Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 4

Vorlesung Algorithmen II im WS 13/14

Ausgabe 26. November 2013
Besprechung 5. Dezember 2013

Problem 1: Random MaxCut

Gegeben sei der Graph G in Abbildung 1(a). Wenden Sie die folgenden Schritte des aus der Vorlesung bekannten Algorithmus Random MaxCut auf G an.

(a) Stellen Sie das quadratische Programm QP auf, dessen optimale Lösung einen maximalen Schnitt in G liefert.

(b) Formulieren Sie die zu QP gehörende Relaxierung QP^k für $k = 2$, indem Sie die Variablen in QP nicht als 1-dimensionale, sondern als 2-dimensionale Vektoren auffassen.

Eine optimale Lösung für QP^2 ist in Abbildung 1(b) dargestellt. Für die Vektoren $x^1, \ldots, x^6$ gilt also: $x^1 = x^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$, $x^4 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$, $x^5 = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}$, $x^6 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

(c) Zählen Sie alle Schnitte auf, die der Algorithmus Random MaxCut aus dieser Lösung von QP^2 berechnen kann und bestimmen Sie ihr Gewicht. Wie groß ist der Erwartungswert für die resultierende Lösung, verglichen mit der optimalen Lösung?

(d) Warum wählt man eine zufällige Gerade, um von der Lösung von QP^2 zu einem Schnitt in G zu kommen? Könnte man nicht einfach die Gerade wählen, die den besten Schnitt liefert?

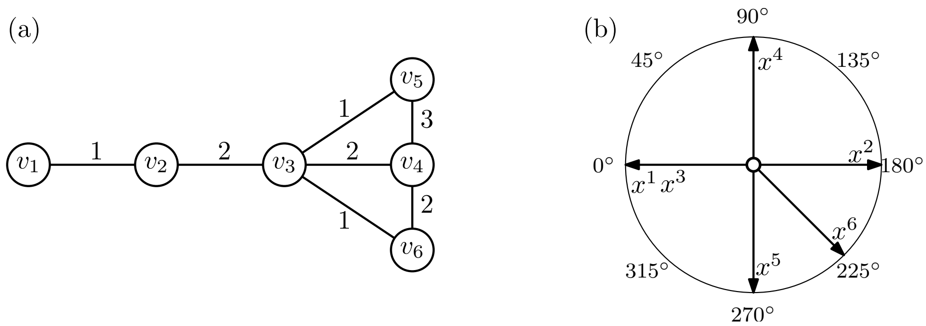

Abbildung 1: (a) Graph zu Problem 1. (b) Graphische Darstellung der Lösung von QP^2.

Problem 2: Gleichverteiltes JA/NEIN

Gegeben sei ein Algorithmus Biased-Random, der mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 1 ausgibt und mit $(1-p)$ den Wert 0. Geben Sie einen Algorithmus an, der Biased-Random als Methode benutzt und jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Wert 0 oder 1 ausgibt. Analysieren Sie außerdem die erwartete Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von p.

Problem 3: Fingerabdrücke

Mithilfe von *Fingerabdrücken* kann man die Gleichheit von Objekten prüfen, indem man statt der gesamten Struktur der Objekte nur einen Teil, den sogenannten Fingerabdruck, vergleicht. Sind die Fingerabdrücke der Objekte verschieden, so weiß man, dass auch die Objekte verschieden sind. Der Umkehrschluss gilt im Allgemeinen nicht. Gegeben sei Algorithmus 1, der überprüft, ob für drei $n \times n$ reelle Matrizen A, B, C gilt: $AB = C$.

Algorithmus 1 : MATRIZENPRODUKTTEST (A, B, C)

$r \leftarrow \langle$ Vektor von n unabhängigen Zufallsbits $\rangle$
$x \leftarrow Br$
$y \leftarrow Ax$
$z \leftarrow Cr$
Wenn $y \neq z$
    return NEIN
sonst
    return JA

(a) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 JA liefert, wenn gilt $AB = C$.

(b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Algorithmus 1 JA liefert, obwohl $AB \neq C$ gilt, kleiner oder gleich $1/2$ ist.

(c) Wie kann diese Wahrscheinlichkeit einer fälschlichen Ausgabe JA (siehe (b)) einfach reduziert werden?