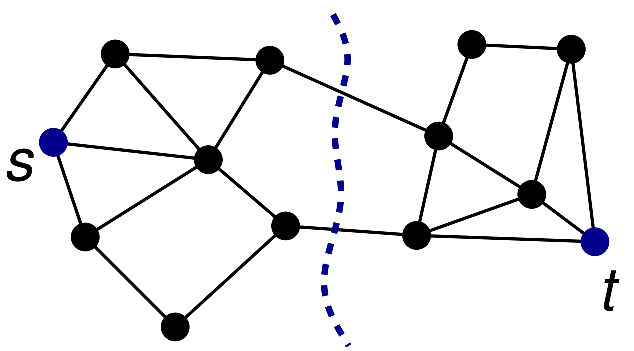
Genaue Klausurtermine werden rechtzeitig bekannt gegeben.

Ziele der Vorlesung

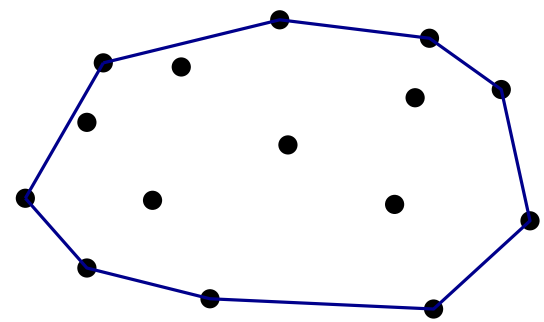
Die Vorlesung soll ein vertieftes Verständnis von Algorithmen vermitteln:

1. Es werden verschiedene Arten von Algorithmen betrachtet, u.a.:

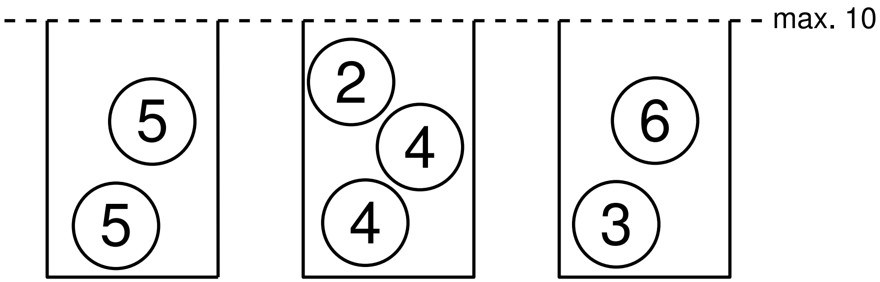
Graphenalgorithmen



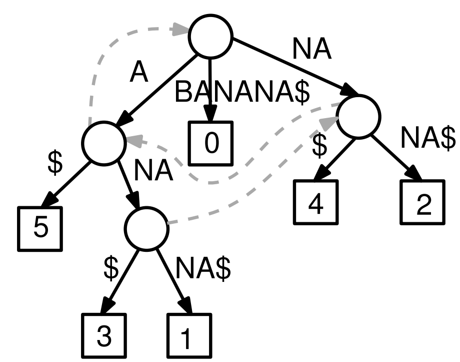
Algorithmische Geometrie



Kombinatorische Optimierung



Algorithmen für fortgeschrittene Datenstrukturen



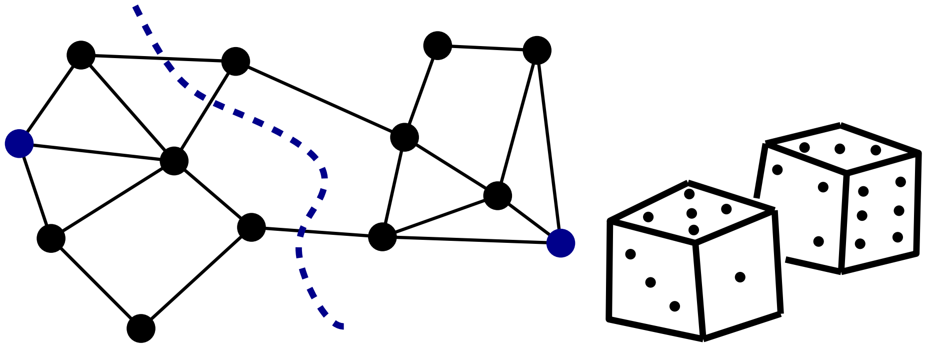
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Ziele der Vorlesung

Die Vorlesung soll ein vertieftes Verständnis von Algorithmen vermitteln:

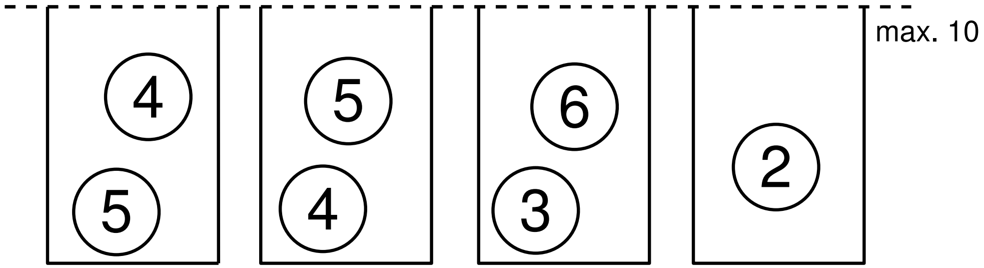
2. Es werden verschiedene Methodiken betrachtet, u.a.:

Randomisierte Algorithmen

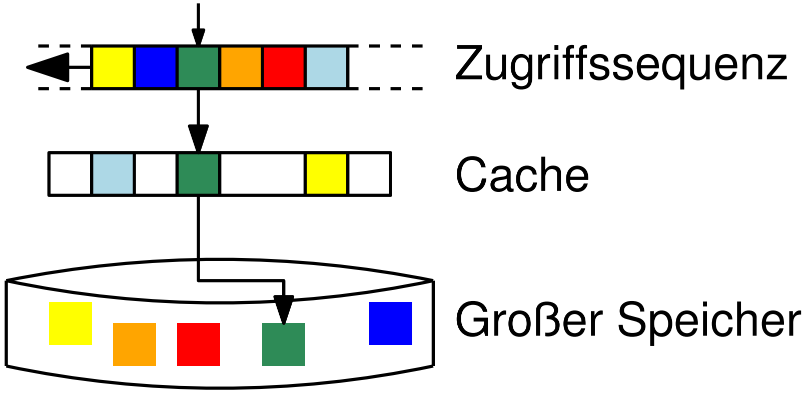


Parallele Algorithmen

Approximierende Algorithmen

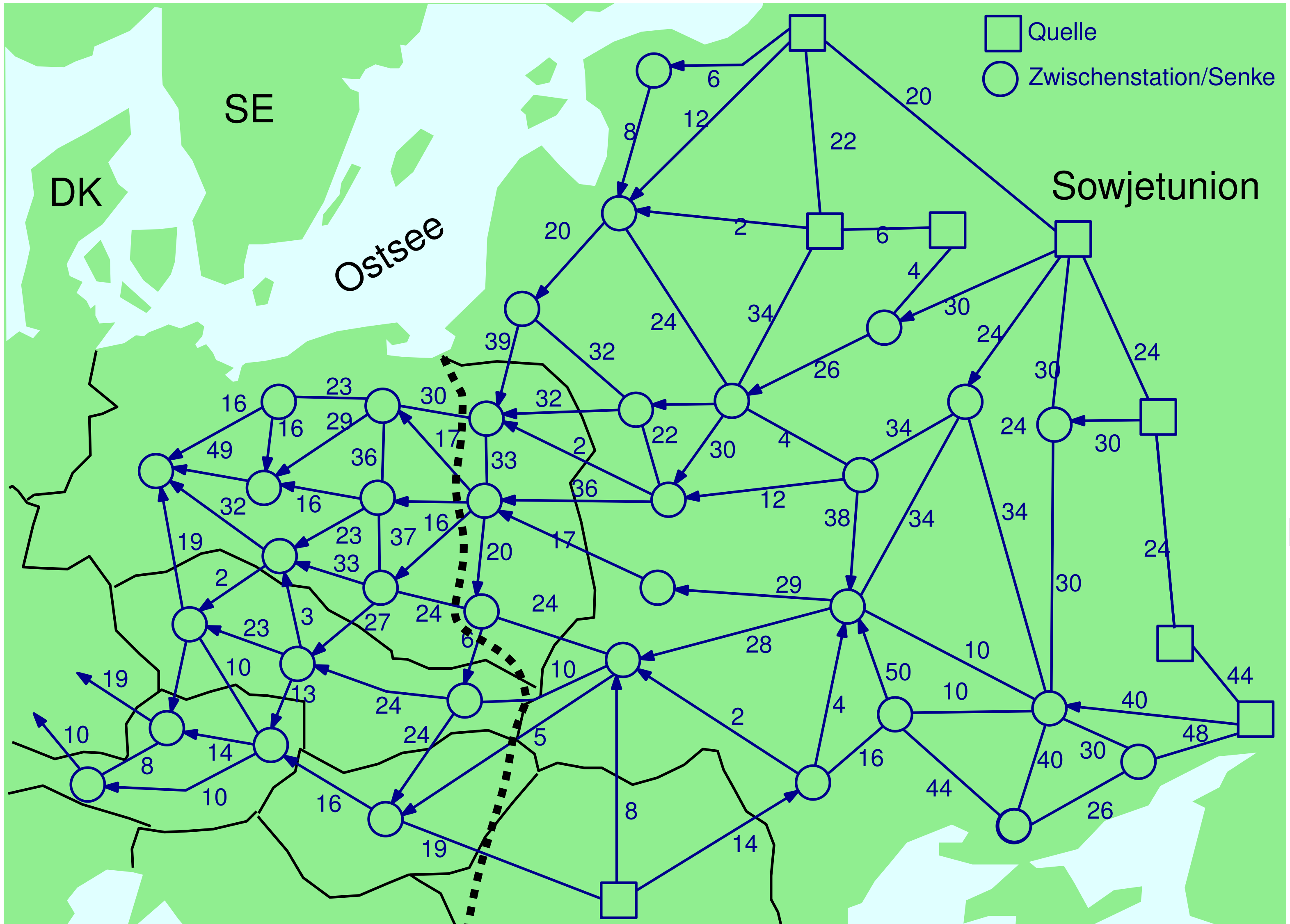


Online Algorithmen



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

1. Beispiel: Transportnetzwerke



Waren optimal durch Netzwerk schicken?

Flaschenhals: Wie berechnen?

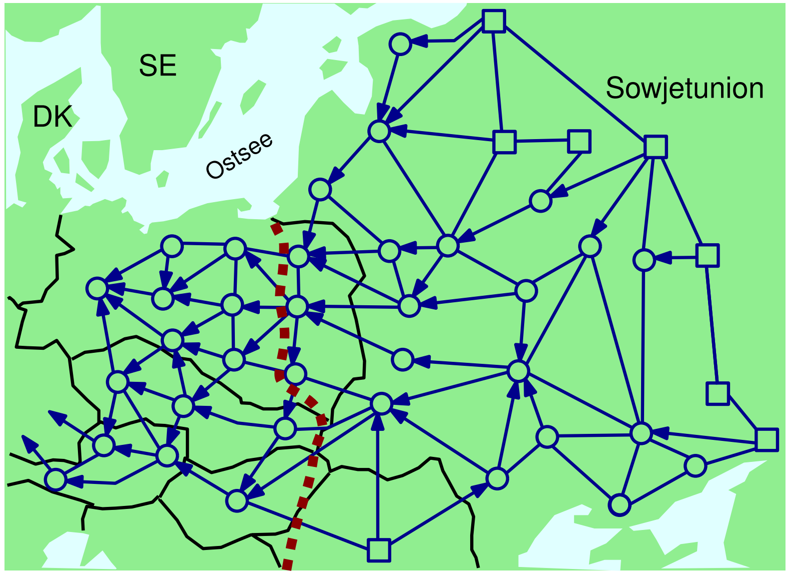
Basierend auf "On the history of the transportation and maximum flow problems" von Alexander Schrijver

Wie Waren optimal durch das Netz schicken?

	Arkhangelsk	Yaroslavl'	Murom	Balakhonikha	Dzerzhinsk	Kishert'	Sverdlovsk	Artemovsk	Iledzhk	Dekonskaya	*demand:*
Agryz				709	1064	693					2
Aleksandrov					397			1180			4
Almaznaya								81		65	1.5
Alchevskaya								106		114	4
Baku								1554		1563	10
Barybino								985		968	2
Berendeevo		135			430						10
Bilimbai						200	59				1
Bobrinskaya								655		663	10
Bologoe		389						1398			1
Verkhov'e								[illegible]		[illegible]	1

- 1930: Sowjetischer Wissenschaftler Tolstoĭ versucht Transportproblem auf konkretem Schienennetz zu lösen.
- Erster Ansatz: Ausschließlich zwei Quellen.
- Zweiter Ansatz: Produzenten und Konsumenten liegen entlang einer ringförmingen Bahnstrecke.
- Ergebnis: Findet optimale Lösung, beweist aber nicht, dass die Lösung optimal ist.

Flaschenhals: Wie berechnen?



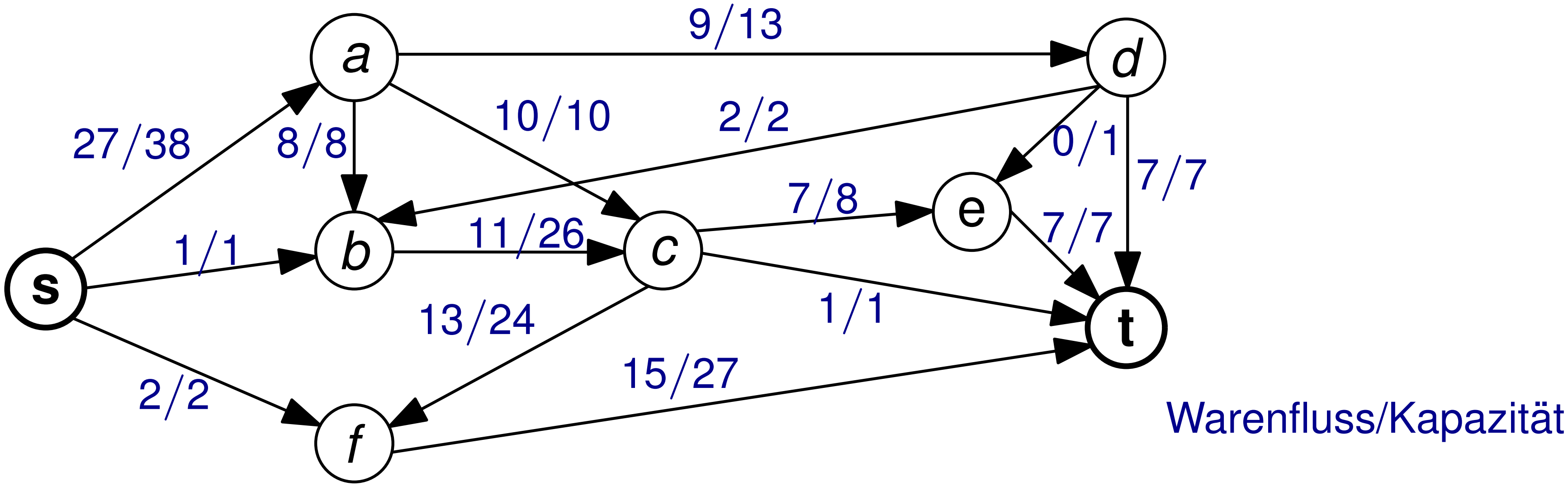
- 1954–1955: Harris and Ross formulieren in *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities* Flussproblem in Transportnetzwerken.
- Motivation ist das sowjetische Schienennetz: Finde minimalen Schnitt.

Problemdefinition von Harris und Ross:
Consider a rail network connecting two cities by way of a number of intermediate cities, where each link of the network has a number assigned to it representing its capacity. Assuming a steady state condition, find a maximal flow from one given city to the other.

1955: Ford und Fulkerson präsentieren allgemeine Lösung für Flussproblem und minimalen Schnitt.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Vorüberlegungen für Modellierung



- Vereinfachende Annahme: Ein Produzent (Quelle *s*) und ein Konsument (Senke *t*).
- Jeder Weg zwischen zwei Stationen besitzt eine Kapazität, die der Warenfluss nicht überschreiten darf.
- Was an eine Zwischenstation transportiert wird, muss auch von dort abtransportiert werden.
- Es darf von einer Zwischenstation nicht mehr abtransportiert werden, als dort ankommt.

Modellierung

Modelliere Transportnetzwerk als ein Tupel (D, s, t, c), so dass:

- $D = (V, E)$ ist ein einfacher gerichteter Graph.
- s und t sind Knoten in V (Quelle und Senke).
- $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ ist Kantengewichtsfunktion.

Modelliere den Warenfluss in (D, s, t, c) als eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, so dass folgende zwei Bedingungen gelten:

Kapazitätsbedingung:

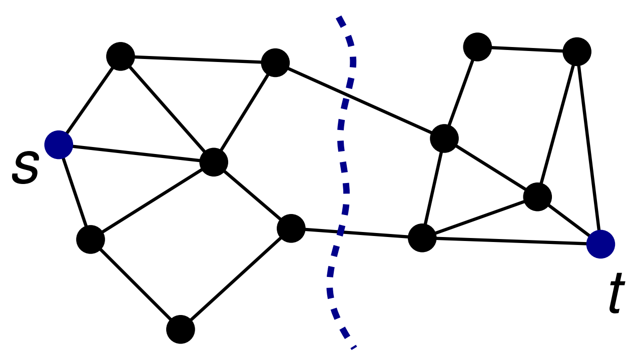
Für alle $(i, j) \in E$ gilt: $0 \leq f(i, j) \leq c(i, j)$

Flusserhaltung:

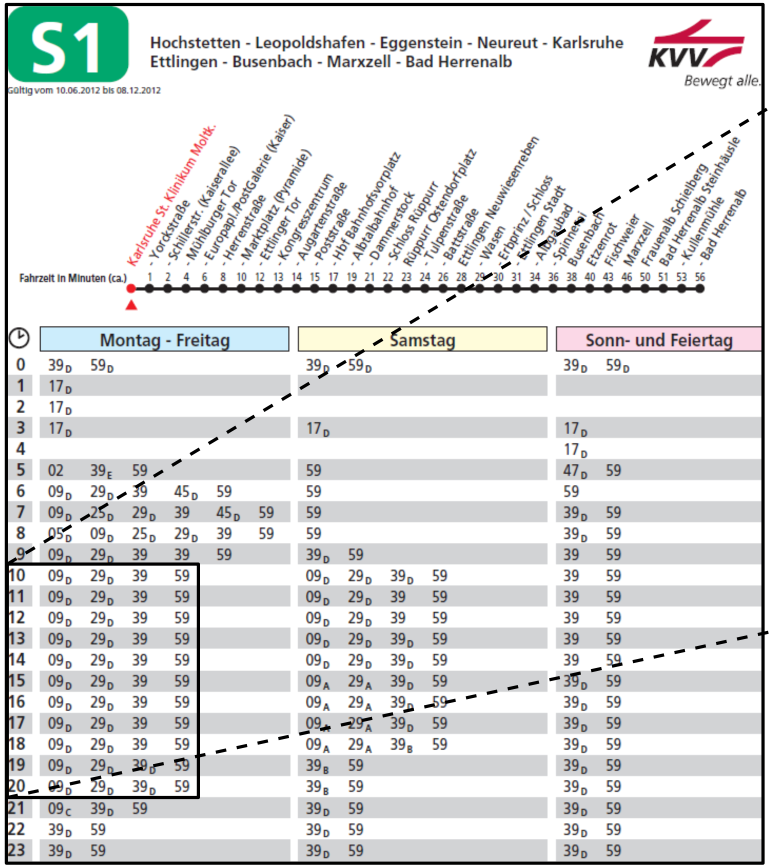
Für alle $i \in V \setminus \{s, t\}$ gilt: $\sum_{(i,j) \in E} f(i, j) - \sum_{(j,i) \in E} f(j, i) = 0$

In der Vorlesung behandelte Fragestellungen

- Wie können maximale Flüsse in einem Netzwerk effizient berechnet werden?
  - Ford-Fulkerson-Algorithmus
  - Algorithmus von Edmonds und Karp
  - Algorithmus von Goldberg und Tarjan
- Wie hängen Flüsse und Schnitte in einem Netzwerk (Graph) zusammen?
- Kann man Flussnetzwerke verwenden, um andere algorithmische Probleme zu lösen?



2. Beispiel: Periodische Fahrpläne



S1 Hochstetten - Leopoldshafen - Eggenstein - Neureut - Karlsruhe Ettlingen - Busenbach - Marxzell - Bad Herrenalb

KVV Bewegt alle.

Gültig vom 10.06.2012 bis 08.12.2012

Fahrzeit in Minuten (ca.)	
Karlsruhe St. Klinikum Moltk.	
- Yorckstraße	1
- Schillerstr. (Kaiserallee)	2
- Mühlburger Tor	4
- Europapl./PostGalerie (Kaiser)	6
- Herrenstraße	8
- Marktplatz (Pyramide)	10
- Ettlinger Tor	12
- Kongresszentrum	13
- Augartenstraße	14
- Poststraße	15
- Hbf Bahnhofsvorplatz	17
- Albtalbahnhof	19
- Dammerstock	21
- Schloss Rüppurr	22
Rüppurr Ostendorfplatz	23
- Tulpenstraße	24
- Battstraße	26
Ettlingen Neuwiesenreben	28
- Wasen	29
- Erbprinz / Schloss	30
- Ettlingen Stadt	31
- Albgaubad	34
- Spinnerei	36
Busenbach	38
Etzenrot	40
Fischweier	43
Marxzell	46
Frauenalb Schielberg	50
Bad Herrenalb Steinhäusle	51
- Kullenmühle	53
- Bad Herrenalb	56

	Montag - Freitag	Samstag	Sonn- und Feiertag
0	39_D 59_D	39_D 59_D	39_D 59_D
1	17_D		
2	17_D		
3	17_D	17_D	17_D
4			17_D
5	02 39_E 59	59	47_D 59
6	09_D 29_D 39 45_D 59	59	59
7	09_D 25_D 29_D 39 45_D 59	59	39_D 59
8	05_D 09_D 25_D 29_D 39 59	59	39_D 59
9	09_D 29_D 39 39 59	39_D 59	39 59
10	09_D 29_D 39 59	09_D 29_D 39_D 59	39 59
11	09_D 29_D 39 59	09_D 29_D 39 59	39 59
12	09_D 29_D 39 59	09_D 29_D 39 59	39 59
13	09_D 29_D 39 59	09_D 29_D 39_D 59	39 59
14	09_D 29_D 39 59	09_D 29_D 39_D 59	39 59
15	09_D 29_D 39 59	09_A 29_A 39_D 59	39_D 59
16	09_D 29_D 39 59	09_A 29_A 39_D 59	39_D 59
17	09_D 29_D 39 59	09_A 29_A 39_D 59	39_D 59
18	09_D 29_D 39 59	09_A 29_A 39_B 59	39_D 59
19	09_D 29_D 39_D 59	39_B 59	39_D 59
20	09_D 29_D 39_D 59	39_B 59	39_D 59
21	09_C 39_D 59	39_D 59	39_D 59
22	39_D 59	39_D 59	39_D 59
23	39_D 59	39_D 59	39_D 59

Aushangfahrplan der Linie S1 an der Station Städtisches Klinikum

10	09_D	29_D	39	59
11	09_D	29_D	39	59
12	09_D	29_D	39	59
13	09_D	29_D	39	59
14	09_D	29_D	39	59
15	09_D	29_D	39	59
16	09_D	29_D	39	59
17	09_D	29_D	39	59
18	09_D	29_D	39	59
19	09_D	29_D	39_D	59
20	09_D	29_D	39_D	59

Fahrplan ist periodisch

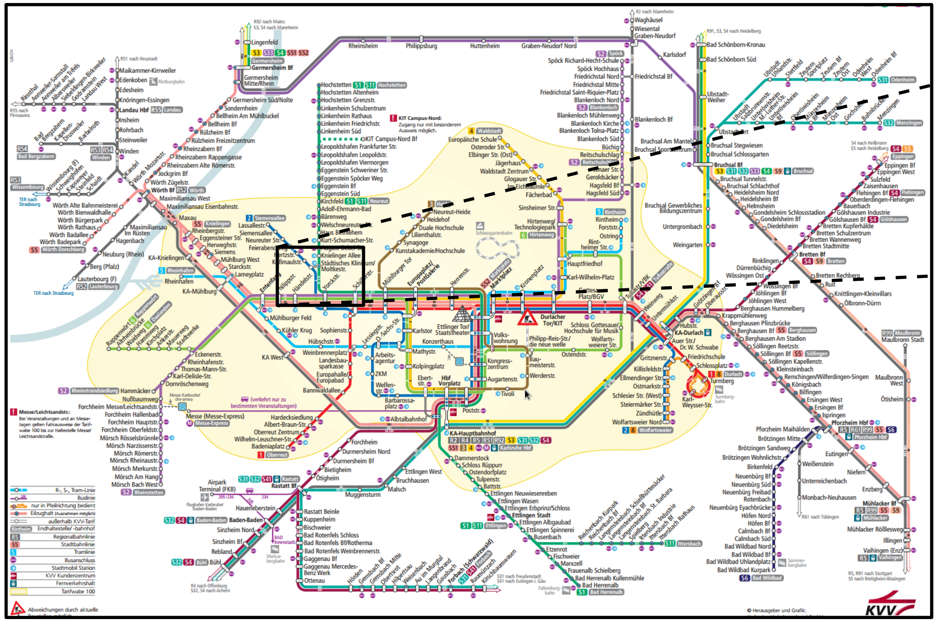
Fragestellung: Wie Fahrplan aller Linien berechnen, so dass

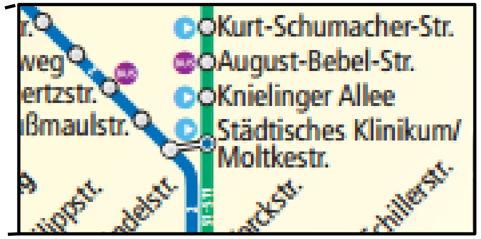
- Aushangfahrpläne periodisch sind,
- kurze Umstiegszeiten zu anderen Linien entstehen,
- Bahnen eine gewisse Aufenthaltszeit pro Station haben,
- und viele weitere Bedingungen.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

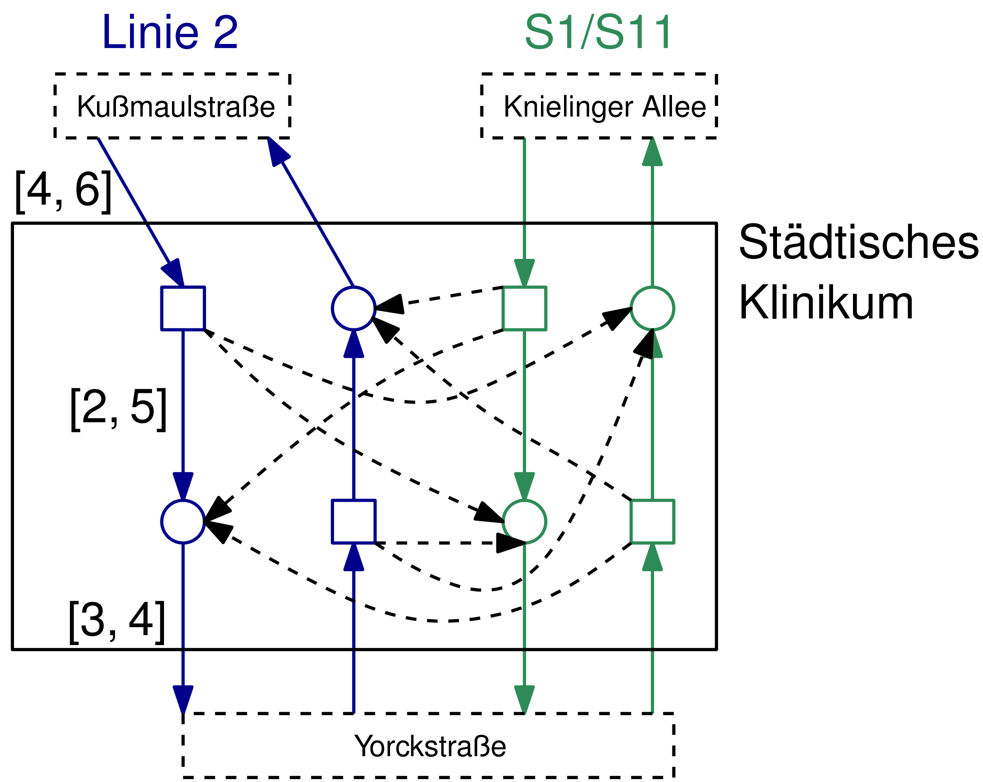
Modellierung als Graph

Karlsruher Institut für Technologie





- Für jede Linie führe Kanten und Knoten für Hin- und Rückrichtung ein.
- Für jede Richtung führe Knoten für **Ankunft** und **Abfahrt** ein.
- Führe für mögliche Umstiege Kanten ein.
- Annotiere jede Kante mit Zeitinterval [minimale Dauer,maximale Dauer]



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problemstellung

T-PERIODIC EVENT SCHEDULING PROBLEM

gegeben: gerichteter Graph $G = (V, A)$ und Vektoren $l, u \in \mathbb{Q}^{|A|}$.

gesucht: Vektor $\pi \in [0, T)^V$, so dass für jede Kante $a = (u, v) \in A$ gilt:

$$(\pi_v - \pi_u - l_a) \mod T \leq u_a - l_a \text{ (oder } \pi_v - \pi_u \in [l_a, u_a]_T)$$

Erklärung:

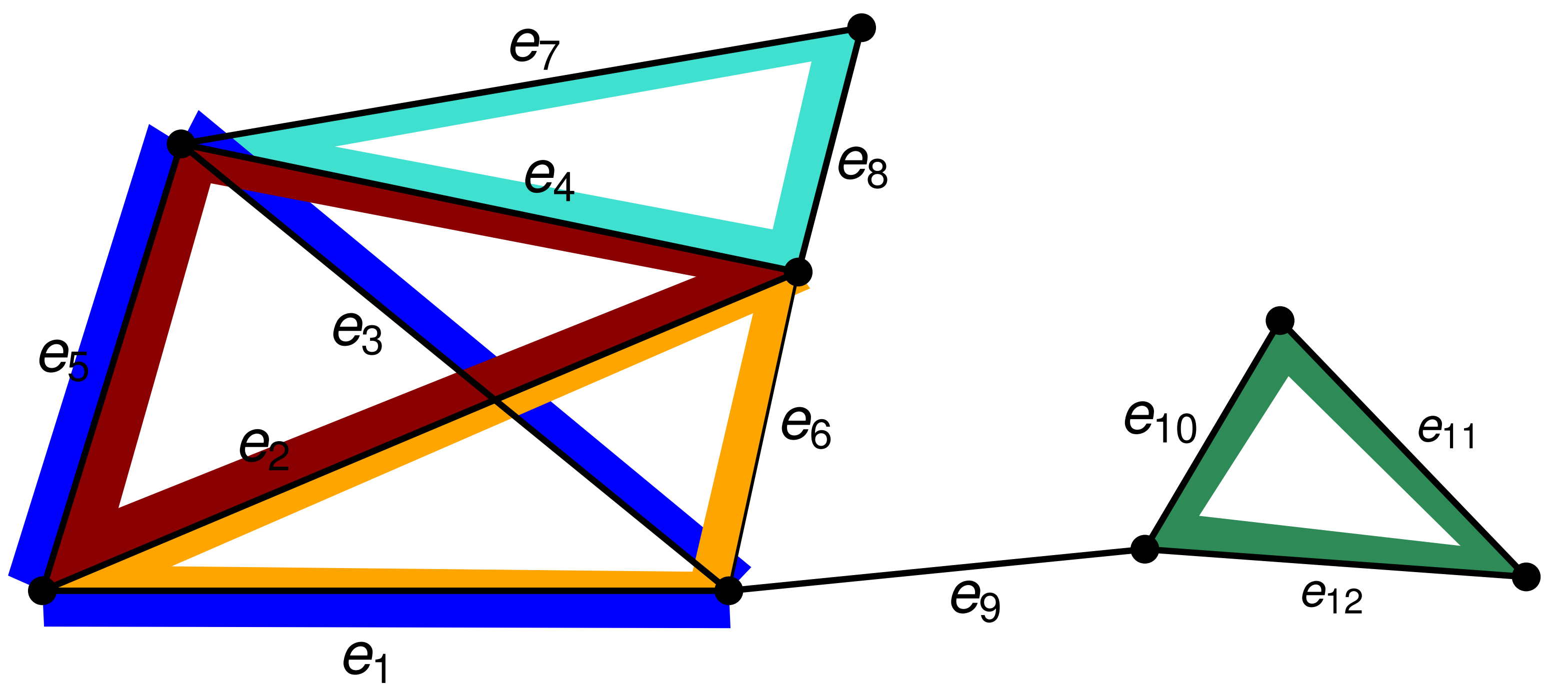
- G ist aus Liniennetz extrahierter Graph.
- T ist gewünschte Periode (im Beispiel 10 min).
- l gibt minimale Dauer und u gibt maximale Dauer der einzelnen Kanten an.
- π enthält für jeden Knoten $v \in V$ einen Zeitpunkt wann Ereignis von v auftritt (bezüglich der Periode T).

In der Vorlesung behandeltes Problem

Lösungsansätze des `Periodic Event Scheduling Problem` werden nicht direkt behandelt, sondern nur ein Teilproblem:

Ein Teilgraph $C = (V_C, E_C)$ von $G = (V, E)$ heißt **Kreis** in G, falls alle Knoten aus V_C in C geraden Grad haben.

Problemstellung: Finde minimal große Menge $\mathcal{C}$ an Kreisen in G, so dass sich alle Kreise in G aus $\mathcal{C}$ *zusammensetzen* lassen.



3. Beispiel: Volltextsuche

B	l	**a**	**u**	k	r	**a**	**u**	t		b	l	e	i	b	t		B	l	**a**	**u**	k	r	**a**	**u**	t		u	n	d

B	r	**a**	**u**	t	k	l	e	i	d		b	l	e	i	b	t		B	r	**a**	**u**	t	k	l	e	i	d

Gegeben: Zwei Folgen T und P von Zeichen mit Länge n und m ($m \leq n$).

Gesucht: Alle Vorkommen von P in T.

1. Beobachtung: Ohne Vorwissen über P und T benötigt jeder Algorithmus $\Omega(m+n)$ Zeit:

- Alle Zeichen von T müssen mindestens einmal betrachtet werden $\rightarrow \Omega(n)$.
- Alle Zeichen von P müssen mindestens einmal betrachtet werden $\rightarrow \Omega(m)$.

Naiver Ansatz

Matching(Text T, Muster P)

1. Setze n = Länge von T und setze m = Länge von P.
2. Für $i = 0$ bis $n - m$ führe aus
   (a) Falls $P[1 \dots m] = T[i + 1 \dots i + m]$, dann
   gebe aus: Muster P taucht mit Verschiebung i in T auf.

Analyse:

- Schleife benötigt $n - m$ Schritte.
- Vergleich in Schleife benötigt m Schritte

Algorithmus benötigt $\Theta((n - m + 1) \cdot m)$

Hinweis: Trotz schlechter theoretischer Laufzeit, in der Praxis nahezu lineare Laufzeit: In natürlichsprachlichen Texten kann der Vergleich $P[1 \dots m] = T[i + 1 \dots i + m]$ häufig bereits nach den ersten zwei Zeichen abgebrochen werden. (In der englischen Sprache im Durchschnitt nach 1.07 Zeichen.)

In der Vorlesung behandelte Algorithmen

Idee: Investiere Zeit in Vorberchnungsschritt, um bei Anfrage Zeit zu sparen.

	Vorbereitungszeit	Suchzeit	typische Anwendung
Naiver Ansatz	—	$\Theta((n-m+1)\cdot m)$	A B
Rabin-Karp-Algorithmus	$\Theta(m)$	average $\Theta(n+m)$ worst $\Theta((n-m+1)\cdot m)$	A
Endlicher Automat	$\mathcal{O}(m\cdot\|\Sigma\|)$	$\Theta(n)$	A
Knuth-Morris-Pratt	$\Theta(m)$	$\Theta(n)$	A
Suffix Trees	$\Theta(n)$	$\Theta(m)$	B

A: Ein Muster, verschiedene Texte.

B: Ein Text, verschiedene Muster.

Σ = Alphabet der Zeichenfolgen

4. Beispiel: Knotenüberdeckung

Definition: Knotenüberdeckung (Vertex Cover)
Gegeben ein Graph $G = (V, E)$. Eine *Knotenüberdeckung* $S \subseteq V$ ist eine Teilmenge von V, so dass

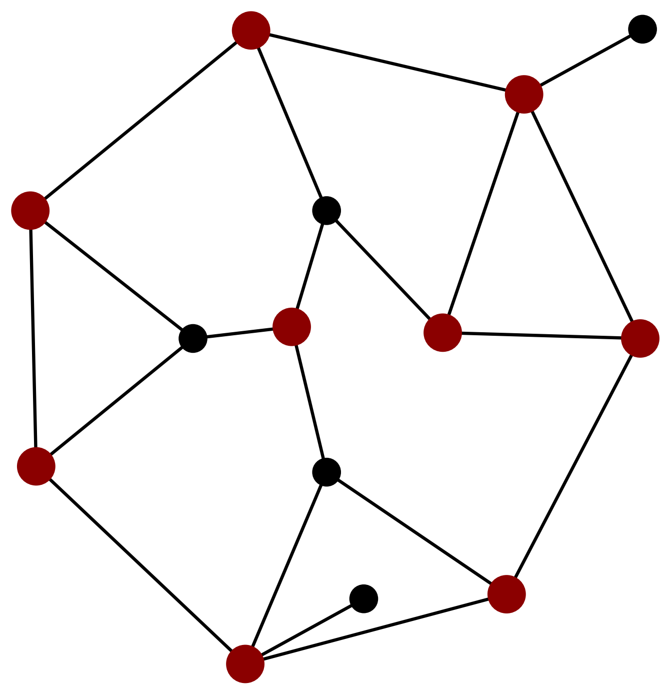
$$\text{für alle } \{u, v\} \in E \text{ gilt } u \in S \text{ oder } v \in S.$$

VERTEX COVER PROBLEM
Gegeben ein Graph $G = (V, E)$. Gibt es eine Knotenüberdeckung S mit maximal k Knoten?

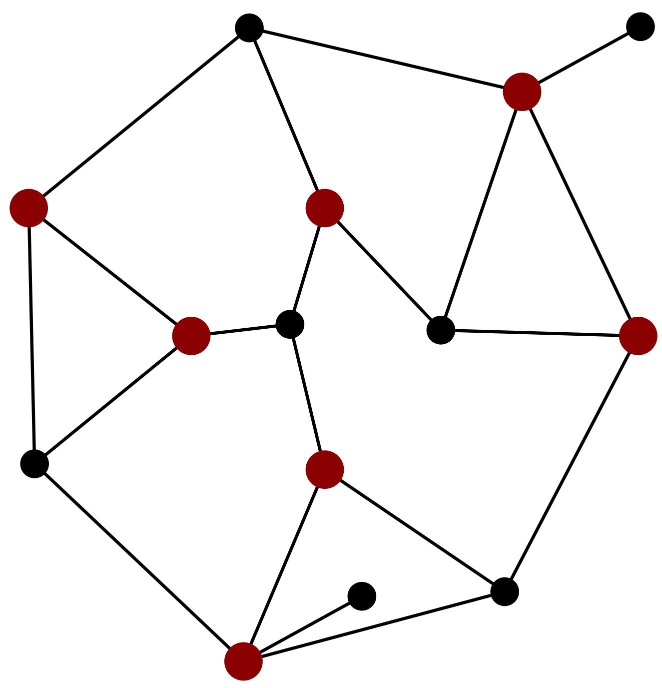
Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Knotenüberdeckung



nicht minimal



minimal