Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 3

Vorlesung Algorithmen II im WS 13/14

Ausgabe 12. November 2013
Besprechung 26. November 2013

Problem 1: Einmaschinenscheduling

Eine Reihe von Aufträgen $A_1, \ldots, A_n$ müssen von einer einzigen Maschine abgearbeitet werden, es kann also zu jedem Zeitpunkt höchstens ein Auftrag bearbeitet werden. Alle Aufträge benötigen die gleiche Bearbeitungszeit. Jeder Auftrag A_i hat eine Deadline $D_i \in \mathbb{R}^+$ bis zu der er fertig sein muss.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Teilmengen von Aufträgen, die rechtzeitig bearbeitet werden können, ein Matroid ist.

(b) Wird ein Auftrag nicht rechtzeitig fertig, so muss eine Strafe P_i bezahlt werden, deren Höhe vom jeweiligen Auftrag abhängt. In welcher Reihenfolge sollten die Aufträge abgearbeitet werden, damit die Gesamtstrafe minimiert wird?

Hinweis/Spoiler: Sei o.B.d.A. $D_1 \leq D_2 \leq \cdots \leq D_n$. Eine Teilmenge $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ von k Aufträgen ($i_1 \neq \cdots \neq i_k \in \{1, \ldots, n\}$) kann rechtzeitig bearbeitet werden, wenn für alle $j \leq k$ gilt : $D_{i_j} \geq j$.

Problem 2: Algorithmus von De Pina

Abbildung 1 zeigt den so genannten *Peterson-Graph*. Grau und fett ist ein aufspannender Baum des Graphen eingezeichnet. Alle Kanten haben Gewicht 3.

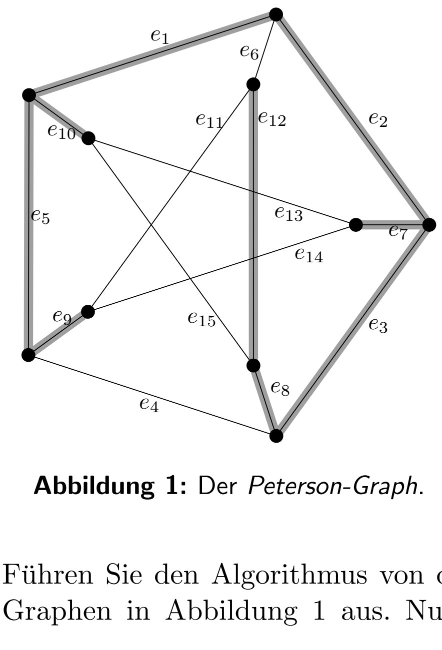

Abbildung 1: Der *Peterson-Graph*.

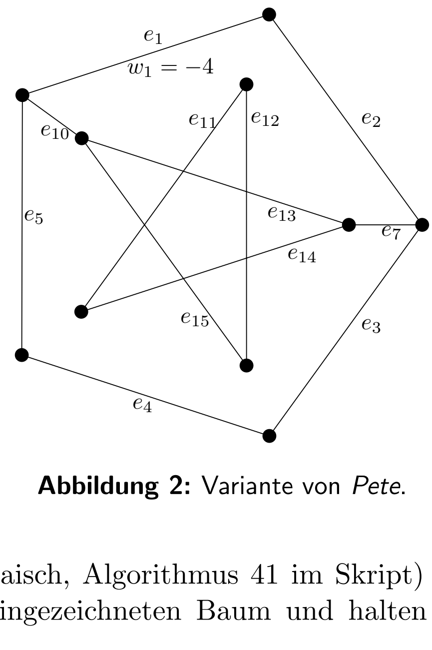

Abbildung 2: Variante von *Pete*.

(a) Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf dem Graphen in Abbildung 1 aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten Sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus folgendes: k, C_k, S_k und alle S_i welche geändert werden, sowie die resultierende Basis.

(b) In Abbildung 2 ist $\mathrm{Pete}_{6,8,9}$ zu sehen. Beachten Sie das negative Kantengewicht -4 von e_1. Alle anderen Gewichte seien hier 1. Raten Sie eine minimale Kreisbasis von $\mathrm{Pete}_{6,8,9}$.

Problem 3: Korrektheit der Fundamentalbasis-Definition – Kreisbasen

Zur Wiederholung:

- Für einen K-Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:
  - $B \subseteq V$ ist eine Basis von V.
  - $B \subseteq V$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.
  - $B \subseteq V$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
  - $B \subseteq V$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
- Eine Teilmenge $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ eines K-Vektorraums V heißt *linear unabhängig*, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = 0,\ a_i \in K \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall\, i,$$

  das heißt, der Nullvektor lässt sich nur als triviale Linearkombination der Vektoren in B beschreiben.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und $T = (V, E_T)$ ein aufspannender Baum in G. Dann ist die Fundamentalbasis (bzgl. T) des Kreisraumes $\mathcal{C}$ von G definiert als
$B_T := \{C_e \,|\, e \in E \setminus E_T,\ C_e \in \mathcal{C},\ E_{C_e} = \{e = \{u, v\}\} \cup \{\text{Pfadkanten von } u \text{ nach } v \text{ in } T\}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$, $m := |E|$, linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{C}$ ist. Gehen Sie dabei konstruktiv vor und beschreiben Sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B_T gebildet werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass $|B_T| = m - n + 1$ gilt, wobei $n := |V|$, $m := |E|$.

Problem 4: Kreisräume – Kreisbasen

(a) Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **exponentiell** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

(b) Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **linear** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.