Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 8

Vorlesung Algorithmen II im WS 13/14

Ausgabe 21. Januar 2014
Besprechung 4. Februar 2014

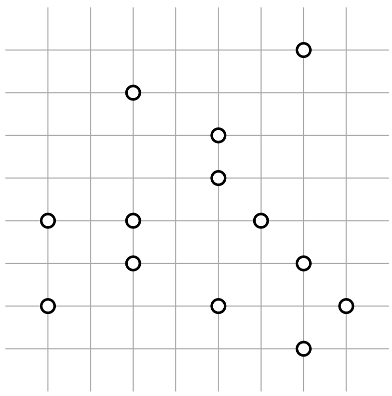
Problem 1: Parametrisierte Algorithmen

Das Problem PUNKTÜBERDECKUNG ist wie folgt definiert.

Gegeben: Eine Menge von Punkten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene, sowie ein Parameter k.

Gesucht: Eine Menge von maximal k Geraden $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, sodass es für jeden Punkt $p_i \in P$ eine Gerade $g_j \in G$ mit $p_i \in g_j$ gibt.

(a) Gegeben sei eine Instanz von PUNKTÜBERDECKUNG bestehend aus der unten abgebildeten Punktmenge, sowie dem Parameter $k = 3$. Zeichnen Sie 3 Geraden ein, die diese Instanz von PUNKTÜBERDECKUNG lösen.



(b) Geben Sie einen FPT-Algorithmus für PUNKTÜBERDECKUNG an. Begründen Sie, warum ihr Algorithmus korrekt ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Technik der Kernbildung. Zeigen Sie dazu zunächst, dass eine Gerade, die mehr als k Punkte aus P enthält, in jeder Lösung enthalten sein muss.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe einer Laufzeitanalyse, dass Ihr Algorithmus aus Aufgabenteil (b) ein FPT-Algorithmus ist.

Problem 2: Multicut in Bäumen

Das Problem Multicut (eingeschränkt auf Bäume) ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein Baum $T = (V, E)$ mit n Knoten und $n-1$ Kanten. Sei außerdem $H \subseteq \binom{V}{2}$ eine Menge von Knotenpaaren, sowie k ein Parameter. Gesucht ist eine Teilmenge $E' \subseteq E$ mit $|E'| \leq k$, sodass das Löschen der Kanten in E' jedes Knotenpaar in H trennt (d.h. s_i und t_i liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten für jedes Paar $(s_i, t_i) \in H$).

Zeigen Sie, dass das Problem Multicut auf Bäumen Fixed Parameter Tractable bezüglich des Parameters k ist.

Problem 3: Online-Algorithmen für Bin Packing – Untere Schranke

Um Bin Packing als Online-Problem aufzufassen, nehmen Sie nun an, dass M als Sequenz $(a_1, \ldots, a_n)$ gegeben ist. Betrachten Sie nun die Klasse $\mathcal{C}$ der Online-Algorithmen, die M in solcher Weise sequentiell abarbeiten, dass sie immer zuerst das aktuelle Element einem Bin zuweisen, bevor sie das nächste Element betrachten.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Online-Algorithmus $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ eine Instanz I gefunden werden kann, sodass

$$\mathcal{A}(I) \geq \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(I),$$

wobei $\mathcal{A}(I)$ den Wert der Lösung von $\mathcal{A}$ angewendet auf I und $\mathrm{OPT}(I)$ den Wert der optimalen Lösung bezeichnet.

(b) Geben Sie einen 2-kompetitiven Algorithmus $\mathcal{A} \in C$ an.

(c) Nehmen Sie an, Sie besitzen ein Logistikunternehmen und müssen Container mit Waren beladen, die mit einzelnen Lkw-Ladungen heran transportiert werden. Da Sie keinen Platz zum Zwischenlagern der Waren haben, müssen Sie die ankommenden Waren direkt in die Container verfrachten. Sie entscheiden sich hierzu den Algorithmus aus Teilaufgabe b) zu verwenden. Was für Probleme können auftreten?

Problem 4: Béládys Anomalie

Die Béládys Anomalie besagt, dass für manche der Paging-Algorithmen man Zugriffssequenzen finden kann, sodass sie mit einem kleineren Cache weniger Fehlzugriffe liefern als mit einem größeren. Zeigen Sie, dass FIFO ein solcher Paging-Algorithmus ist.

Problem 5: Konservative Paging-Algorithmen

Zeigen Sie, dass FWF, LIFO und LFU keine konservativen Paging-Algorithmen sind.