Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Kräftebasierte Verfahren

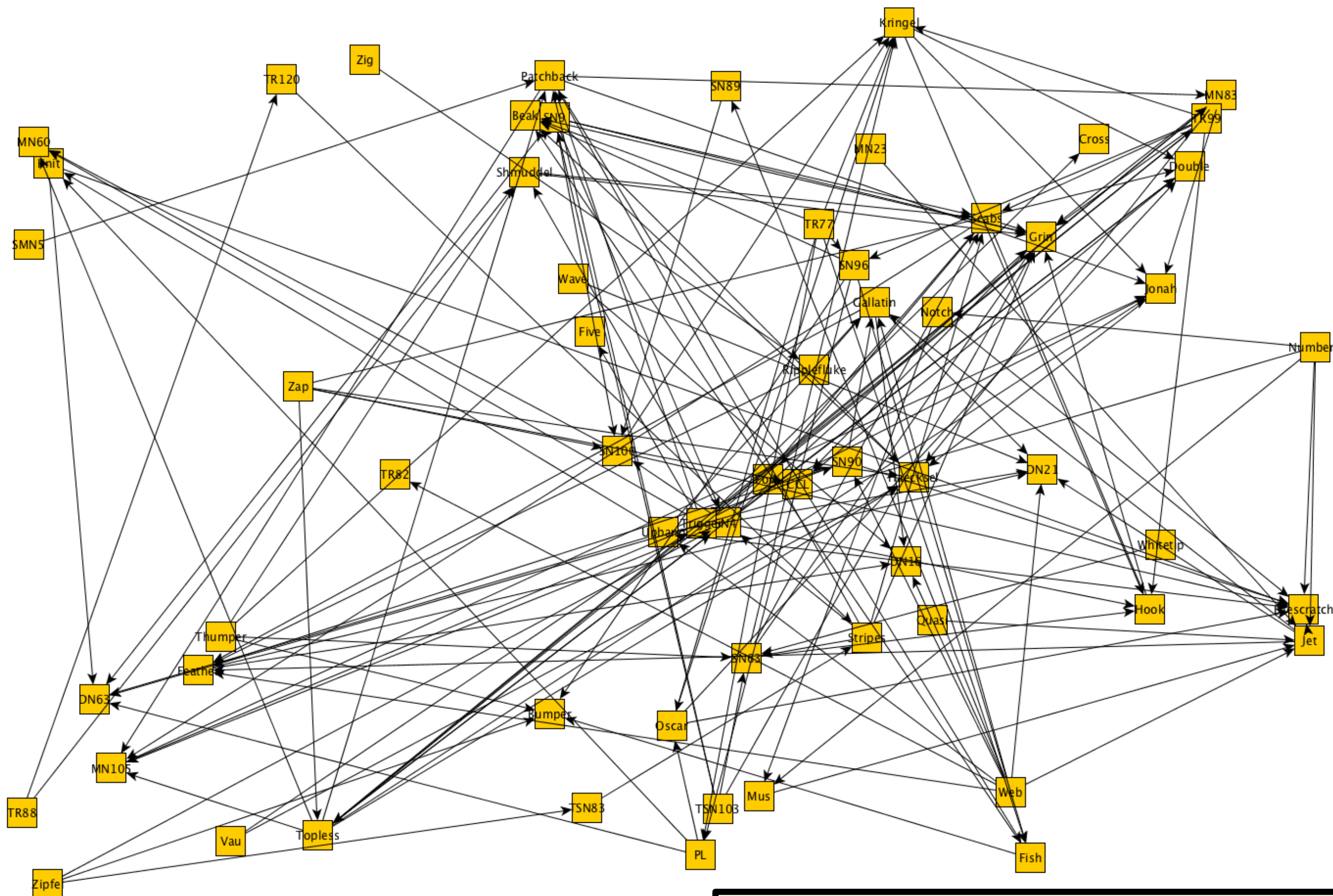
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Tamara Mchedlidze · **Martin Nöllenburg** · Ignaz Rutter

08.01.2013

Ein Beispielgraph...

Karlsruhe Institute of Technology

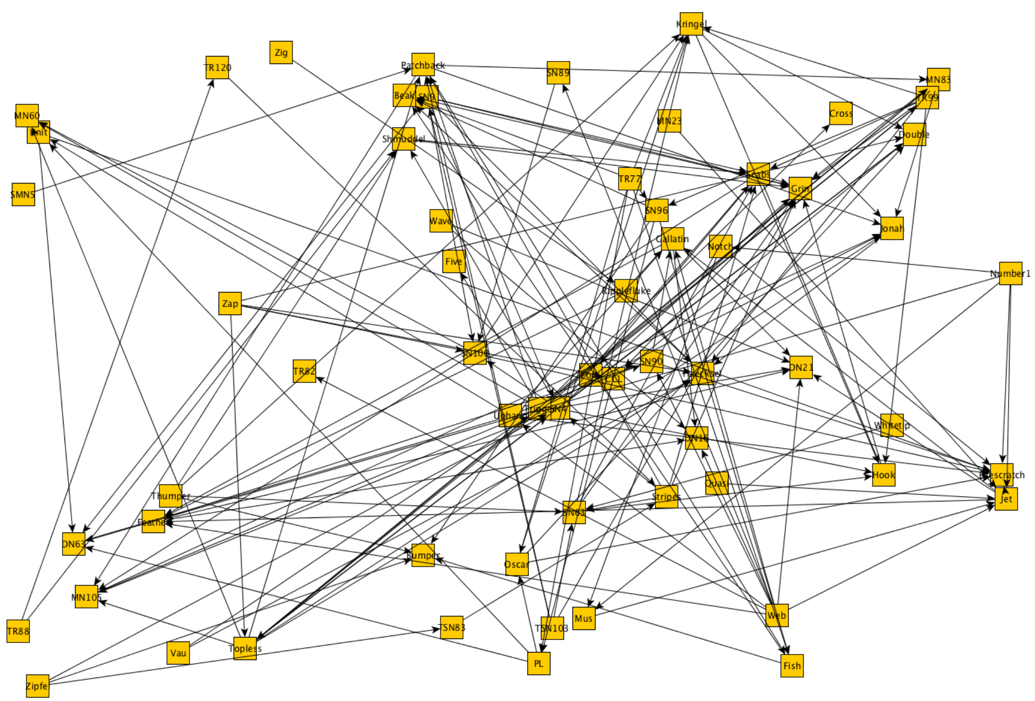


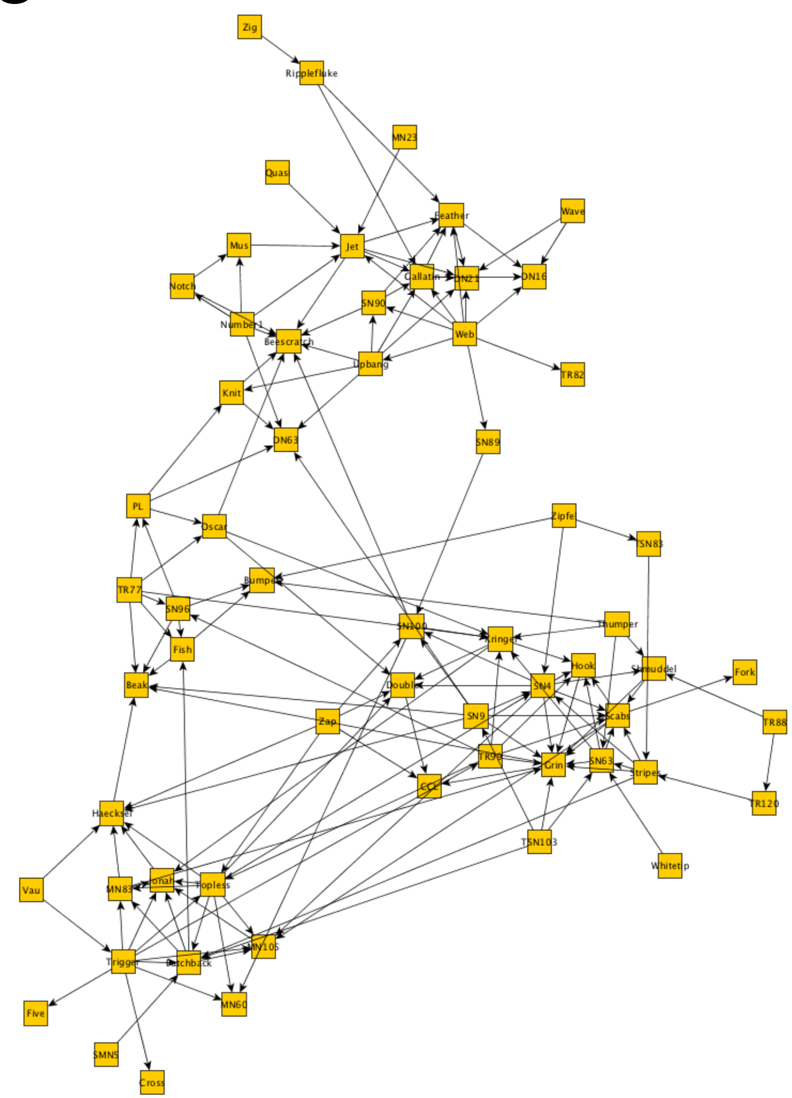
- Welche Eigenschaften haben wir?
- Welche Ästhetikkriterien sind sinnvoll?

Generisches Layoutproblem

Geg.: Graph $G = (V, E)$

Ges.: übersichtliche lesbare Zeichnung von G





Generisches Layoutproblem

Geg.: Graph $G = (V, E)$

Ges.: übersichtliche lesbare Zeichnung von G

Kriterien:

- adjazente Knoten nahe
- nicht-adjazente Knoten weiter entfernt
- Kanten kurz, geradlinig, ähnlich lang
- möglichst wenige Kantenkreuzungen
- Knoten gleichmäßig verteilt
- dichte Teilgraphen in gemeinsamem Bereich

Generisches Layoutproblem

Geg.: Graph $G = (V, E)$

Ges.: übersichtliche lesbare Zeichnung von G

Kriterien:

- adjazente Knoten nahe
- nicht-adjazente Knoten weiter entfernt
- Kanten kurz, geradlinig, ähnlich lang
- möglichst wenige Kantenkreuzungen
- Knoten gleichmäßig verteilt
- dichte Teilgraphen in gemeinsamem Bereich

⚠ Optimierungskriterien widersprechen sich zum Teil

Beispiel: feste Kantenlängen

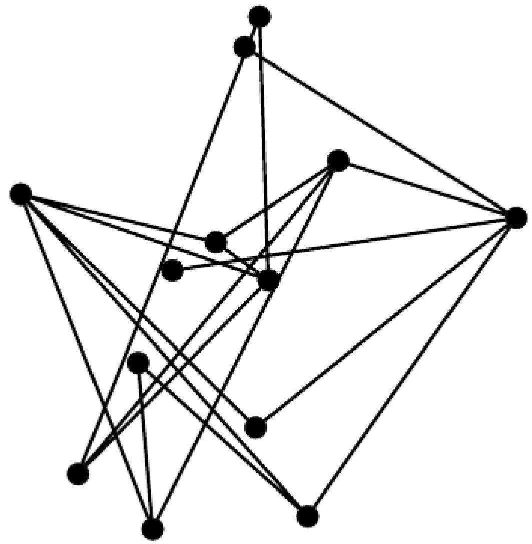
Geg.: Graph $G = (V, E)$, Soll-Längen $\ell(e)$ für alle $e \in E$

Ges.: Zeichnung von G, die die Kantenlängen realisiert

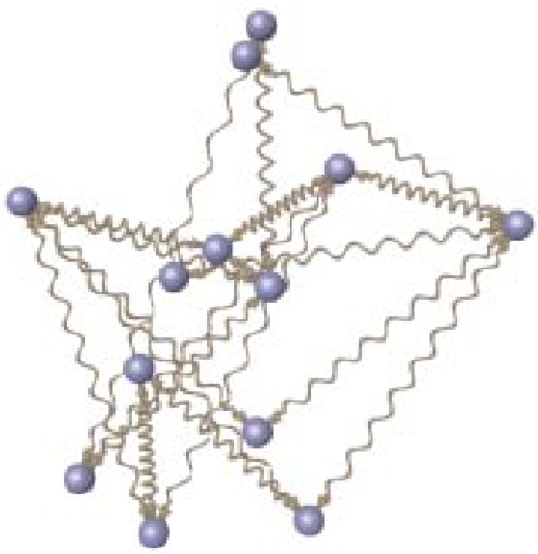
NP-schwer für

- Kantenlängen $\{1, 2\}$ [Saxe, 1980]
- planare Zeichnung mit Einheitslängen [Eades, Wormald, ’90]

Physikalisches Modell

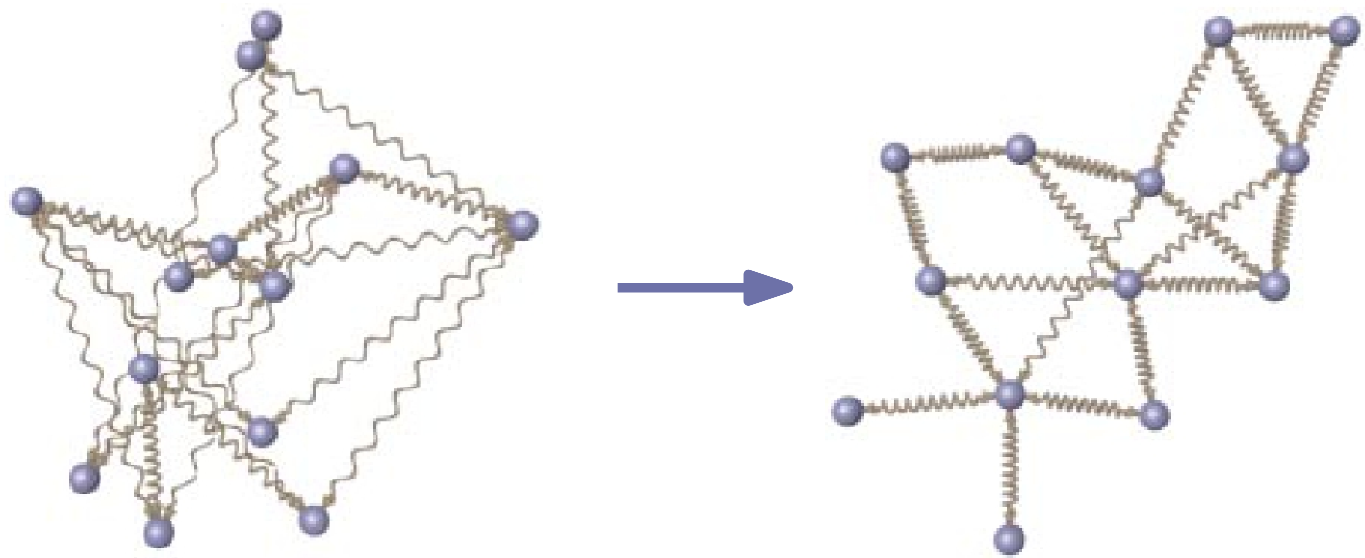


Physikalisches Modell



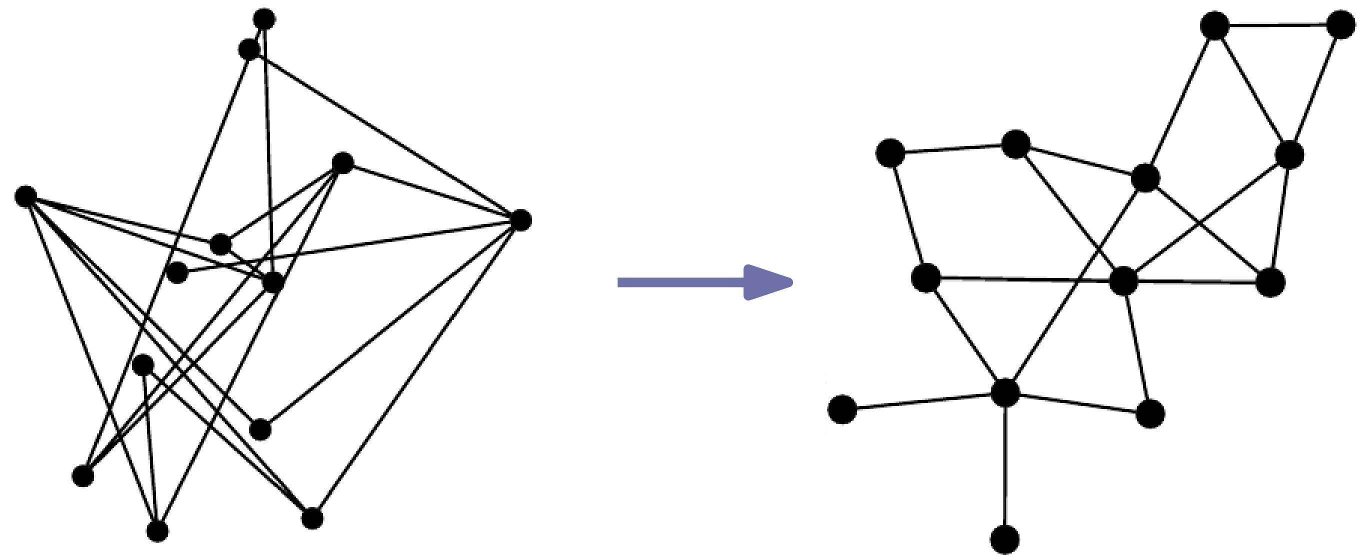
“To embed a graph we replace the vertices by steel rings and replace each edge with a spring to form a mechanical system . . .

Physikalisches Modell



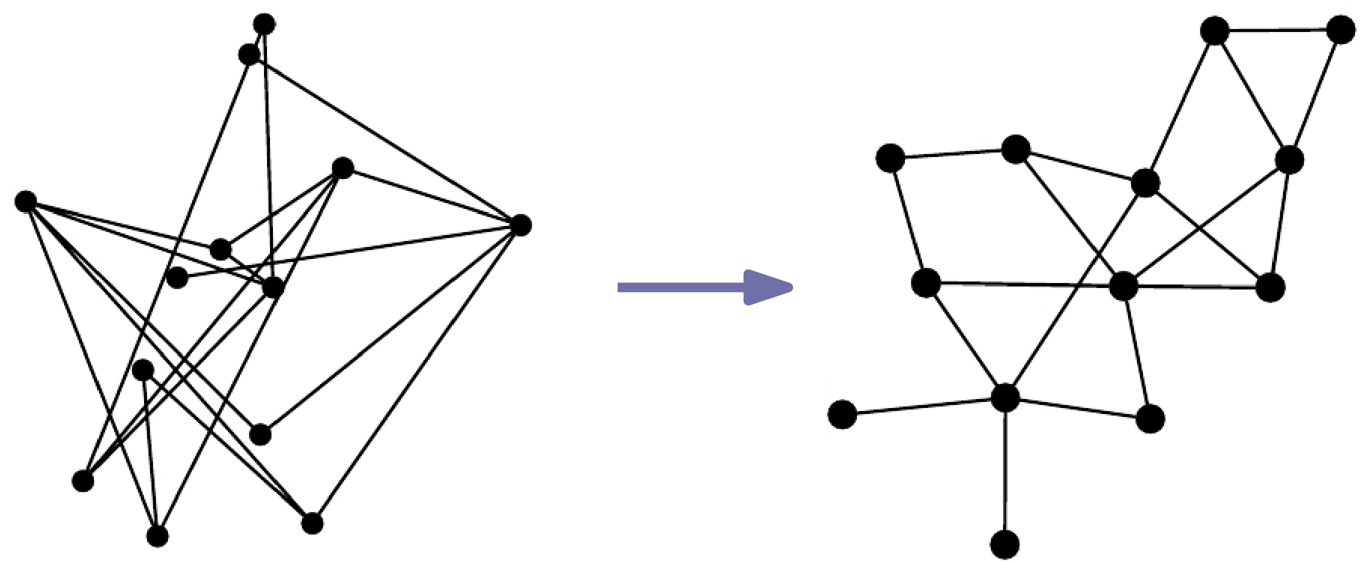
“To embed a graph we replace the vertices by steel rings and replace each edge with a spring to form a mechanical system . . . The vertices are placed in some initial layout and let go so that the spring forces on the rings move the system to a minimal energy state.” [Eades, ’84]

Physikalisches Modell



“To embed a graph we replace the vertices by steel rings and replace each edge with a spring to form a mechanical system ... The vertices are placed in some initial layout and let go so that the spring forces on the rings move the system to a minimal energy state.” [Eades, ’84]

Physikalisches Modell



Sogenannte **spring-embedder** Algorithmen, die nach diesem oder ähnlichen Prinzipien arbeiten, gehören zu den häufigst verwendeten Graphenzeichenmethoden in der Praxis.

“To … eac … are … pla … e … rings move the system to a minimal energy state.” [Eades, ’84]

Terminologie

$\ell = \ell(e)$	Ideallänge der Feder für Kante e
$p_v = (x_v, y_v)$	Position von Knoten v
$\|\|p_u - p_v\|\|$	Euklidischer Abstand zwischen u und v
$\overrightarrow{p_u p_v}$	Einheitsvektor von u nach v

Spring-Embedder (Eades, 1984)

Modell:

- abstoßende Kraft zw. nicht adjazenten Knoten u und v

$$f_{\mathsf{rep}}(p_u, p_v) = \frac{c_{\mathsf{rep}}}{||p_v - p_u||^2} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

Spring-Embedder (Eades, 1984)

Modell:

- abstoßende Kraft zw. nicht adjazenten Knoten u und v

$$f_{\text{rep}}(p_u, p_v) = \frac{c_{\text{rep}}}{||p_v - p_u||^2} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

- anziehende Kraft zwischen adjazenten Knoten u und v

$$f_{\text{spring}}(p_u, p_v) = c_{\text{spring}} \cdot \log \frac{||p_u - p_v||}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

Spring-Embedder (Eades, 1984)

Modell:

- abstoßende Kraft zw. nicht adjazenten Knoten u und v

$$f_{\text{rep}}(p_u, p_v) = \frac{c_{\text{rep}}}{||p_v - p_u||^2} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

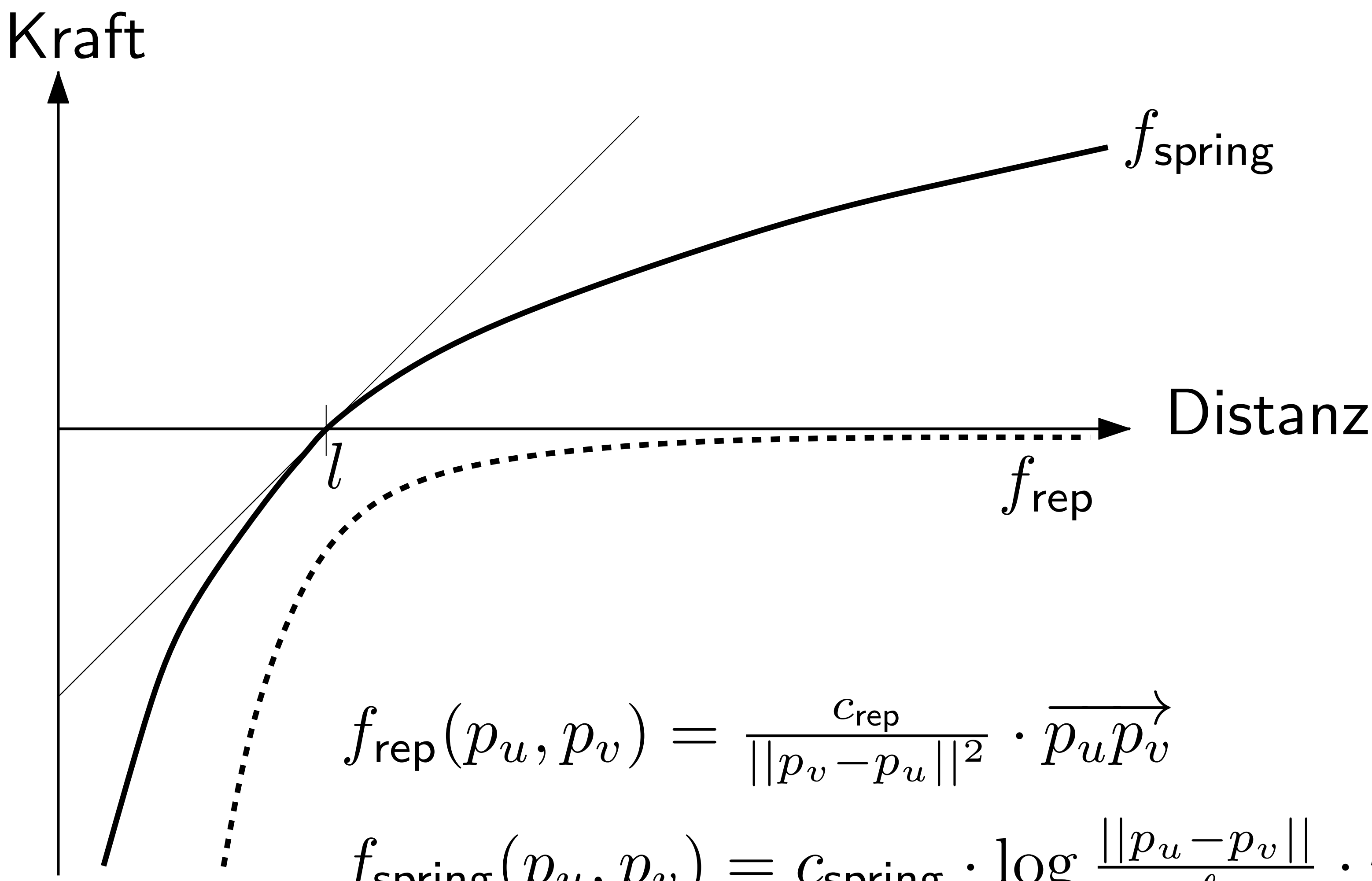
- anziehende Kraft zwischen adjazenten Knoten u und v

$$f_{\text{spring}}(p_u, p_v) = c_{\text{spring}} \cdot \log \frac{||p_u - p_v||}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

- resultierender Verschiebungsvektor für Knoten v

$$F_v = \sum_{u:\{u,v\} \notin E} f_{rep}(p_u, p_v) + \sum_{u:\{u,v\} \in E} f_{spring}(p_u, p_v)$$

Kräftediagramm Spring-Embedder (Eades, 1984)



$$f_{\text{rep}}(p_u, p_v) = \frac{c_{\text{rep}}}{||p_v - p_u||^2} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

$$f_{\text{spring}}(p_u, p_v) = c_{\text{spring}} \cdot \log \frac{||p_u - p_v||}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

Algorithmus Spring-Embedder (Eades, 1984)

Input: $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Anfangslayout $p = (p_v)_{v \in V}$, Iterationszahl $K \in \mathbb{N}$, Schwellwert $\varepsilon > 0$

Output: Layout p mit „niedriger innerer Anspannung“

$t \leftarrow 1$

while $t < K$ **and** $\max_{v \in V} \|F_v(t)\| > \varepsilon$ **do**

  foreach $v \in V$ **do**

    $F_v(t) \leftarrow \sum_{u:\{u,v\} \notin E} f_{rep}(p_u, p_v) + \sum_{u:\{u,v\} \in E} f_{spring}(p_u, p_v)$

  foreach $v \in V$ **do**

    $p_v \leftarrow p_v + \delta \cdot F_v(t)$

  $t \leftarrow t + 1$

Algorithmus Spring-Embedder (Eades, 1984)

Input: $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Anfangslayout $p = (p_v)_{v \in V}$, Iterationszahl $K \in \mathbb{N}$, Schwellwert $\varepsilon > 0$

Output: Layout p mit „niedriger innerer Anspannung“

$t \leftarrow 1$

while $t < K$ **and** $\max_{v \in V} \|F_v(t)\| > \varepsilon$ **do**

  foreach $v \in V$ **do**

    $F_v(t) \leftarrow \sum_{u:\{u,v\} \notin E} f_{rep}(p_u, p_v) + \sum_{u:\{u,v\} \in E} f_{spring}(p_u, p_v)$

  foreach $v \in V$ **do**

    $p_v \leftarrow p_v + \delta \cdot F_v(t)$

  $t \leftarrow t + 1$

Demo

Algorithmus Spring-Embedder (Eades, 1984)

Input: $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Anfangslayout $p = (p_v)_{v \in V}$, Iterationszahl $K \in \mathbb{N}$,

Output: Layout p mit „niedri

$t \leftarrow 1$

while $t < K$ **and** $\max_{v \in V} \|F$

  foreach $v \in V$ **do**

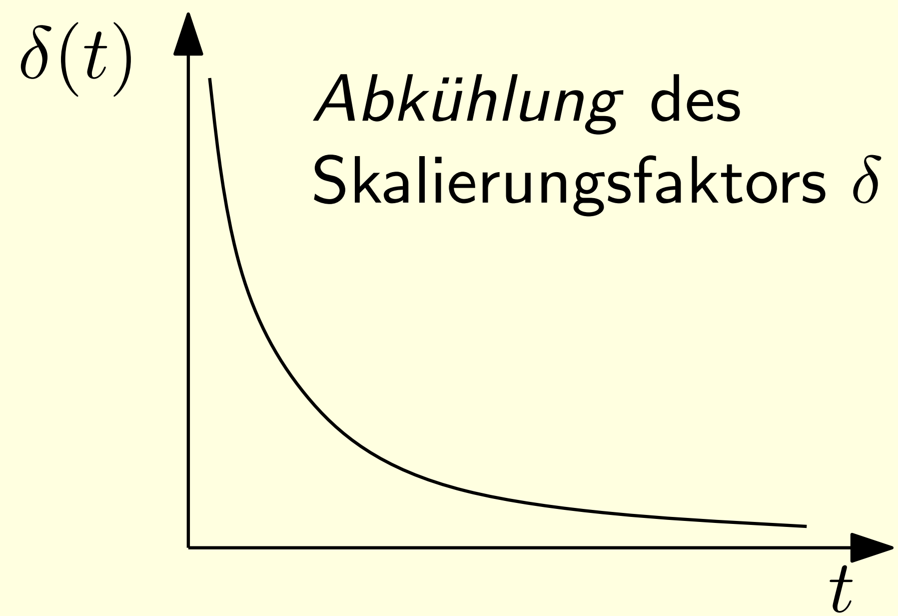
    $F_v(t) \leftarrow \sum_{u:\{u,v\} \notin E} f$

    $\sum_{u:\{u,v\} \in E} f_{spring}(p_v$

  foreach $v \in V$ **do**

    $p_v \leftarrow p_v + \delta(t) \cdot F_v(t)$

  $t \leftarrow t + 1$



Diskussion

Vorteile

- sehr einfacher Algorithmus
- gute Ergebnisse für kleine und mittel-große Graphen
- empirisch gute Wiedergabe von Symmetrien und Struktur

Diskussion

Vorteile

- sehr einfacher Algorithmus
- gute Ergebnisse für kleine und mittel-große Graphen
- empirisch gute Wiedergabe von Symmetrien und Struktur

Nachteile

- System am Ende möglicherweise nicht stabil
- lokale Minima
- Zeitaufwand für f_{spring} in $\mathcal{O}(|E|)$ und für f_{rep} in $\mathcal{O}(|V|^2)$

Diskussion

Vorteile

- sehr einfacher Algorithmus
- gute Ergebnisse für kleine und mittel-große Graphen
- empirisch gute Wiedergabe von Symmetrien und Struktur

Nachteile

- System am Ende möglicherweise nicht stabil
- lokale Minima
- Zeitaufwand für f_{spring} in $\mathcal{O}(|E|)$ und für f_{rep} in $\mathcal{O}(|V|^2)$

Einfluss

- Original-Paper von Peter Eades 1123-mal zitiert
- Basis für viele spätere Varianten

Variante: Fruchterman & Reingold (1991)

Modell:

- abstoßende Kraft zwischen **allen** Knotenpaaren u und v

$$f_{\text{rep}}(p_u, p_v) = \frac{\ell^2}{||p_v - p_u||} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

Variante: Fruchterman & Reingold (1991)

Modell:

- abstoßende Kraft zwischen **allen** Knotenpaaren u und v

$$f_{\mathsf{rep}}(p_u, p_v) = \frac{\ell^2}{||p_v - p_u||} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

- anziehende Kraft zwischen adjazenten Knoten u und v

$$f_{\mathsf{attr}}(p_u, p_v) = \frac{||p_u - p_v||^2}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

Variante: Fruchterman & Reingold (1991)

Modell:

- abstoßende Kraft zwischen **allen** Knotenpaaren u und v

$$f_{\mathsf{rep}}(p_u, p_v) = \frac{\ell^2}{||p_v - p_u||} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

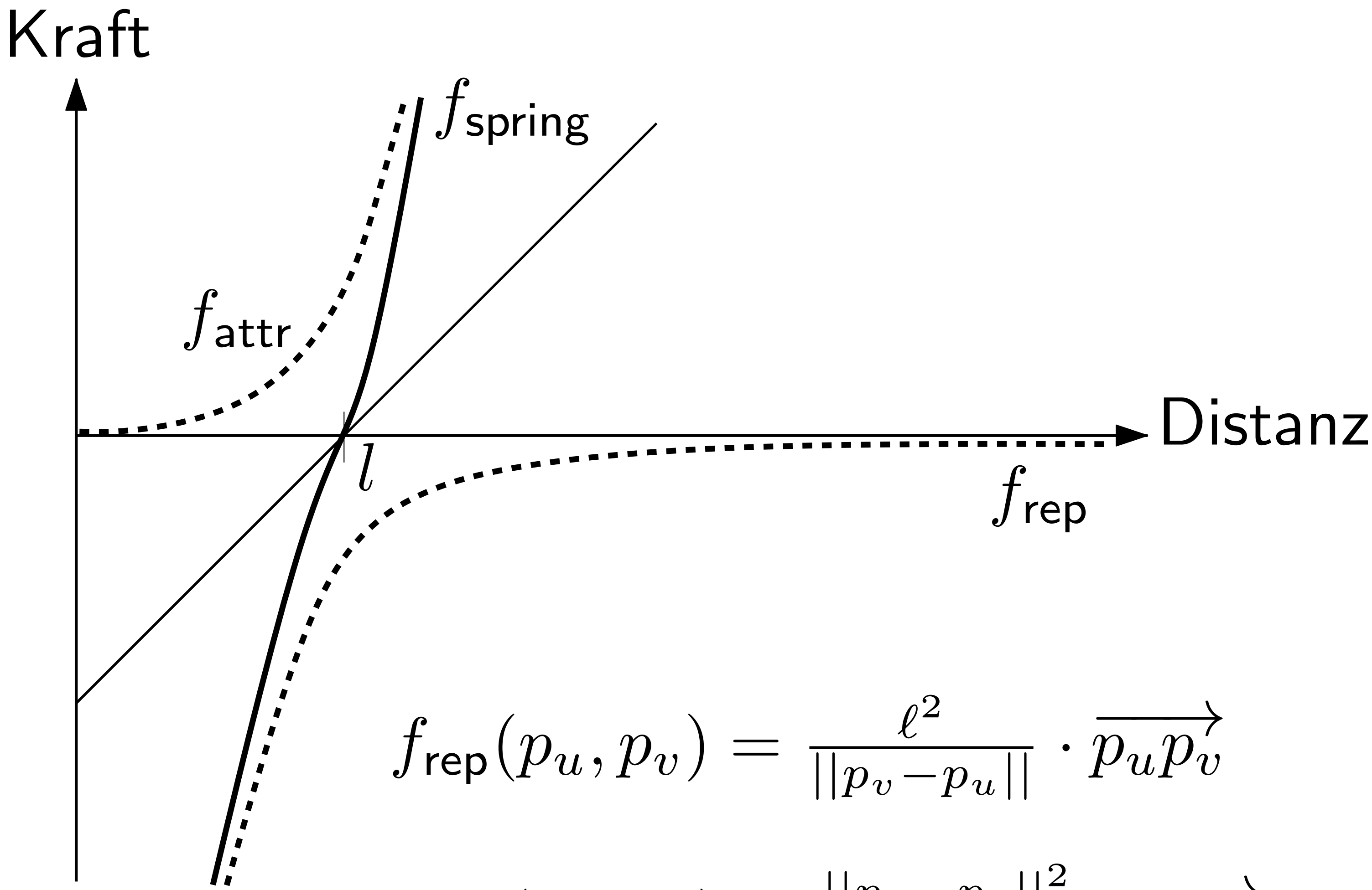
- anziehende Kraft zwischen adjazenten Knoten u und v

$$f_{\mathsf{attr}}(p_u, p_v) = \frac{||p_u - p_v||^2}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

- resultierende Federkraft zw. adjazenten Knoten u und v

$$f_{\mathsf{spring}}(p_u, p_v) = f_{\mathsf{rep}}(p_u, p_v) + f_{\mathsf{attr}}(p_u, p_v)$$

Kräftediagramm Fruchtermann & Reingold

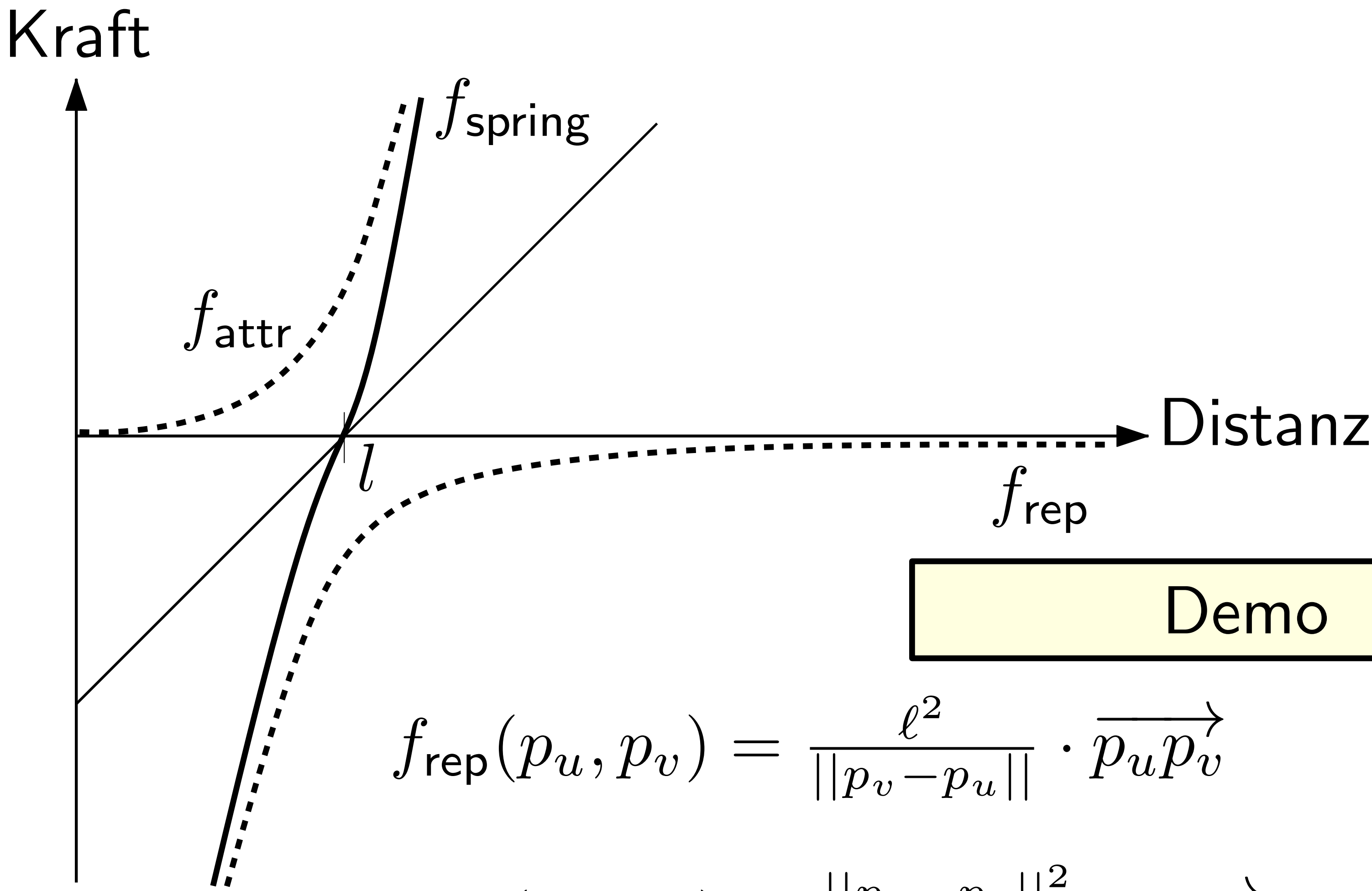


$$f_{\text{rep}}(p_u, p_v) = \frac{\ell^2}{||p_v - p_u||} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

$$f_{\text{attr}}(p_u, p_v) = \frac{||p_u - p_v||^2}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

$$f_{\text{spring}}(p_u, p_v) = f_{\text{rep}}(p_u, p_v) + f_{\text{attr}}(p_u, p_v)$$

Kräftediagramm Fruchtermann & Reingold



Demo

$$f_{\text{rep}}(p_u, p_v) = \frac{\ell^2}{||p_v - p_u||} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$$

$$f_{\text{attr}}(p_u, p_v) = \frac{||p_u - p_v||^2}{\ell} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$$

$$f_{\text{spring}}(p_u, p_v) = f_{\text{rep}}(p_u, p_v) + f_{\text{attr}}(p_u, p_v)$$

Weitere mögliche Komponenten

- **Massenträgheit**
- **Gravitation**
- **magnetische Richtungskraft**

Ideen zur Modellierung?

Weitere mögliche Komponenten

- **Massenträgheit**

  definiere Knotenmasse $\Phi(v) = 1 + \deg(v)/2$

  setze $f_{\mathsf{attr}}(p_u, p_v) \leftarrow f_{\mathsf{attr}}(p_u, p_v) \cdot 1/\phi(v)$

- **Gravitation**

- **magnetische Richtungskraft**

Weitere mögliche Komponenten

Karlsruhe Institute of Technology

- **Massenträgheit**

  definiere Knotenmasse $\Phi(v) = 1 + \deg(v)/2$

  setze $f_{\text{attr}}(p_u, p_v) \leftarrow f_{\text{attr}}(p_u, p_v) \cdot 1/\phi(v)$

- **Gravitation**

  definiere Schwerpunkt $p_{\text{bary}} = 1/|V| \cdot \sum_{v \in V} p_v$

  $f_{\text{grav}}(p_v) = c_{\text{grav}} \cdot \Phi(v) \cdot \overrightarrow{p_v p_{\text{bary}}}$

- **magnetische Richtungskraft**

Weitere mögliche Komponenten

- **Massenträgheit**

  definiere Knotenmasse $\Phi(v) = 1 + \deg(v)/2$

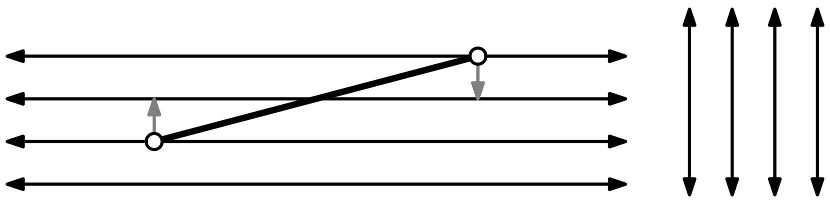
  setze $f_{\text{attr}}(p_u, p_v) \leftarrow f_{\text{attr}}(p_u, p_v) \cdot 1/\phi(v)$

- **Gravitation**

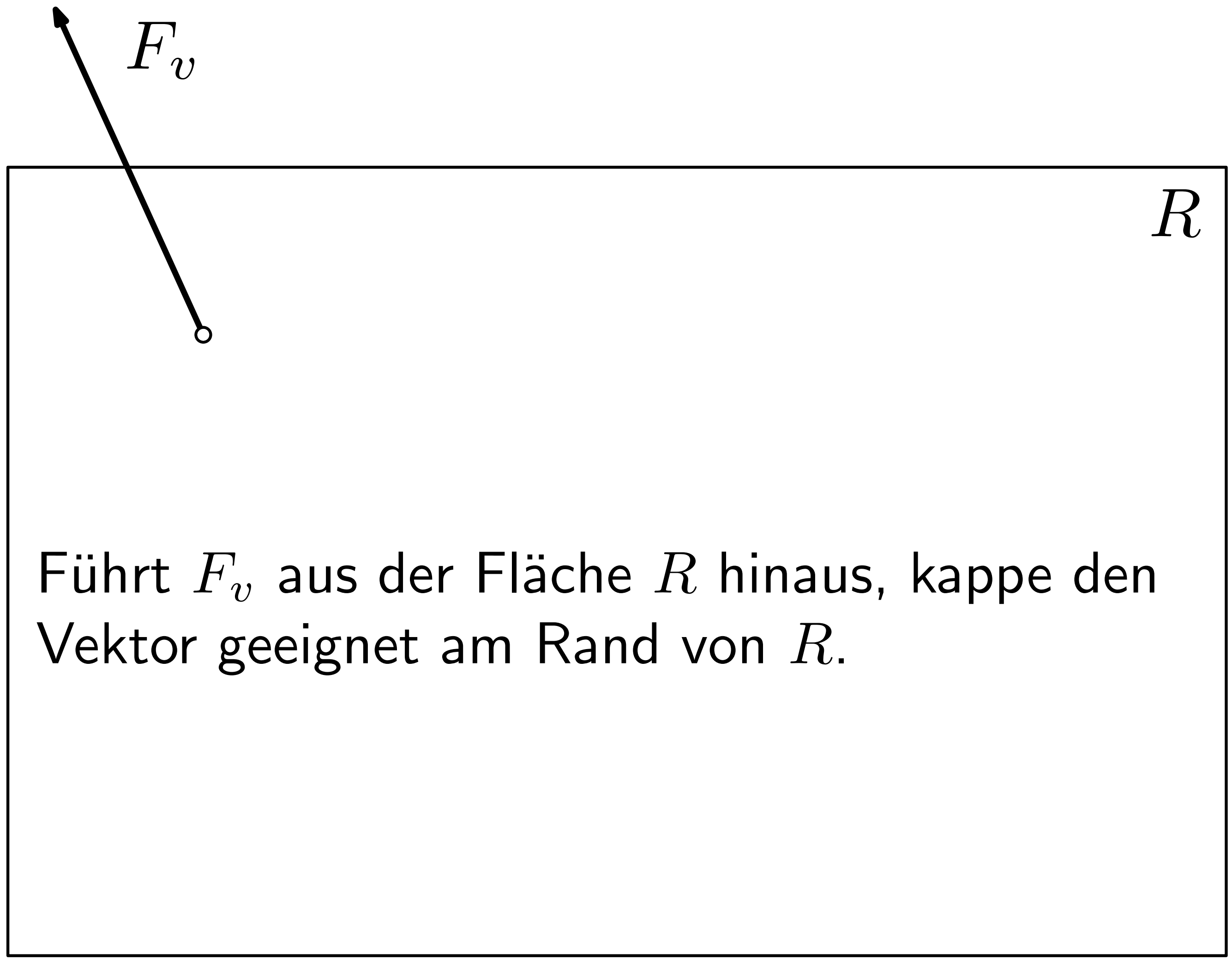
  definiere Schwerpunkt $p_{\text{bary}} = 1/|V| \cdot \sum_{v \in V} p_v$

  $f_{\text{grav}}(p_v) = c_{\text{grav}} \cdot \Phi(v) \cdot \overrightarrow{p_v p_{\text{bary}}}$

- **magnetische Richtungskraft**
  - definiere Magnetfeld (z.B. vertikal und horizontal)
  - projeziere Kanten auf nächste Richtung des Magnetfeldes
  - definiere anziehende Kraft zu projezierten Knoten

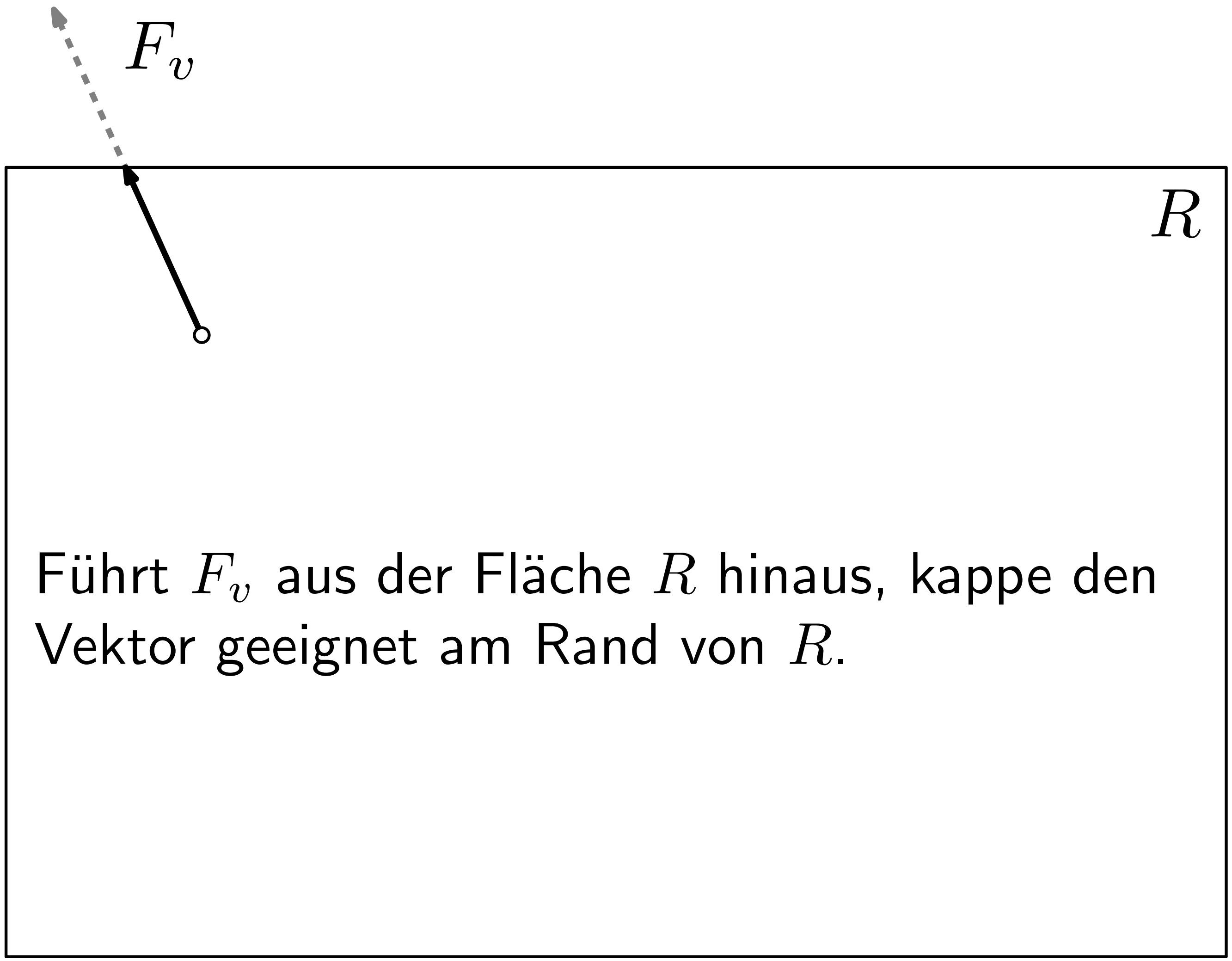


Beschränkte Zeichenfläche



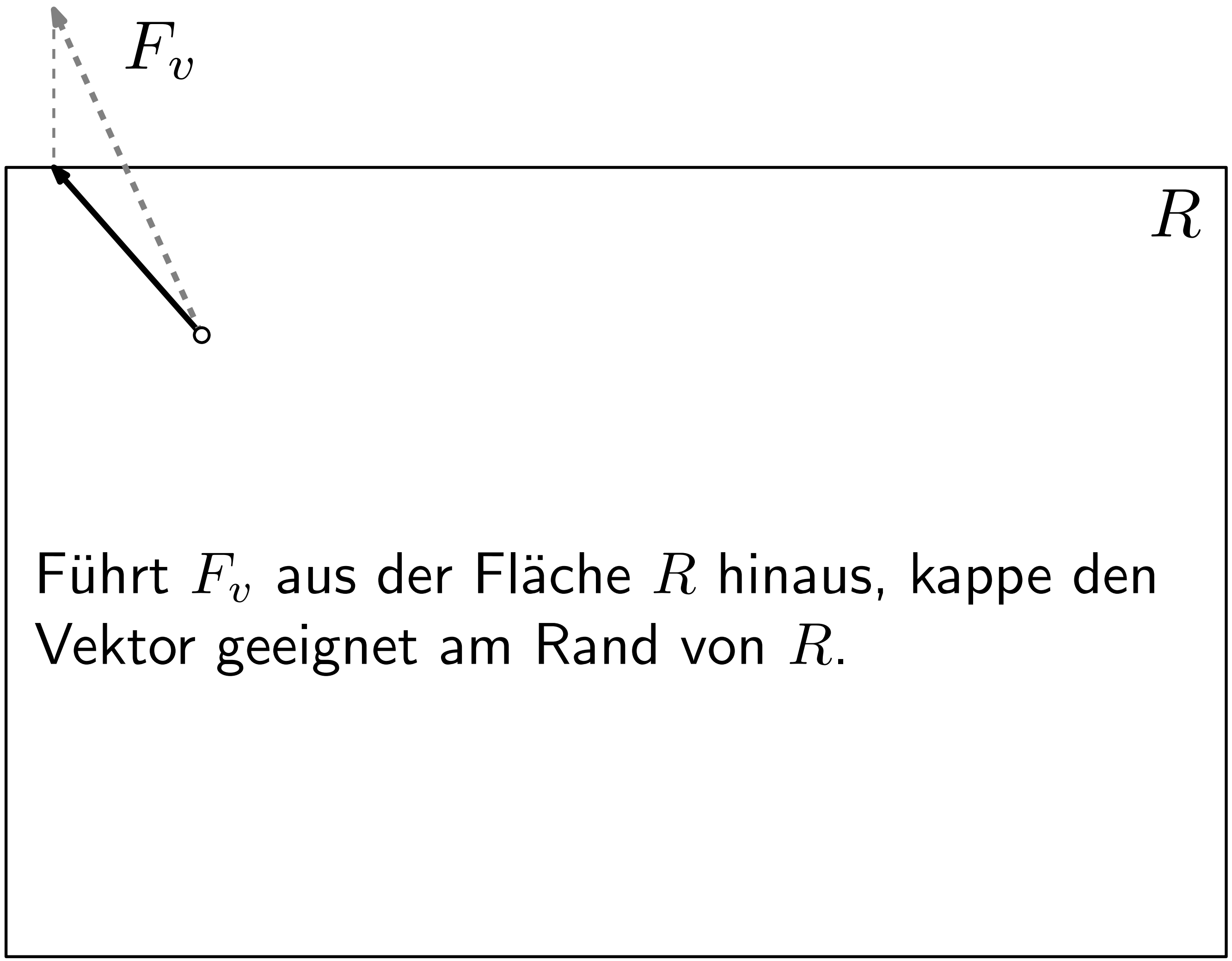
Führt F_v aus der Fläche R hinaus, kappe den Vektor geeignet am Rand von R.

Beschränkte Zeichenfläche



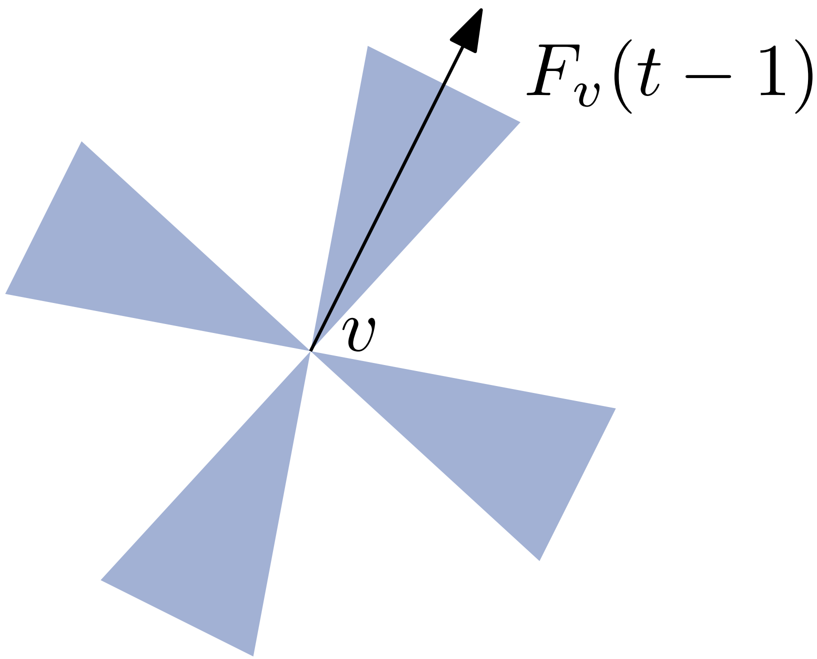
Führt F_v aus der Fläche R hinaus, kappe den Vektor geeignet am Rand von R.

Beschränkte Zeichenfläche



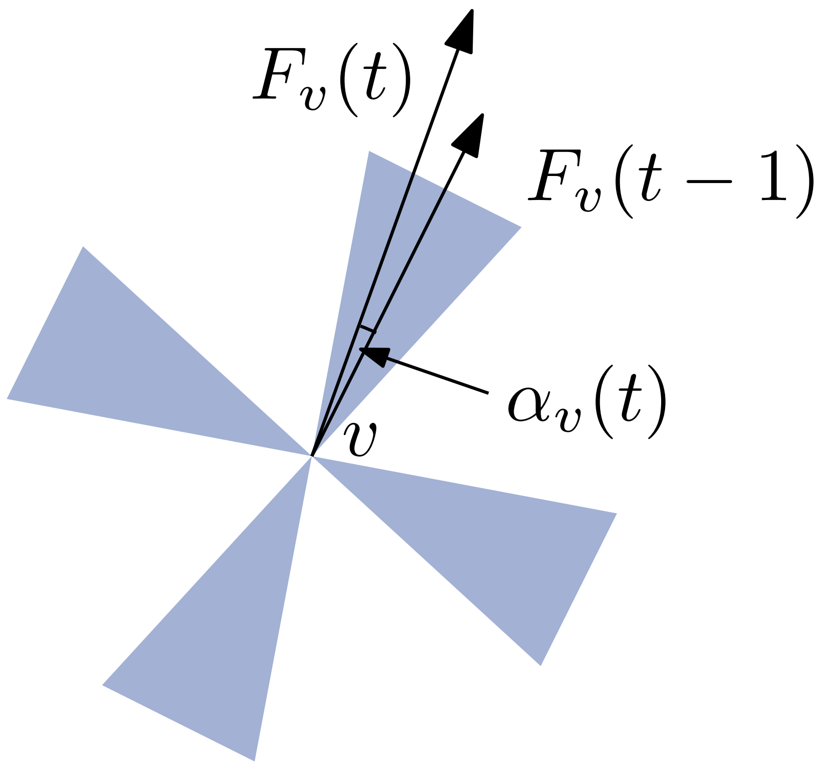
Führt F_v aus der Fläche R hinaus, kappe den Vektor geeignet am Rand von R.

Adaptive Verschiebung



- speichere alten Verschiebevektor $F_v(t-1)$

Adaptive Verschiebung

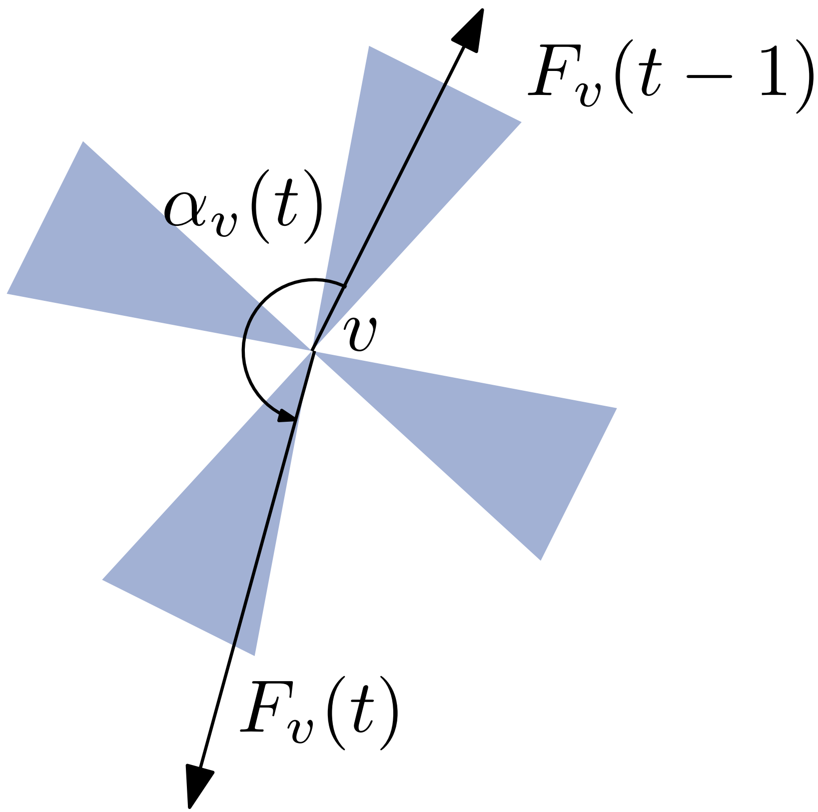


- speichere alten Verschiebevektor $F_v(t-1)$

lokales Abkühlen

- $\cos(\alpha_v(t)) \approx 1$: gleiche Richtung $\rightarrow$ Temperatur erhöhen

Adaptive Verschiebung

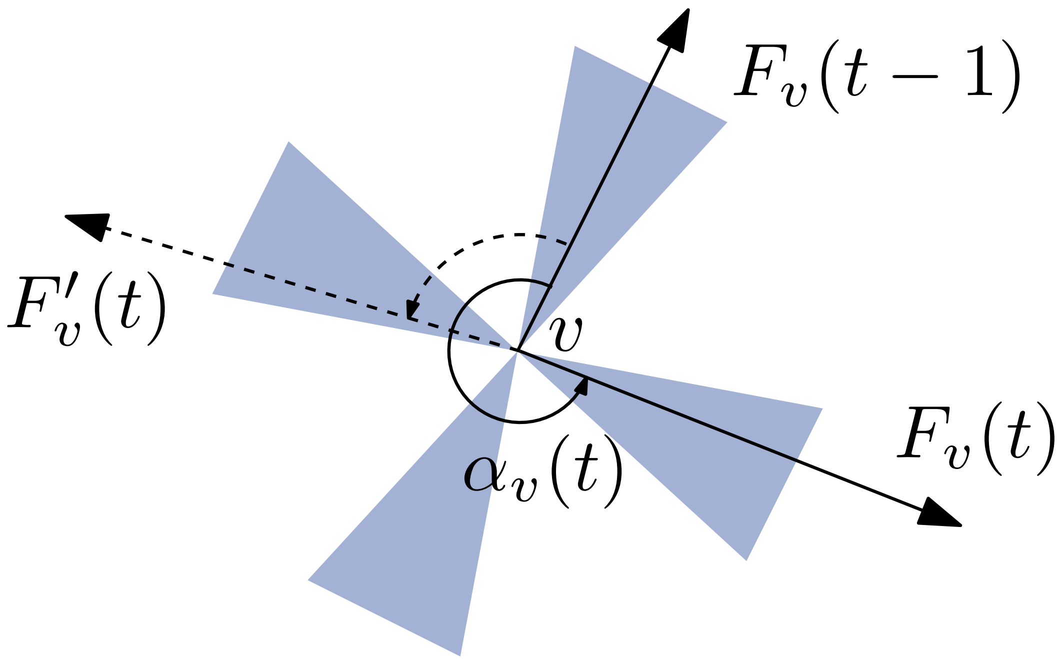


- speichere alten Verschiebevektor $F_v(t-1)$

lokales Abkühlen

- $\cos(\alpha_v(t)) \approx 1$:
  gleiche Richtung
  $\to$ Temperatur erhöhen
- $\cos(\alpha_v(t)) \approx -1$:
  Oszillation
  $\to$ Temperatur verringern

Adaptive Verschiebung



- speichere alten Verschiebevektor $F_v(t-1)$

lokales Abkühlen

- $\cos(\alpha_v(t)) \approx 1$: gleiche Richtung $\rightarrow$ Temperatur erhöhen
- $\cos(\alpha_v(t)) \approx -1$: Oszillation $\rightarrow$ Temperatur verringern
- $\cos(\alpha_v(t)) \approx 0$: Rotation $\rightarrow$ Rotationszähler updaten, Temperatur verringern

Diskussion

Vorteile

- weiterhin sehr einfacher Algorithmus
- superlineare Kräfte $\rightarrow$ schnellere Konvergenz
- weitere Modifikationen verbessern Layoutqualität und führen zu schnellerer Konvergenz

Diskussion

Karlsruhe Institute of Technology

Vorteile

- weiterhin sehr einfacher Algorithmus
- superlineare Kräfte $\rightarrow$ schnellere Konvergenz
- weitere Modifikationen verbessern Layoutqualität und führen zu schnellerer Konvergenz

Nachteile

- Stabilität weiterhin nicht garantiert
- lokale Minima möglich
- quadratischer Zeitaufwand für abstoßende Kräfte

Diskussion

Vorteile

- weiterhin sehr einfacher Algorithmus
- superlineare Kräfte → schnellere Konvergenz
- weitere Modifikationen verbessern Layoutqualität und führen zu schnellerer Konvergenz

Nachteile

- Stabilität weiterhin nicht garantiert
- lokale Minima möglich
- quadratischer Zeitaufwand für abstoßende Kräfte

Einfluss

- Variante von Fruchterman und Reingold wohl populärste kräftebasierte Methode (1927-mal zitiert)

Diskussion

Vorteile

- weiterhin sehr einfacher Algorithmus
- superlineare Kräfte $\to$ schnellere Konvergenz
- weitere Modifikationen verbessern Layoutqualität und führen zu schnellerer Konvergenz

Nachteile

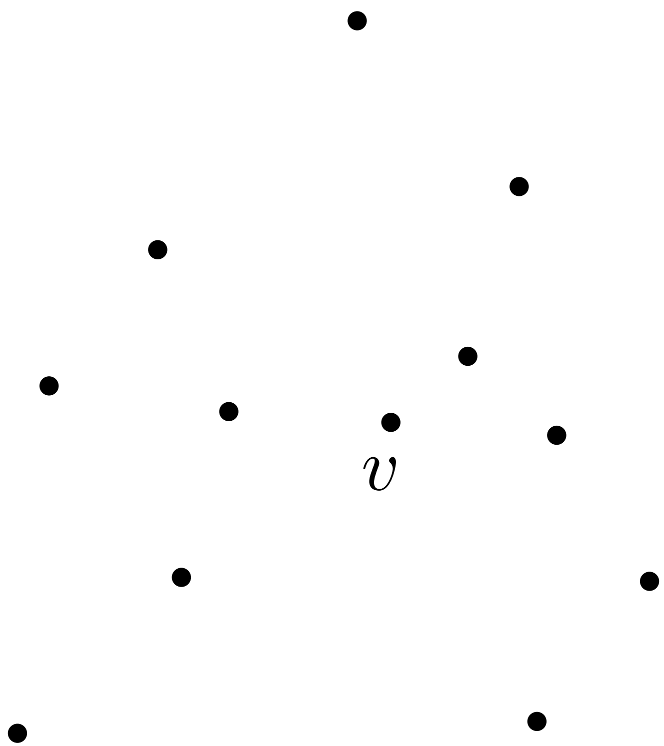
- Stabilität weiterhin nicht garantiert
- lokale Minima möglich
- quadratischer Zeitaufwand für abstoßende Kräfte

Wie könnte man das verringern?

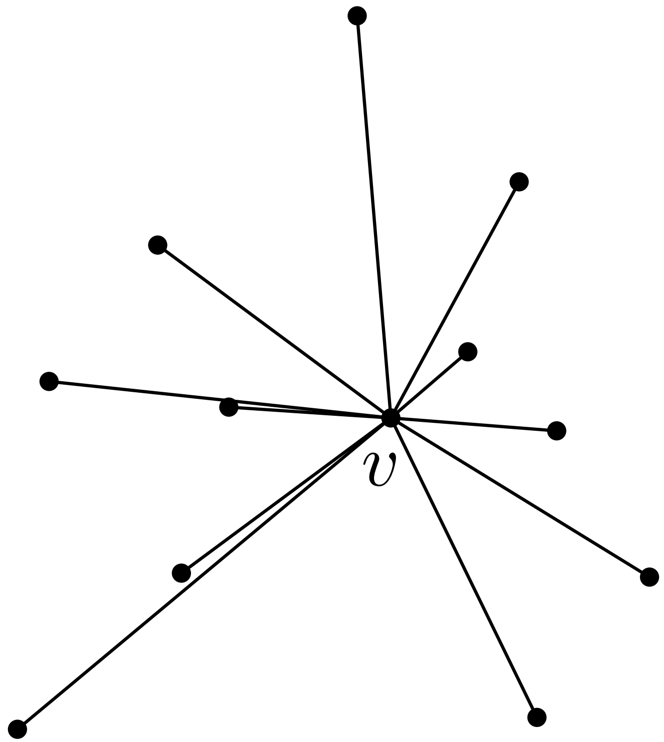
Einfluss

- Variante von Fruchterman und Reingold wohl populärste kräftebasierte Methode (1927-mal zitiert)

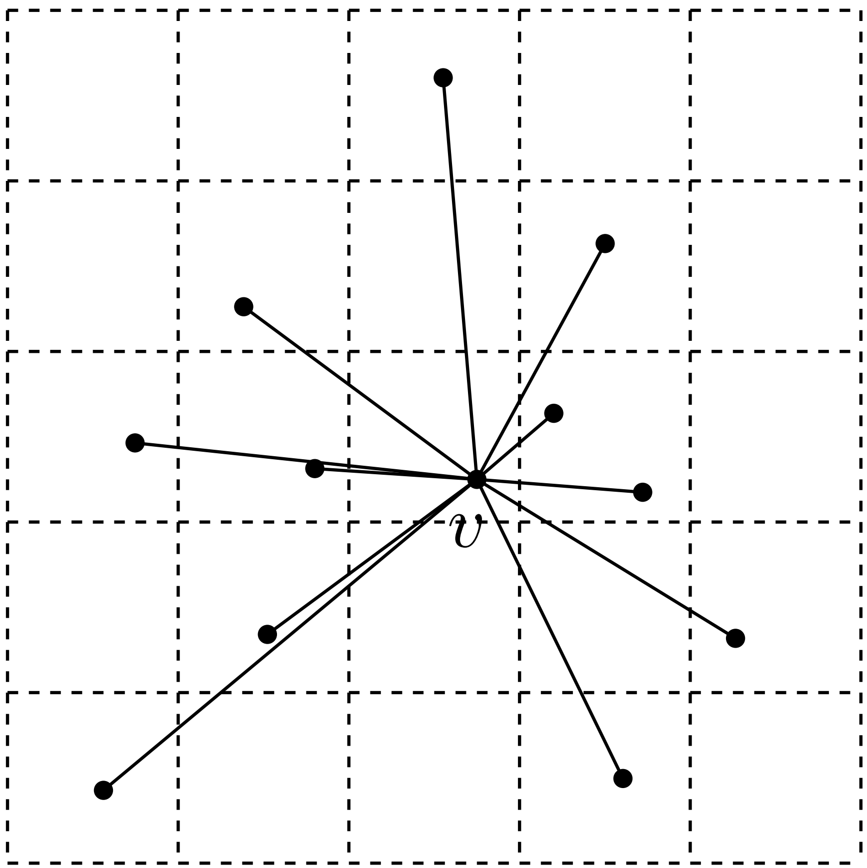
Gittertechnik (Fruchterman, Reingold, 1990)



Gittertechnik (Fruchterman, Reingold, 1990)

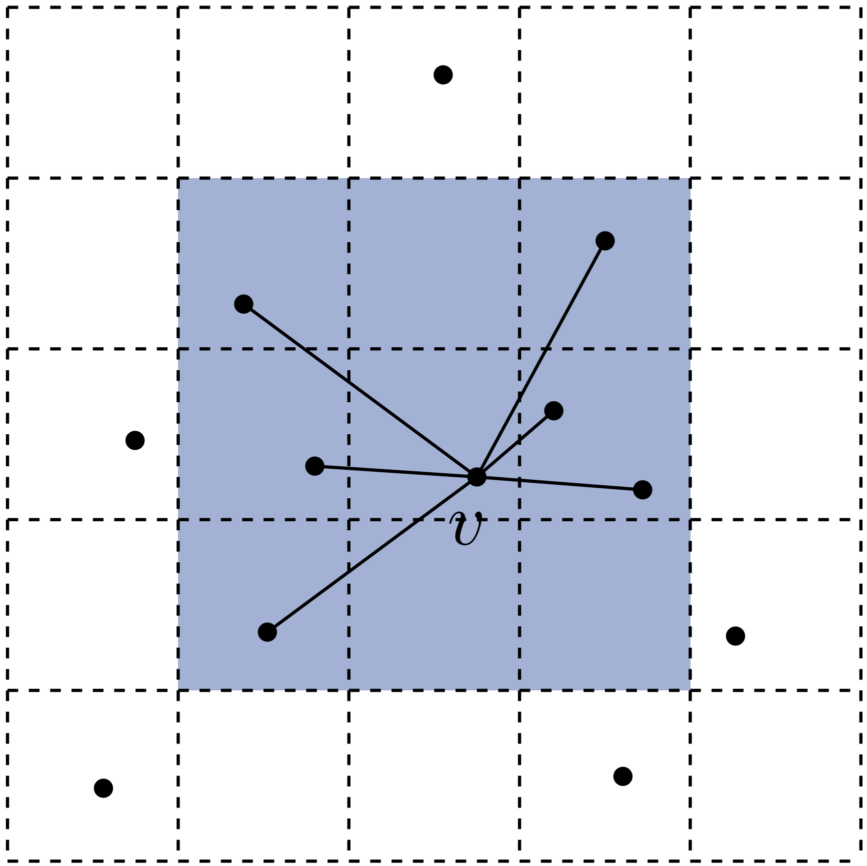


Gittertechnik (Fruchterman, Reingold, 1990)



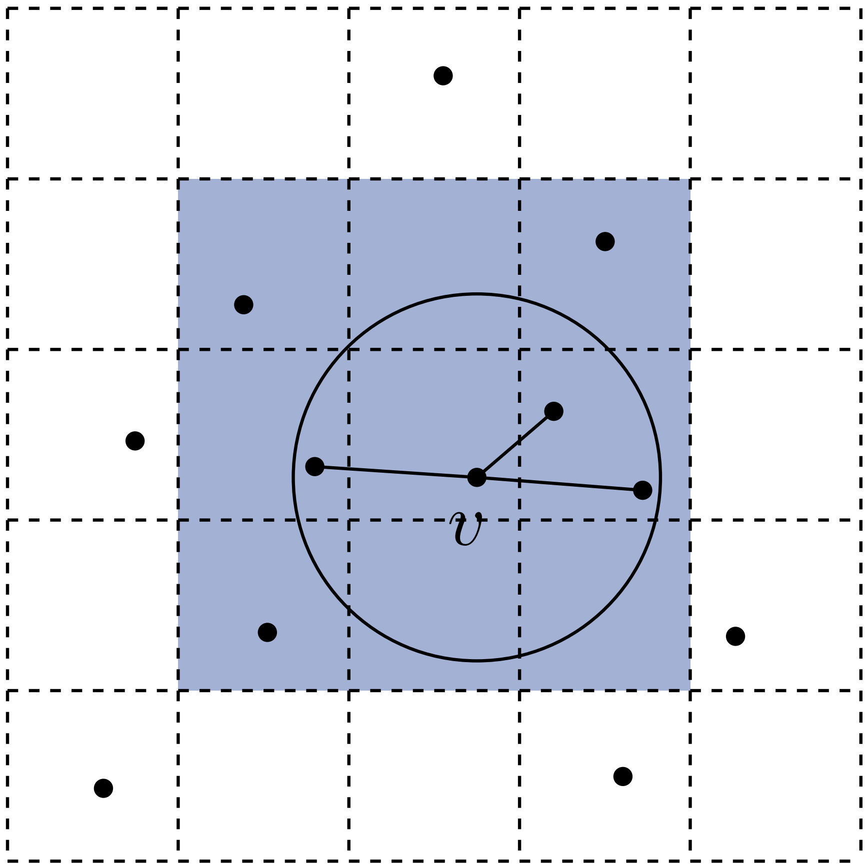
- zerlege Ebene in Gitterzellen

Gittertechnik (Fruchterman, Reingold, 1990)



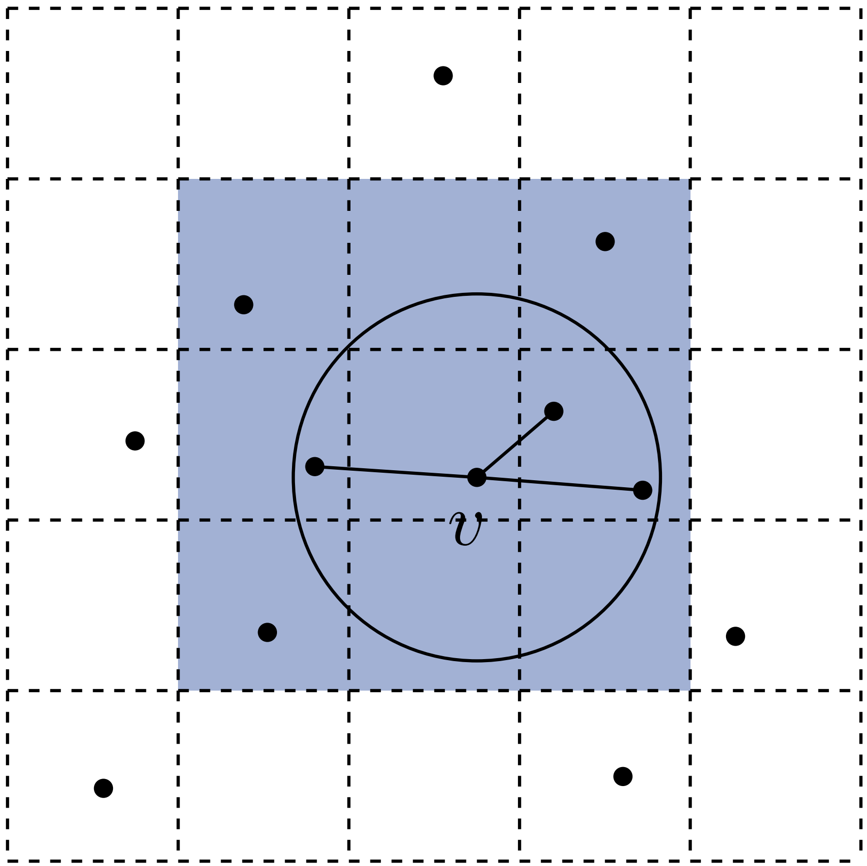
- zerlege Ebene in Gitterzellen
- betrachte abstoßende Kräfte nur zu Knoten in Nachbarzellen

Gittertechnik (Fruchterman, Reingold, 1990)



- zerlege Ebene in Gitterzellen
- betrachte abstoßende Kräfte nur zu Knoten in Nachbarzellen
- und nur falls kleiner als Maximalabstand $d_{\max}$

Gittertechnik (Fruchterman, Reingold, 1990)

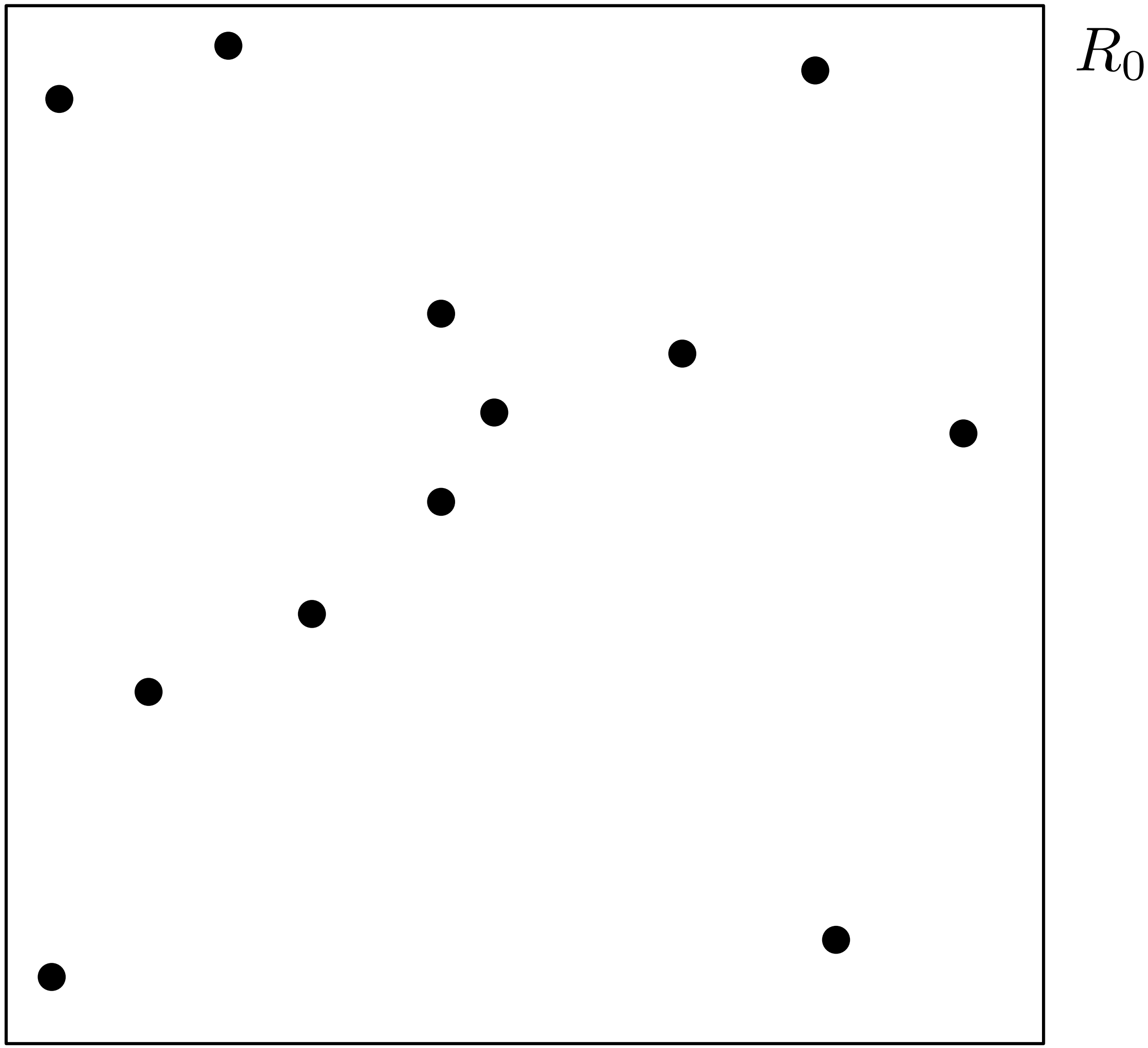


- zerlege Ebene in Gitterzellen
- betrachte abstoßende Kräfte nur zu Knoten in Nachbarzellen
- und nur falls kleiner als Maximalabstand $d_{\max}$

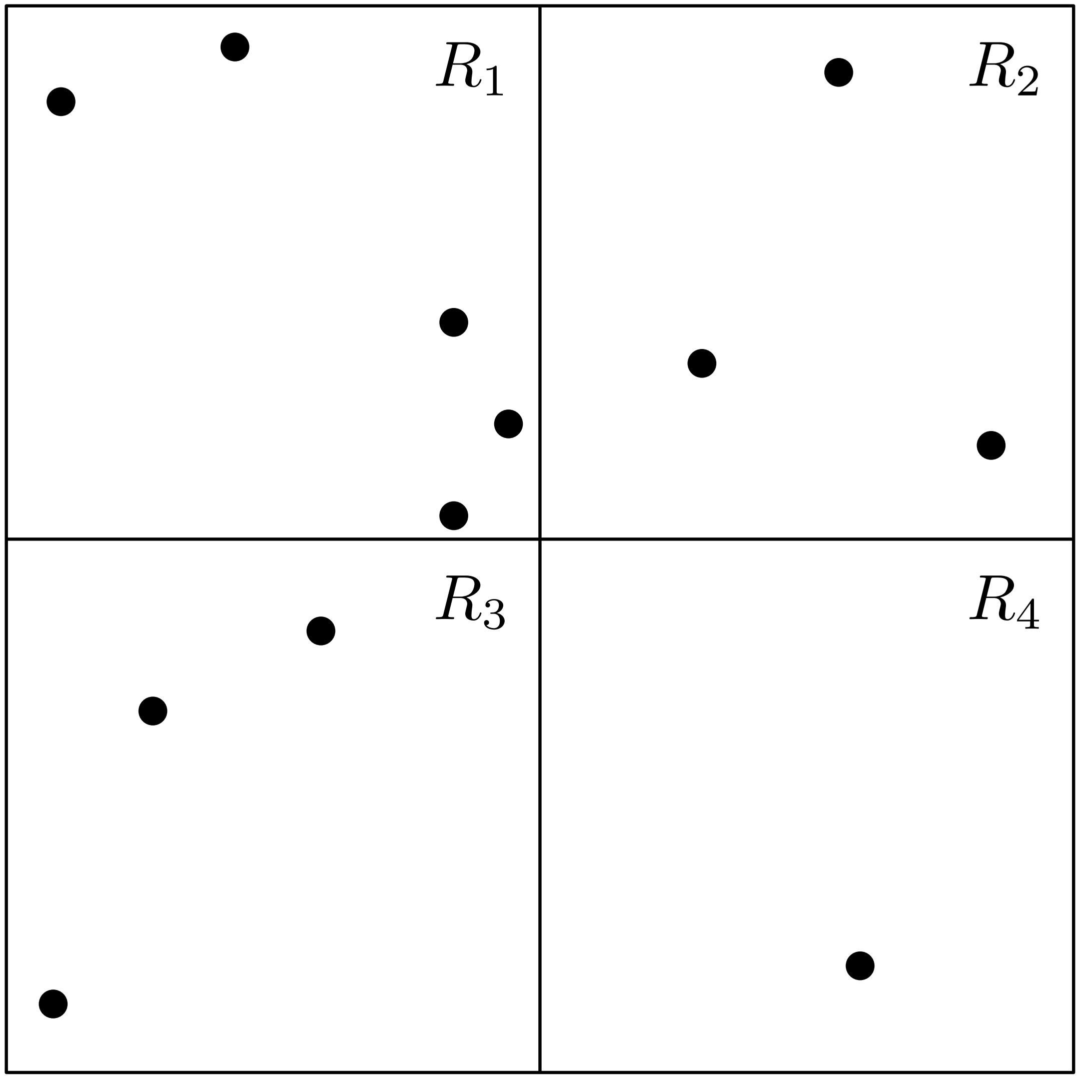
Diskussion

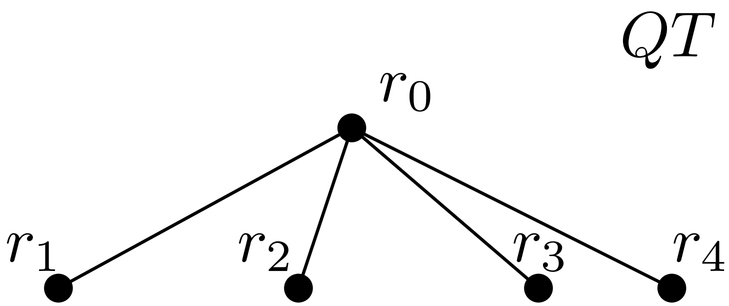
- sinnvolle Idee zur Laufzeitverbesserung
- worst-case kein Vorteil
- Qualitätsverlust (z.B. Oszillation um $d_{\max}$)

Quad-Tree

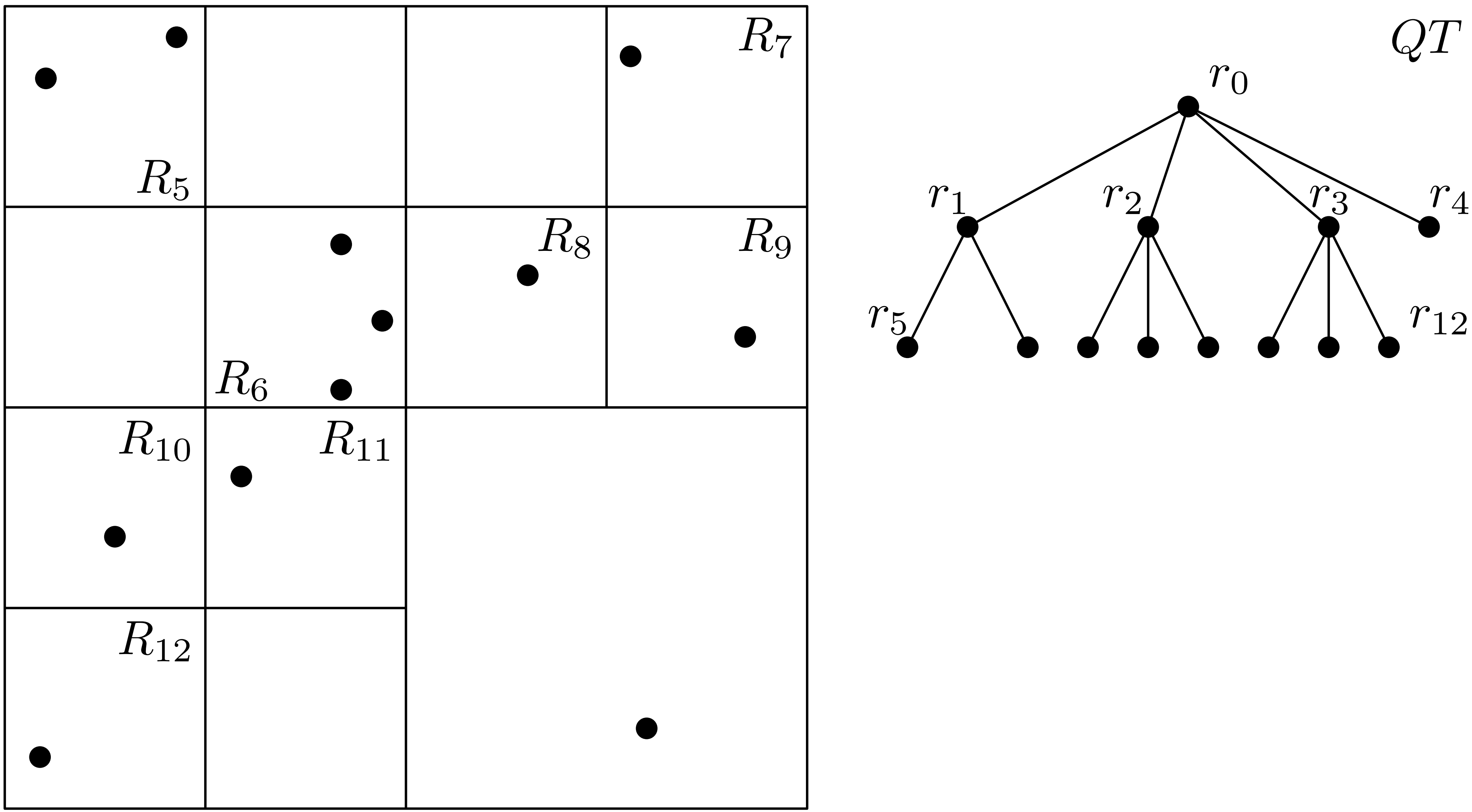


Quad-Tree

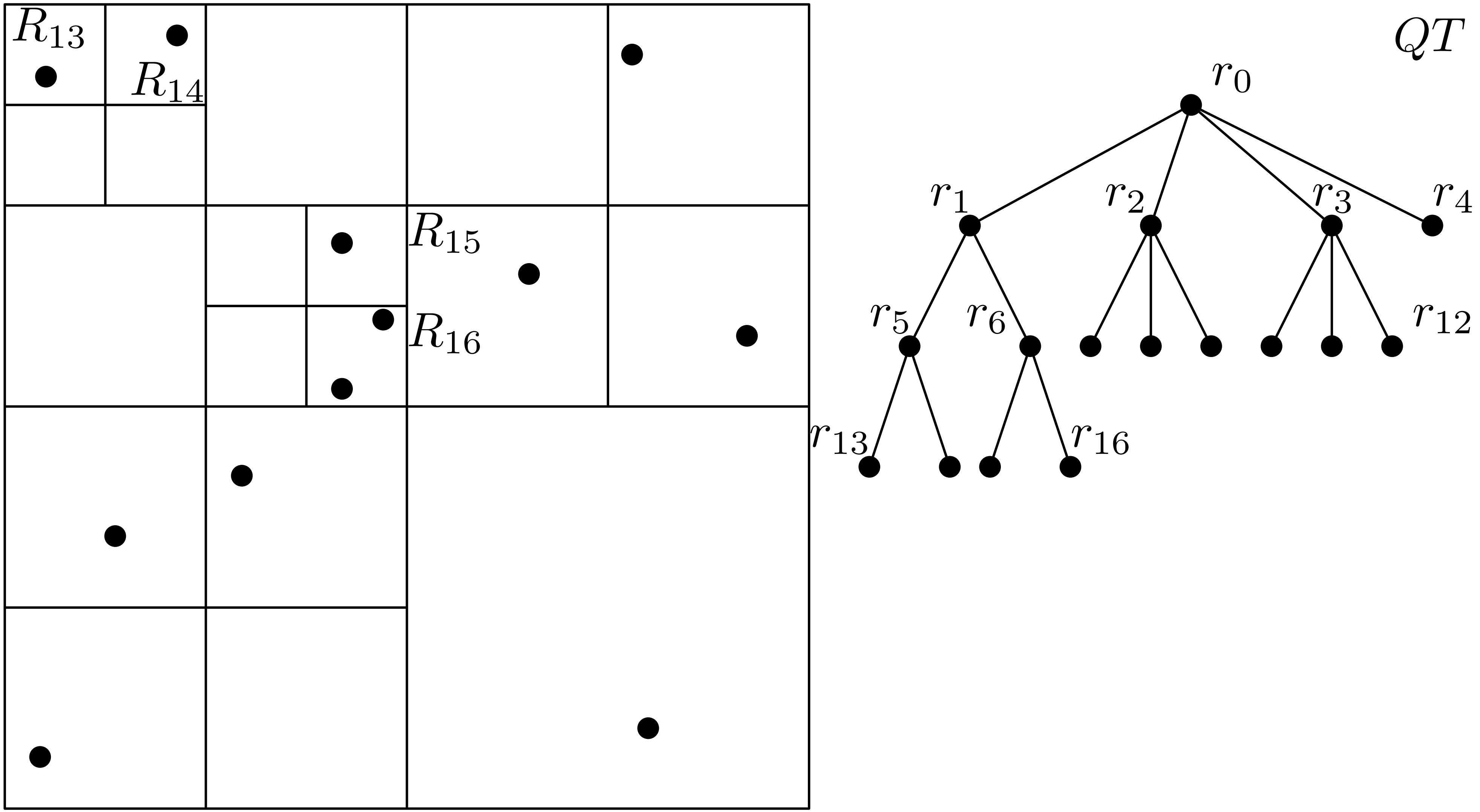




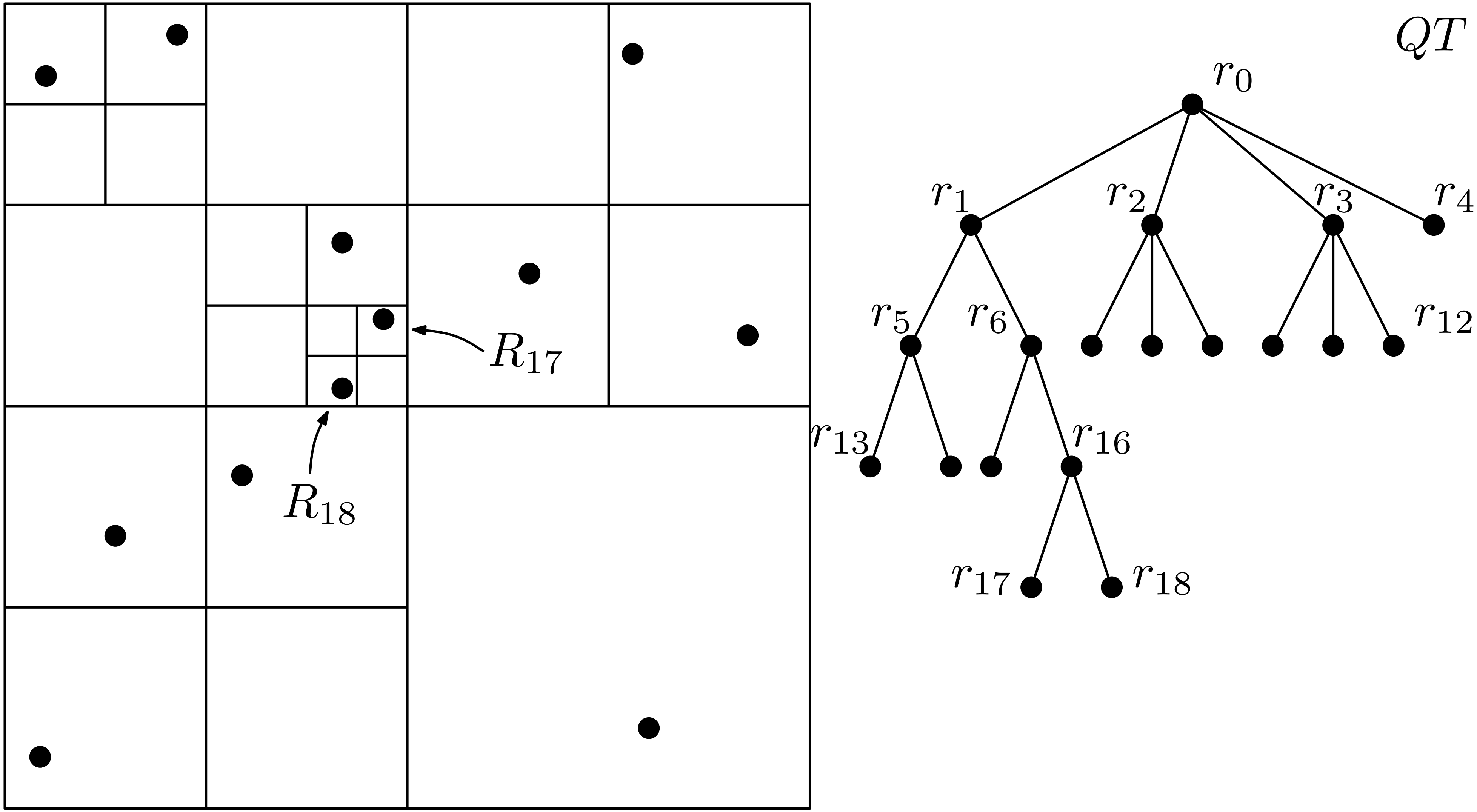
Quad-Tree



Quad-Tree

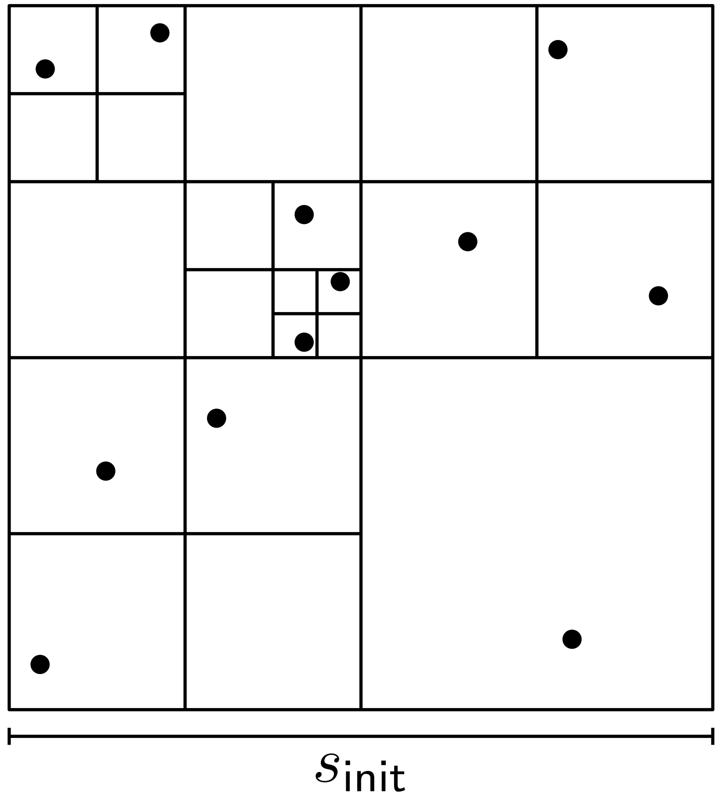


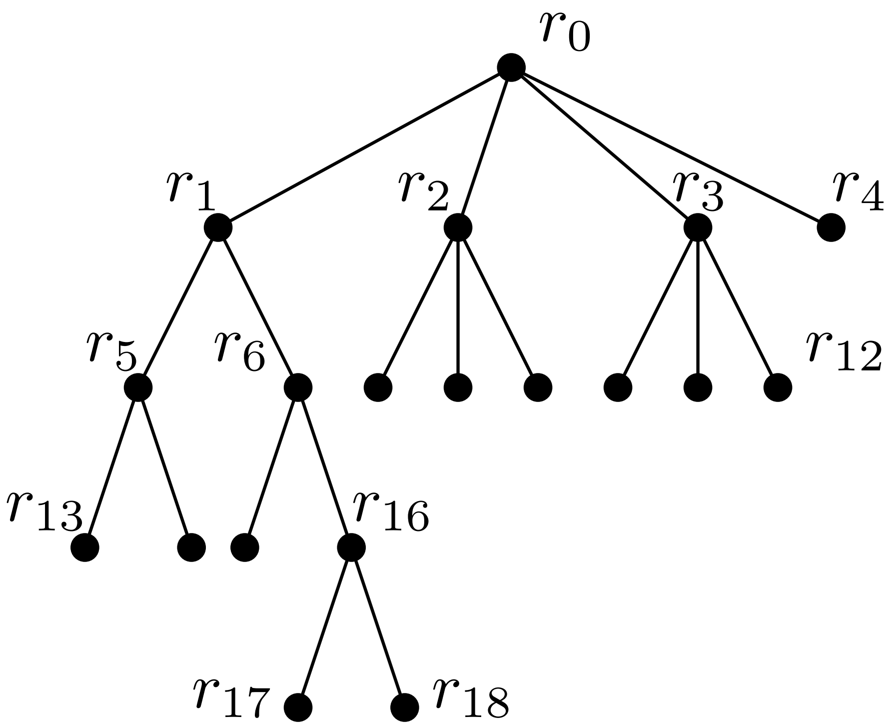
Quad-Tree



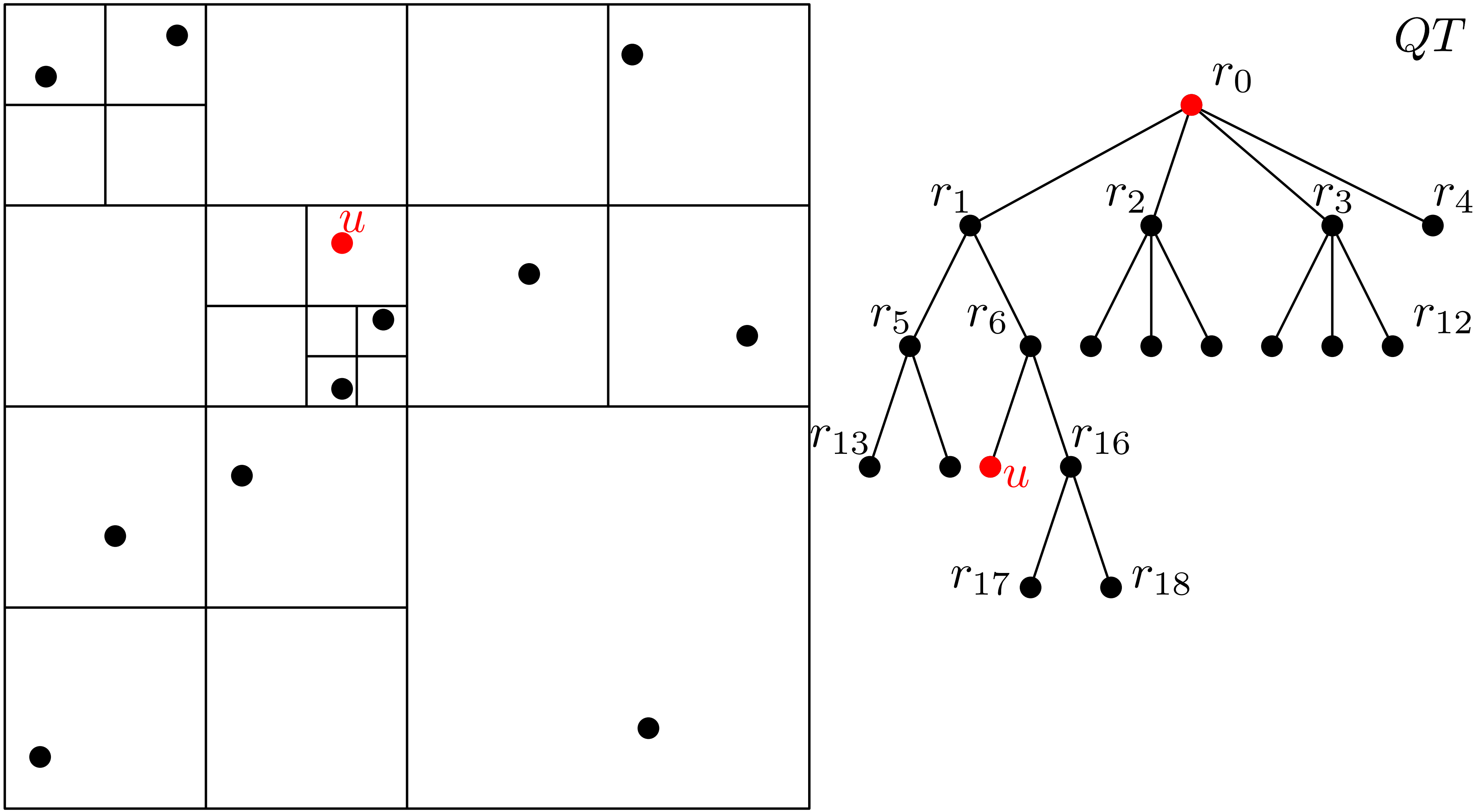
Eigenschaften Quad-Tree

- Höhe $h \leq \log \frac{s_{\text{init}}}{d_{\min}} + \frac{3}{2}$
- Zeit-/Speicherbedarf $O(hn)$
- komprimierter Quadtree in $O(n \log n)$ berechenbar
- $h \in O(\log n)$ bei gleichmäßiger Verteilung der Knoten

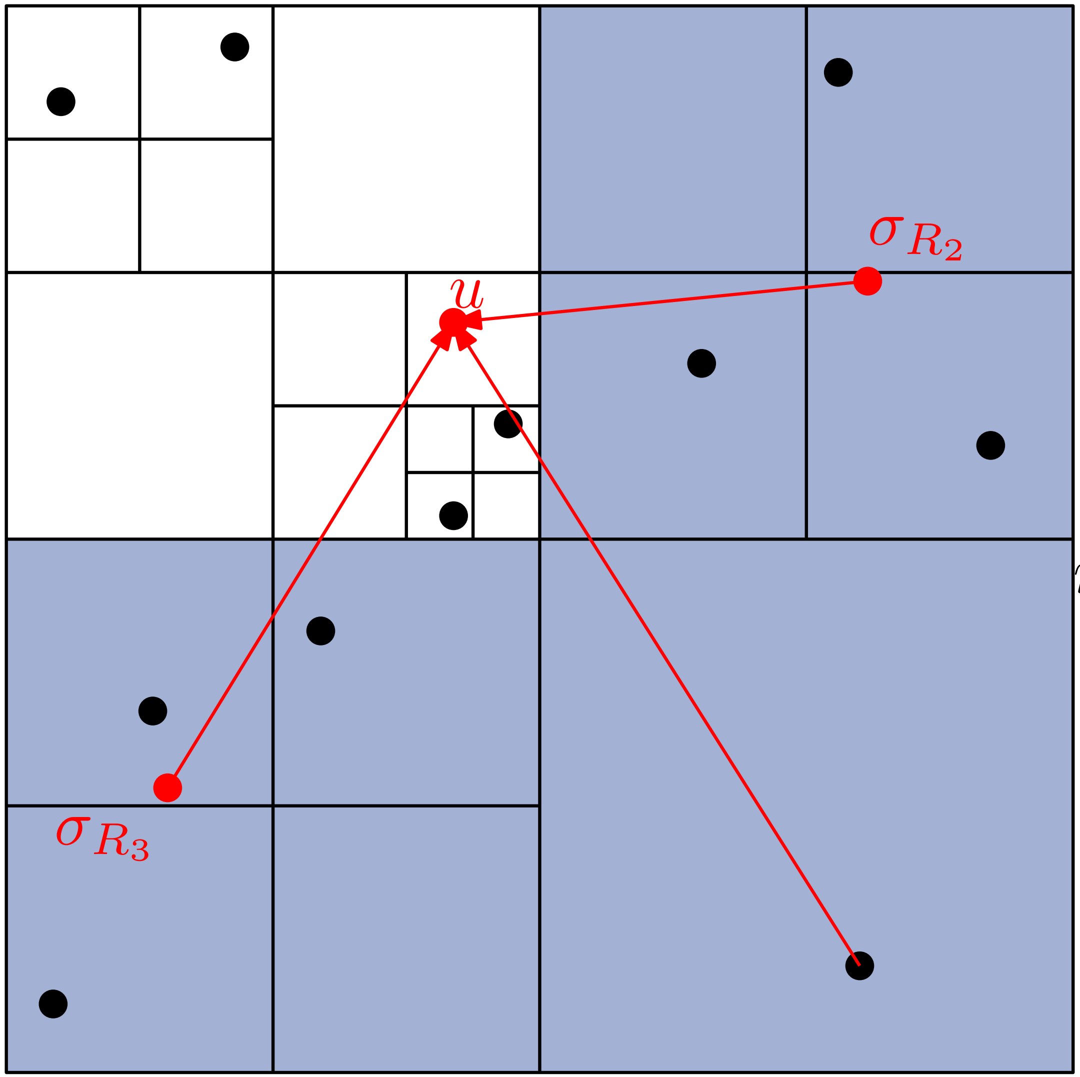


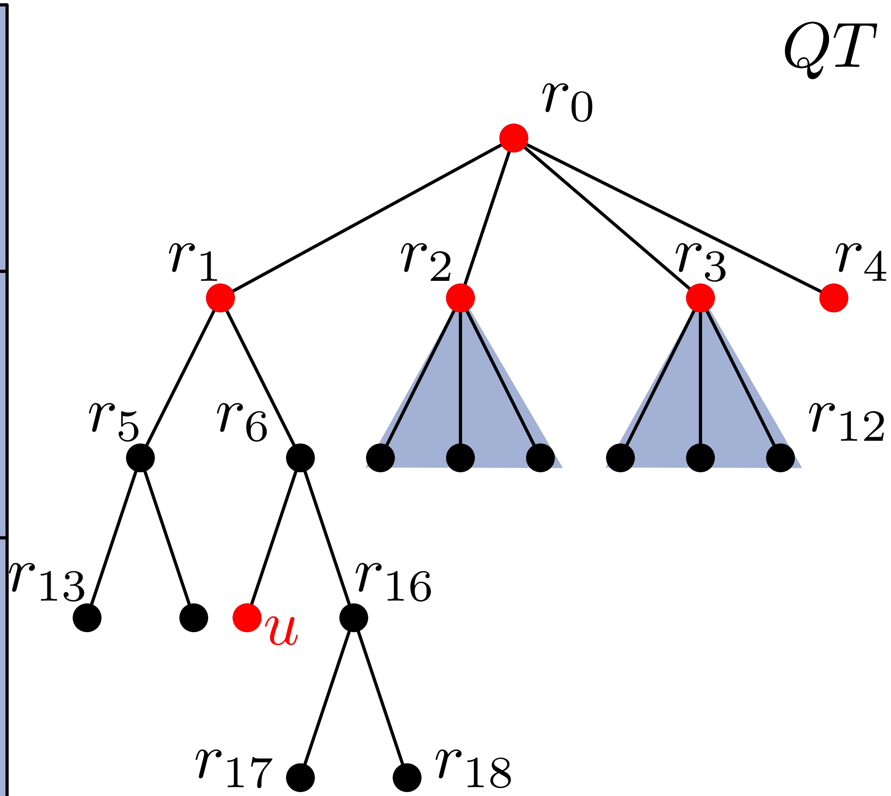


Kräfteberechnung mit Quad-Trees (Barnes, Hut, 1986)

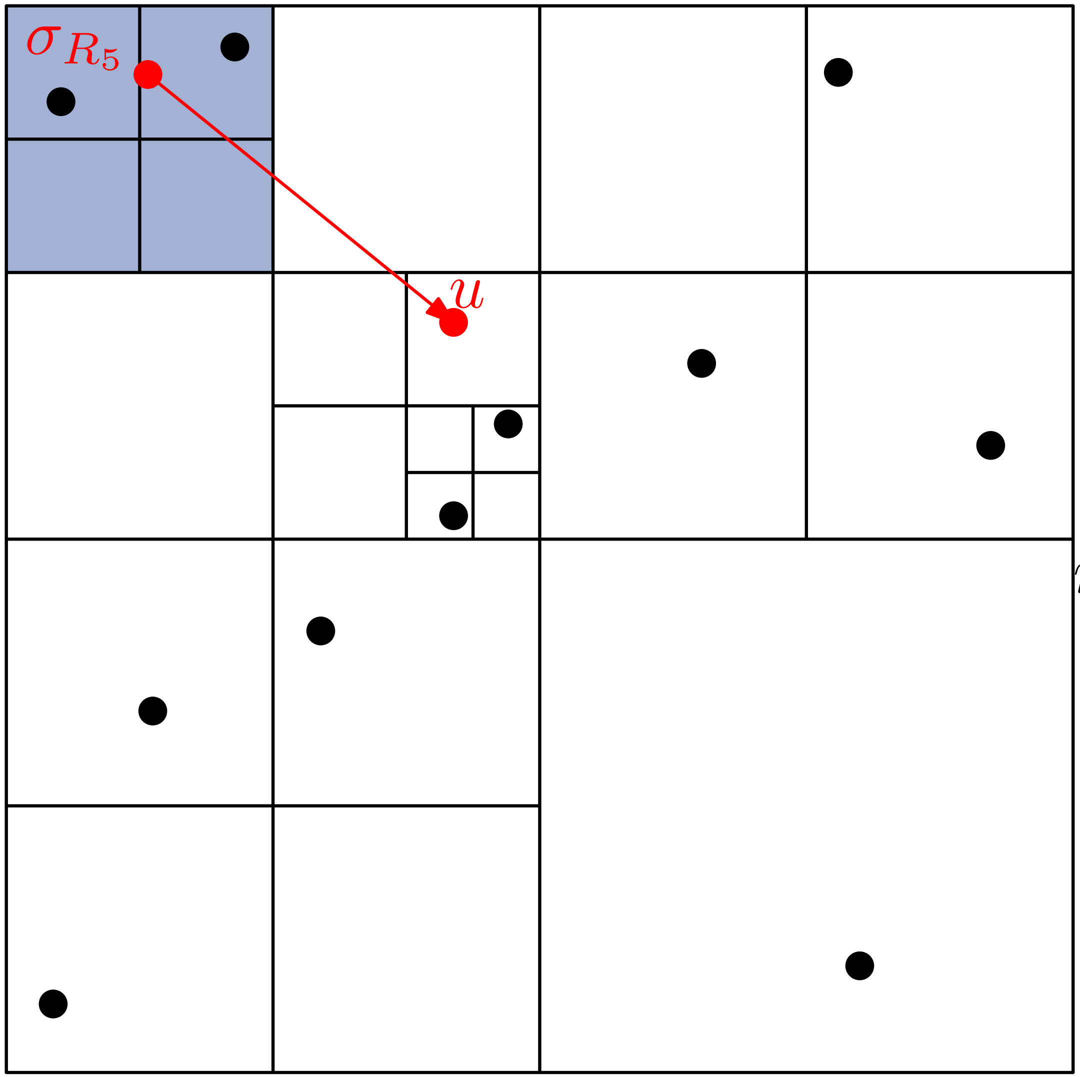


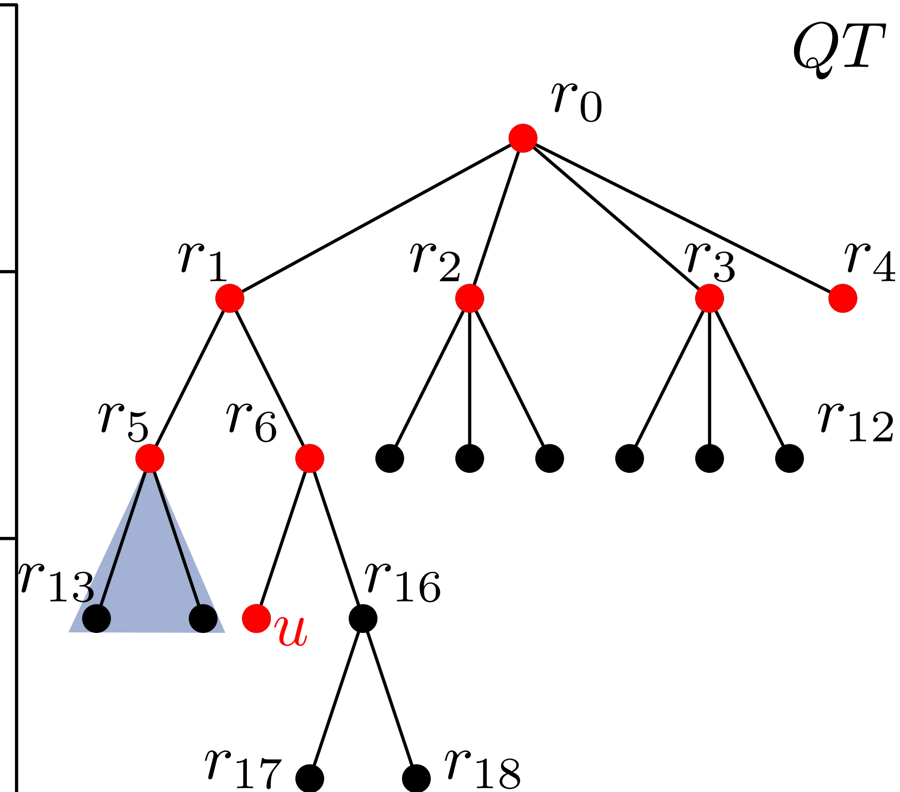
Kräfteberechnung mit Quad-Trees (Barnes, Hut, 1986)



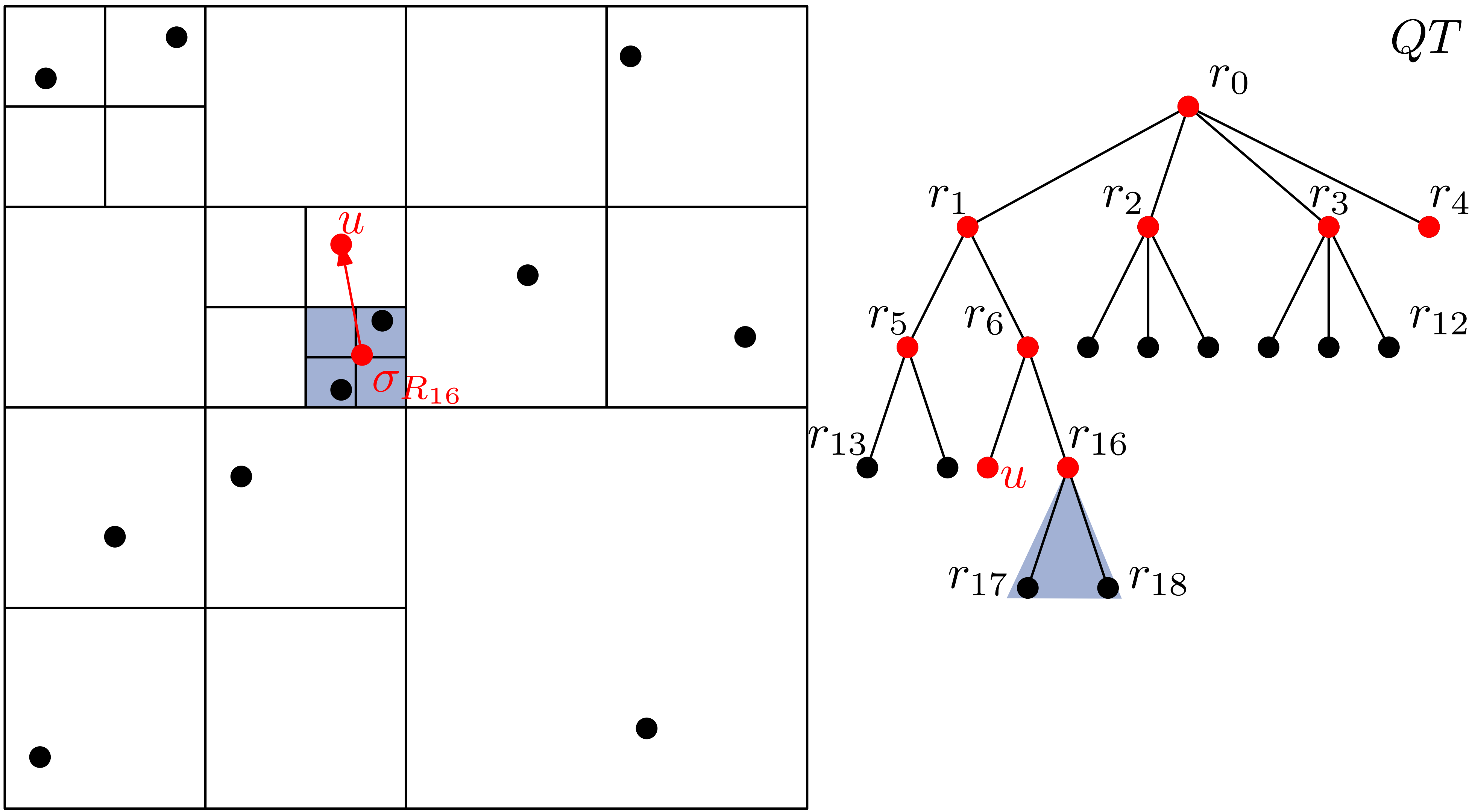


Kräfteberechnung mit Quad-Trees (Barnes, Hut, 1986)





Kräfteberechnung mit Quad-Trees (Barnes, Hut, 1986)



Multilevel-Algorithmus für große Graphen

Motivation

- klassischer Spring-Embedder für große Graphen zu langsam
- Schwachstelle zufällige Initialisierung der Knotenpositionen

Multilevel-Algorithmus für große Graphen

Motivation

- klassischer Spring-Embedder für große Graphen zu langsam
- Schwachstelle zufällige Initialisierung der Knotenpositionen

GRIP – Graph dRawing with Intelligent Placement

(Gajer, Kobourov, 2004)

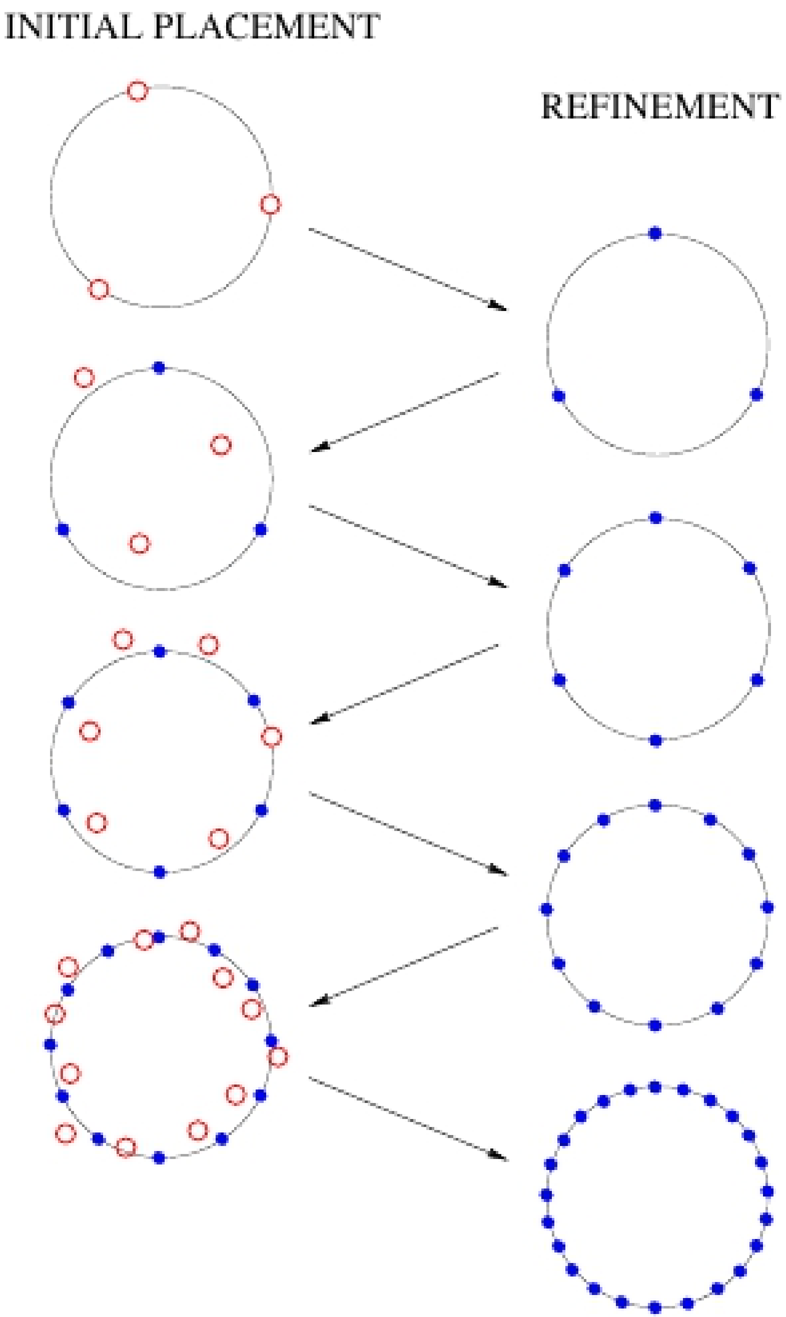
Ansatz

- Top-Down Vergröberung des Graphen
- Bottom-Up Berechnung des Layouts
- sinnvolles Hinzufügen neuer Knoten
- kräftebasierte Verfeinerung

GRIP Algorithmus

Input: Graph $G = (V, E)$

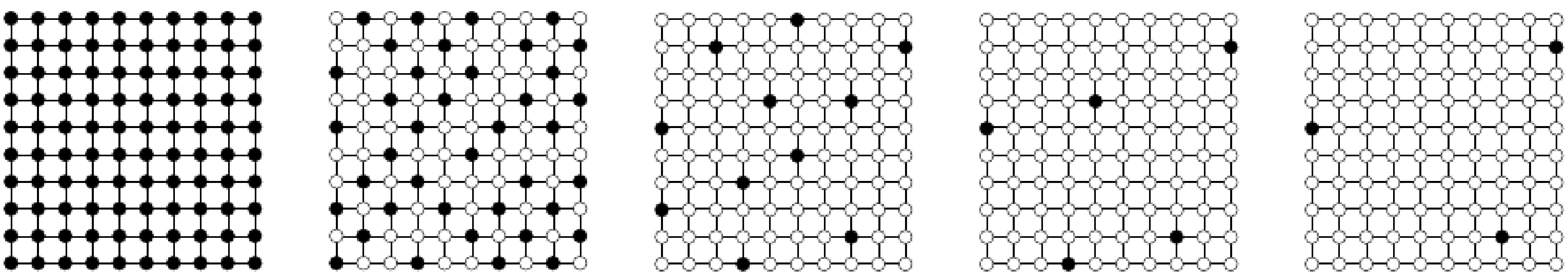
$\mathcal{V} \leftarrow$ Filtrierung $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k$
for $i = k$ **to** 0 **do**
  foreach $v \in V_i \setminus V_{i+1}$ **do**
    berechne Nachbarschaften von v
    berechne initiale Position von v
  for $j = 1$ **to** `rounds` **do**
    foreach $v \in V_i$ **do**
      kräftebasierte Relaxierung



MIS-Filtrierung

Maximal Independent Set (MIS) Filtrierung

- Sequenz von Knotenteilmengen
  $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k \supset \emptyset$
- V_i ist (inklusions-)maximale Knotenmenge
- Abstand in G zwischen Knoten in V_i ist $\geq 2^{i-1} + 1$
- gute Balance zwischen Tiefe und Größe der Level



V_0 V_1 V_2 V_3 V_4

Berechnung MIS-Filtrierung

Algorithmus

- inkrementelles Vorgehen: gegeben V_i berechne V_{i+1}
- wähle zufälliges Element v in V_i
- entferne alle Elemente aus V_i mit Distanz $\leq 2^i$ zu v
- dazu BFS von v mit Suchtiefe 2^i
- wiederhole bis keine weiteren Knoten in V_i verbleiben

Berechnung MIS-Filtrierung

Algorithmus

- inkrementelles Vorgehen: gegeben V_i berechne V_{i+1}
- wähle zufälliges Element v in V_i
- entferne alle Elemente aus V_i mit Distanz $\leq 2^i$ zu v
- dazu BFS von v mit Suchtiefe 2^i
- wiederhole bis keine weiteren Knoten in V_i verbleiben

Tiefe der Filtrierung

- für letztes Level k gilt $2^k > \mathrm{diam}(G)$
- Tiefe also $O(\log \mathrm{diam}(G))$

Level-basierte Knotenplatzierung

Phase 1

- bestimme für jeden Knoten $v \in V_i \setminus V_{i-1}$ optimale Position bzgl. der drei nächsten Knoten aus V_{i-1} ($\rightarrow$ BFS)

Phase 2

- führe kräftebasierte Verfeinerung durch, wobei Kräfte nur lokal zu einer konstanten Anzahl nächster Nachbarn in V_i berechnet werden

Level-basierte Knotenplatzierung

Phase 1

- bestimme für jeden Knoten $v \in V_i \setminus V_{i-1}$ optimale Position bzgl. der drei nächsten Knoten aus V_{i-1} ($\rightarrow$ BFS)

Phase 2

- führe kräftebasierte Verfeinerung durch, wobei Kräfte nur lokal zu einer konstanten Anzahl nächster Nachbarn in V_i berechnet werden

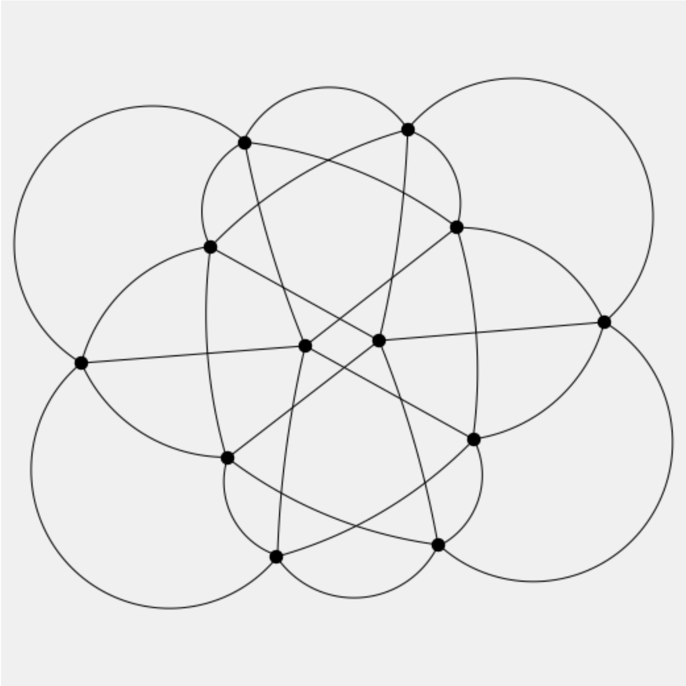
Eigenschaften GRIP

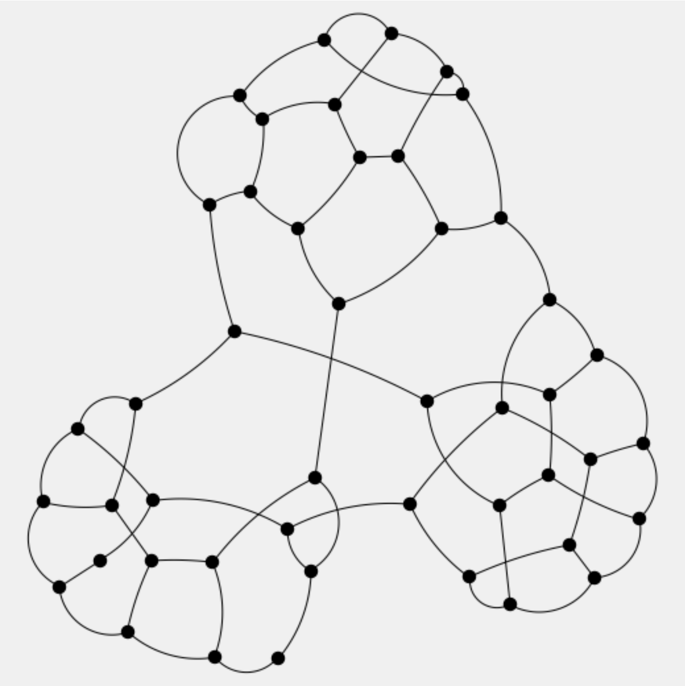
- intelligente schrittweise Berechnung eines guten Startlayouts durch MIS-Vergröberung
- deutlich schnellere Konvergenz
- Graphen mit > 10.000 Knoten in wenigen Sekunden (2004)

Aktuelle Beispiele

Lombardi-Spring-Embedder (Chernobelskiy et al. 2012)

- Kanten sind Kreisbögen
- optimale Winkelauflösung $2\pi/\deg(v)$ in jedem Knoten v
- zusätzliche Rotations- und Tangentialkräfte





Aktuelle Beispiele

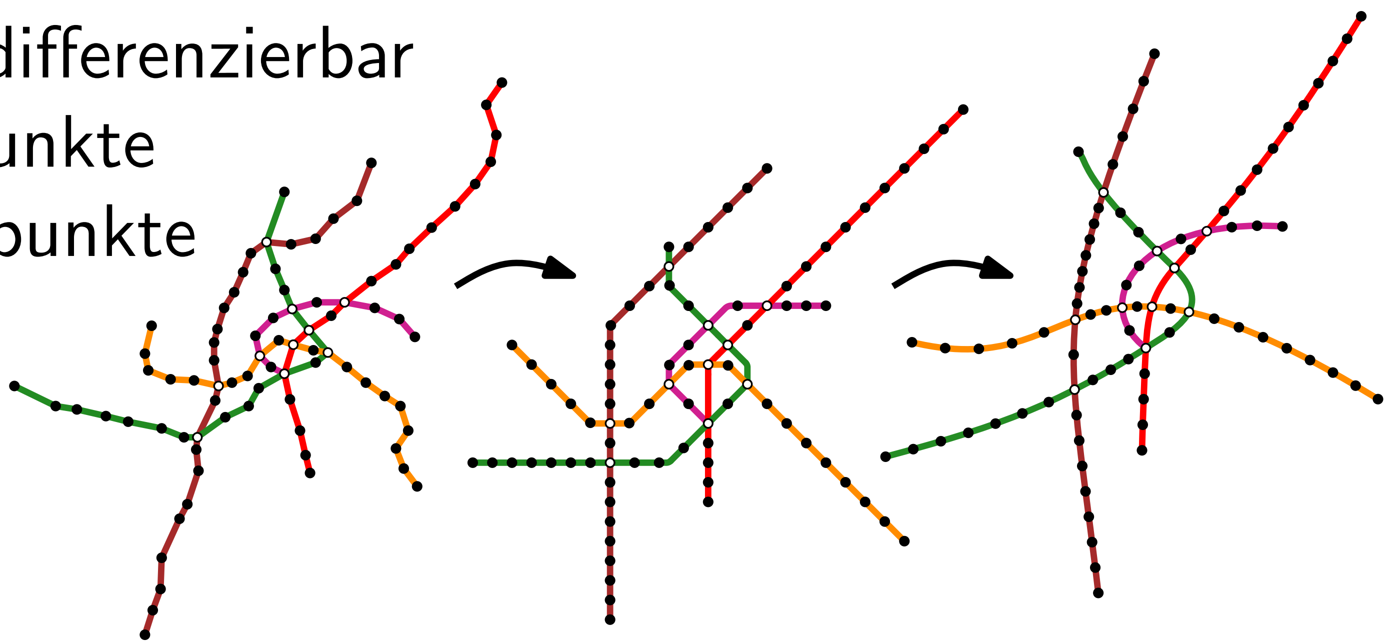
Karlsruhe Institute of Technology

Lombardi-Spring-Embedder (Chernobelskiy et al. 2012)

- Kanten sind Kreisbögen
- optimale Winkelauflösung $2\pi/\deg(v)$ in jedem Knoten v
- zusätzliche Rotations- und Tangentialkräfte

Linienpläne mit Bézierkurven (Fink et al. 2013)

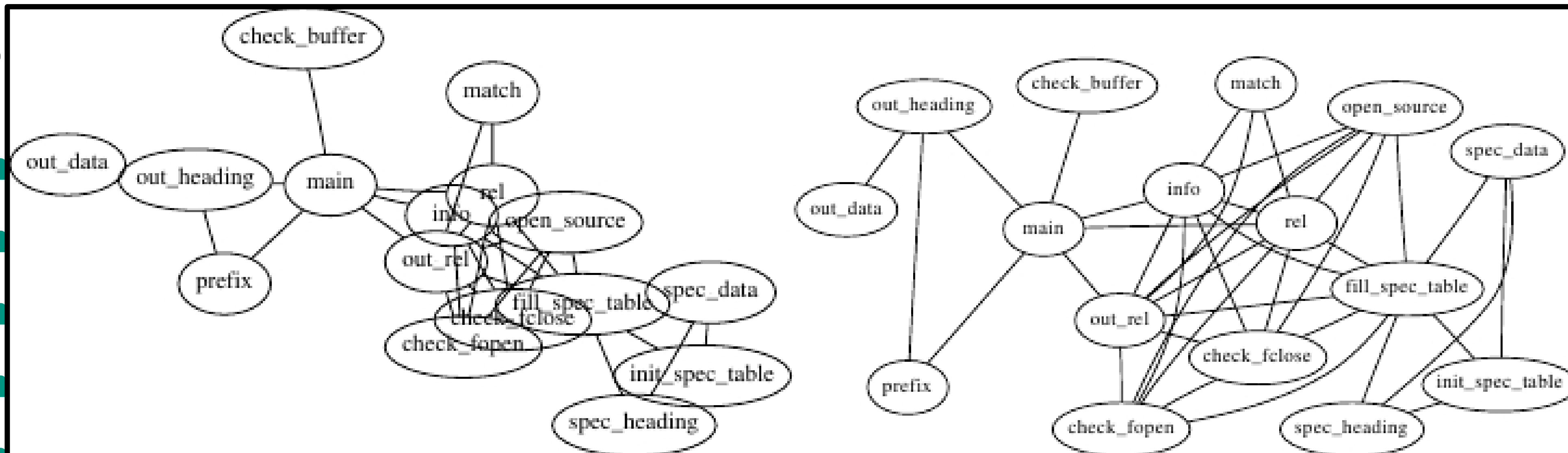
- modelliere Kantenfolgen als Bézierkurve
- Kräfte auf Graph-Knoten und Kontroll-Knoten
- einzelne Linien differenzierbar
- wenige Wendepunkte
- wenige Kontrollpunkte



Aktuelle Beispiele

Lombardi-Spring-Embedder (Chernobelskiy et al. 2012)

- Kanten sind Kreisbögen
- optimale Winkelauflösung $2\pi/\deg(v)$ in jedem Knoten v
- zusätzliche Rotations- und Tangentialkräfte



Realistische Knotengrößen (Gansner, North 1998)

- Abstoßung berücksichtigt Knotengrößen

Zusammenfassung

Kräftebasierte Verfahren sind

- leicht verständlich und implementierbar
- keinerlei Anforderungen an Eingabegraph
- je nach Graph (klein & dünn) erstaunlich gute Layouts (Symmetrien, Clusterung, ...)
- leicht adaptierbar und konfigurierbar
- robust
- skalierbar

Zusammenfassung

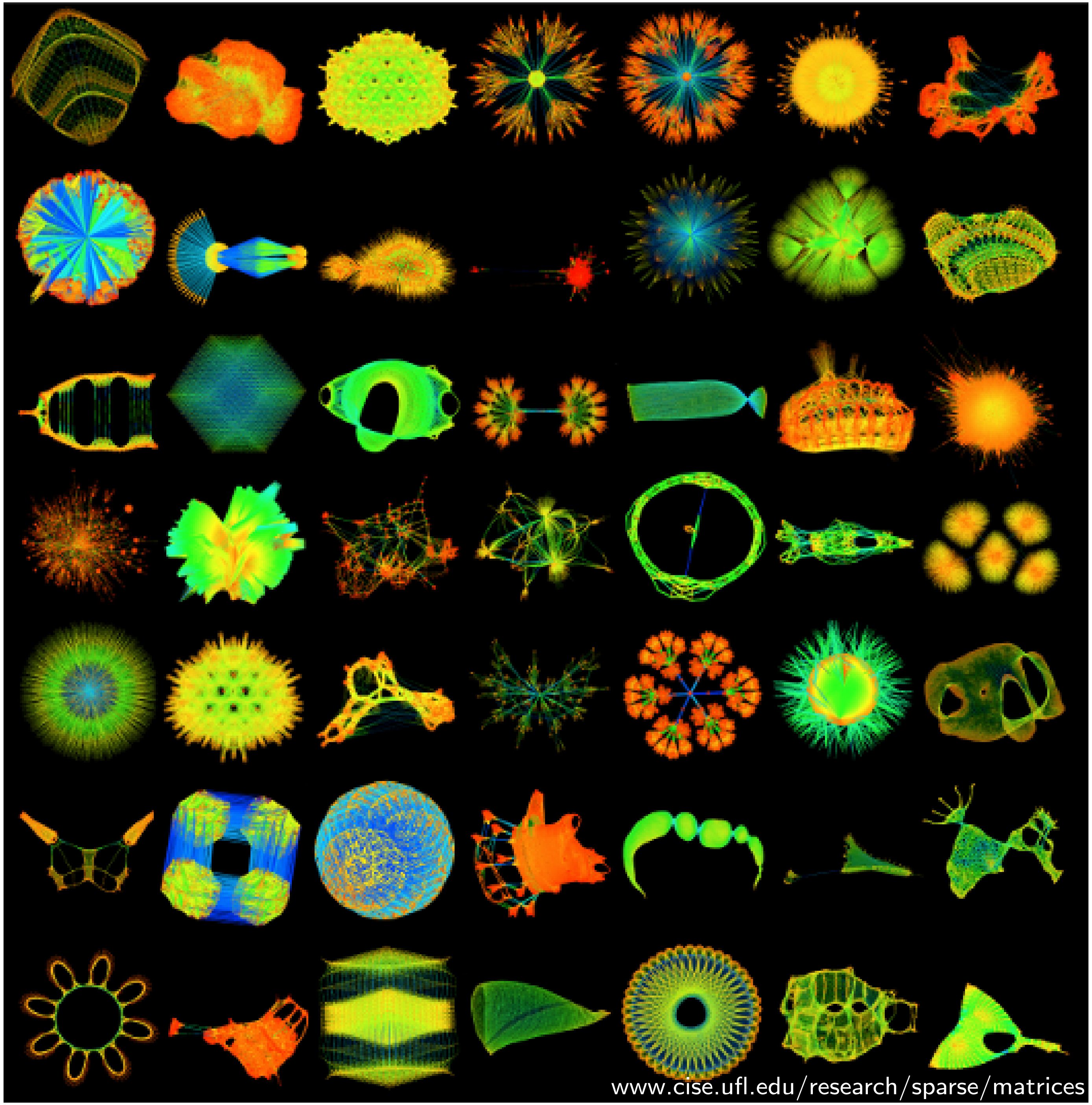
Kräftebasierte Verfahren sind

- leicht verständlich und implementierbar
- keinerlei Anforderungen an Eingabegraph
- je nach Graph (klein & dünn) erstaunlich gute Layouts (Symmetrien, Clusterung, ...)
- leicht adaptierbar und konfigurierbar
- robust
- skalierbar

Aber...

- keine Qualitäts- und Laufzeitgarantien
- schlechtes Startlayout $\rightarrow$ langsame Konvergenz
- evtl. langsam für große Graphen
- oft fine-tuning durch Experten nötig

Gallerie



©Davis & Hu