Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 7

Vorlesung Algorithmen II im WS 13/14

Ausgabe 09. Januar 2014
Besprechung 21. Januar 2014

Problem 1: Minimale Schnittbasis – Approximationsalgos relativer Gütegarantie

Der *Kantenraum* $\mathcal{E}$ eines ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ sei der Vektorraum aller Teilmengen der Kantenmenge E von G über dem Körper $GF(2)$ mit symmetrischer Differenz als Vektoraddition. Desweiteren sei ein Schnitt im Graphen G repräsentiert durch die Menge $D \subseteq E$ der Kanten, welche diesen Schnitt kreuzen. Die Menge $\mathcal{C}^\star$ aller Schnitte von G (inklusive dem leeren Schnitt) ist ein Untervekrorraum von $\mathcal{E}$ (ohne Beweis). Die Kosten einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ von $\mathcal{C}^\star$ seien definiert als $c(B) := \sum_{i=1}^{d} c(b_i)$ mit $c(b_i)$ Anzahl der Kanten, die Schnitt b_i kreuzen.

(a) Formulieren Sie die Partitionendarstellung des Schnitts $s_3 := s_1 \oplus s_2$ (mit $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^\star$, $s_1 := (S, V \setminus S), s_2 := (T, V \setminus T)$) in Abhängigkeit der Schnittseiten S und T.

(b) Zeigen Sie: Für je zwei Knoten $u, v \in V$ und jede Basis B von $\mathcal{C}^\star$ gilt, dass mindestens ein Schnitt aus B die Konten u und v trennt.

(c) Zeigen Sie: Untenstehender Algorithmus ist ein polynomieller Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 für das Optimierungsproblem Min-Schnitt-Basis, welches eine minimal gewichtete Basis von $\mathcal{C}^\star$ sucht. (Hinweis: Setzen Sie voraus, dass die Ausgabe B' tatsächlich eine Basis von $\mathcal{C}^\star$ ist).

Algorithmus 1 : Approx-Min-Schnitt-Basis

Eingabe : Graph $G = (V, E)$
Ausgabe : Basis B' des Schnittraumes $\mathcal{C}^\star$ von G
Wähle einen Knoten $v \in V$
$B' \leftarrow \emptyset$
forall the $v' \in V \setminus \{v\}$ **do**
  $b_{v'} \leftarrow \{e \in E | e \text{ inzident zu } v'\}$
  $B' \leftarrow B' \cup \{b_{v'}\}$
Return B'

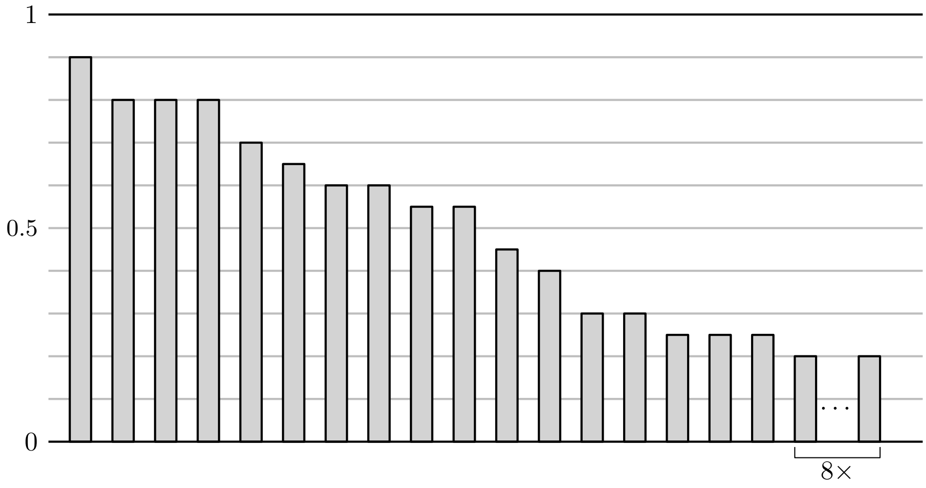
Problem 2: Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Das Minimierungsproblem Vertex Cover besteht darin, eine möglichst kleine Knotenmenge $V' \subseteq V$ zu finden, sodass für jede Kante $e \in E$ mindestens einer der beiden Endknoten in V' enthalten ist.

Geben sie eine Algorithmus für Vertex Cover an, der eine Approximationsgüte von 2 hat.

Problem 3: APAS für Bin Packing

Gegeben sei die Bin Packing Instanz I bestehend aus Elementen mit den folgenden Gewichten (siehe auch die unten stehende Grafik): 0.9, 0.8, 0.8, 0.8, 0.7, 0.65, 0.6, 0.6, 0.55, 0.55, 0.45, 0.4, 0.3, 0.3, 0.25, 0.25, 0.25, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2.



Im folgenden soll das in der Vorlesung vorgestellte APAS für Bin Packing an einem Beispiel ausgeführt werden. Wählen Sie dazu zunächst $\varepsilon = 0.6$ und führen Sie den Algorithmus $\mathcal{A}_{0.6}$ aus, indem Sie folgende Schritte anwenden.

(a) Berechnen Sie die zu ε gehörenden Parameter δ, k und m. Betrachten Sie anschließend die Instanz J bestehend aus allen Elementen mit Gewicht größer oder gleich δ.

(b) Bestimmen Sie die $m + 1$ Gruppen $(H_1, \dots, H_{m+1})$ und die dazugehörigen Instanzen J_{Lo} und J_{Hi}.

(c) Lösen Sie die Instanz J_{Lo} optimal (durch scharfes Hinsehen).

(d) Erweitern Sie die optimale Lösung von J_{Lo} zu einer Lösung von J_{Hi} und berechnen Sie daraus eine Lösung von J.

(e) Erweitern Sie die Lösung von J mittels First Fit zu einer Lösung von I.

Wählen Sie nun $\varepsilon = 0.5$ und führen Sie den zugehörigen Algorithmus $\mathcal{A}_{0.5}$ aus (wiederholen Sie (a)–(e)). Inwiefern wirkt sich die Änderung des Parameters auf die Laufzeit des resultierenden Algorithmus aus? Welche Auswirkungen hat die Änderung des Parameters auf die Qualität des Ergebnisses?