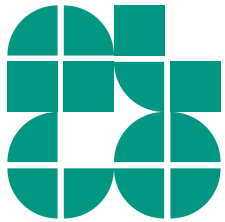
Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Lagenlayouts – Teil 2

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Tamara Mchedlidze · **Martin Nöllenburg** · Ignaz Rutter

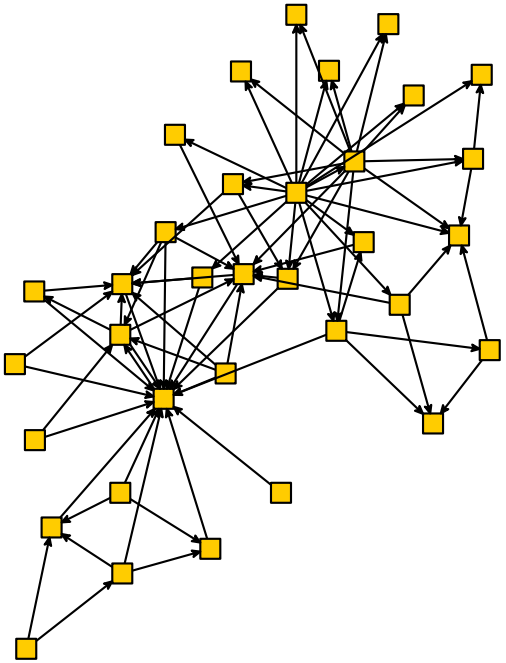
18.12.2012

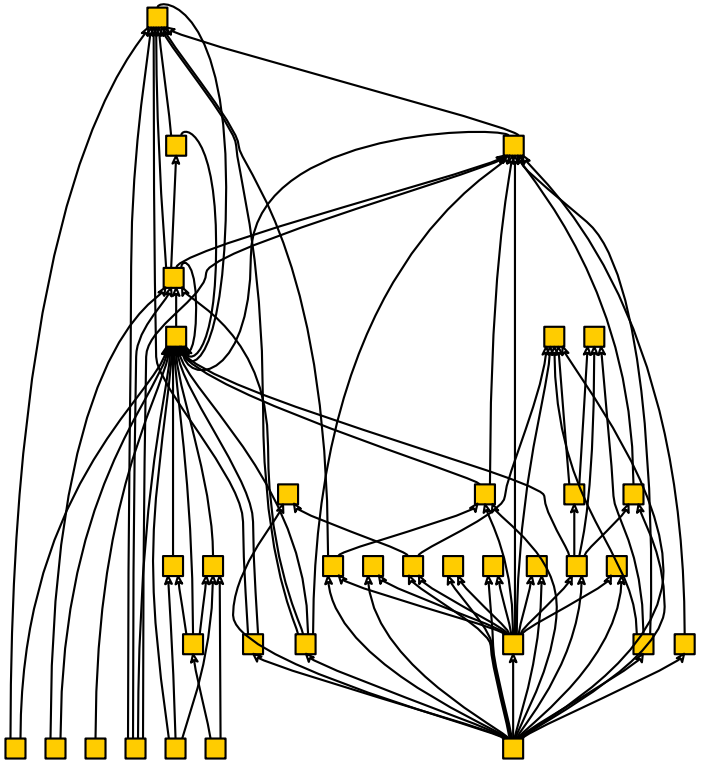


Lagenlayouts

Geg.: gerichteter Graph $D = (V, A)$

Ges.: Zeichnung von D, die die Hierarchie verdeutlicht





Lagenlayouts

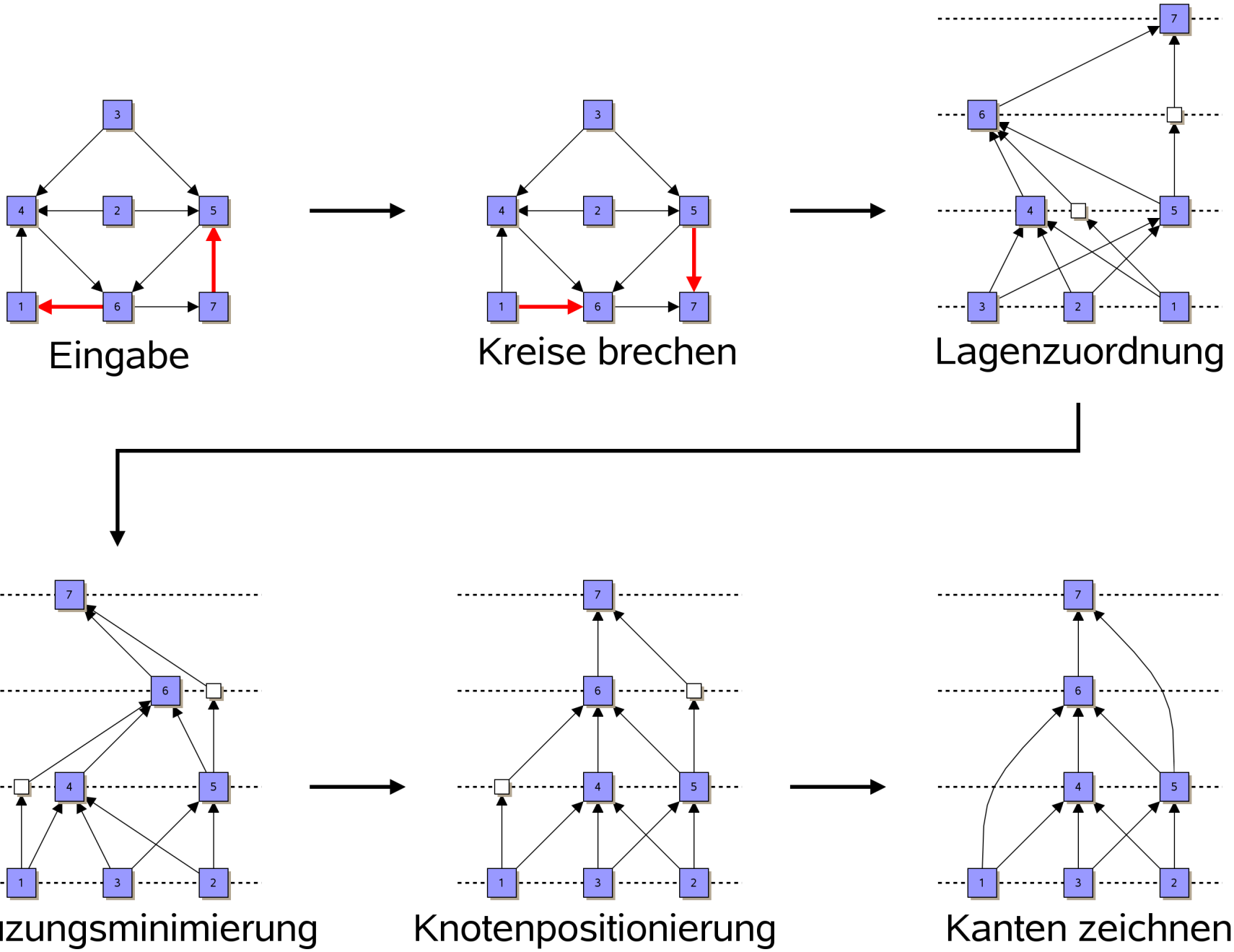
Geg.: gerichteter Graph $D = (V, A)$

Ges.: Zeichnung von D, die die Hierarchie verdeutlicht

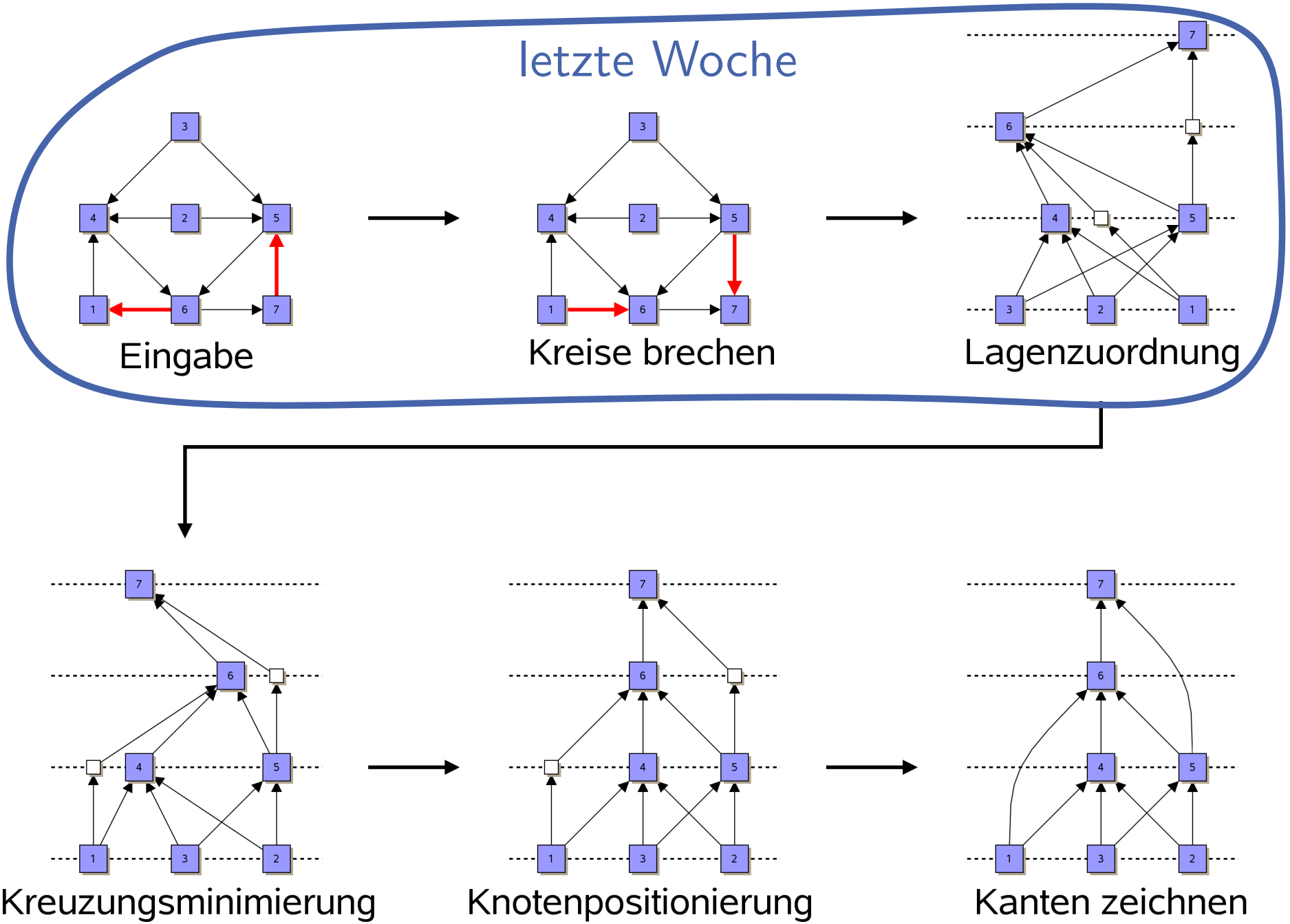
Kriterien:

- möglichst viele Kanten aufwärtsgerichtet
- Kanten möglichst geradlinig und kurz
- Zuordnung der Knoten auf (wenige) horizontale Ebenen
- möglichst wenige Kantenkreuzungen
- Knoten gleichmäßig verteilt

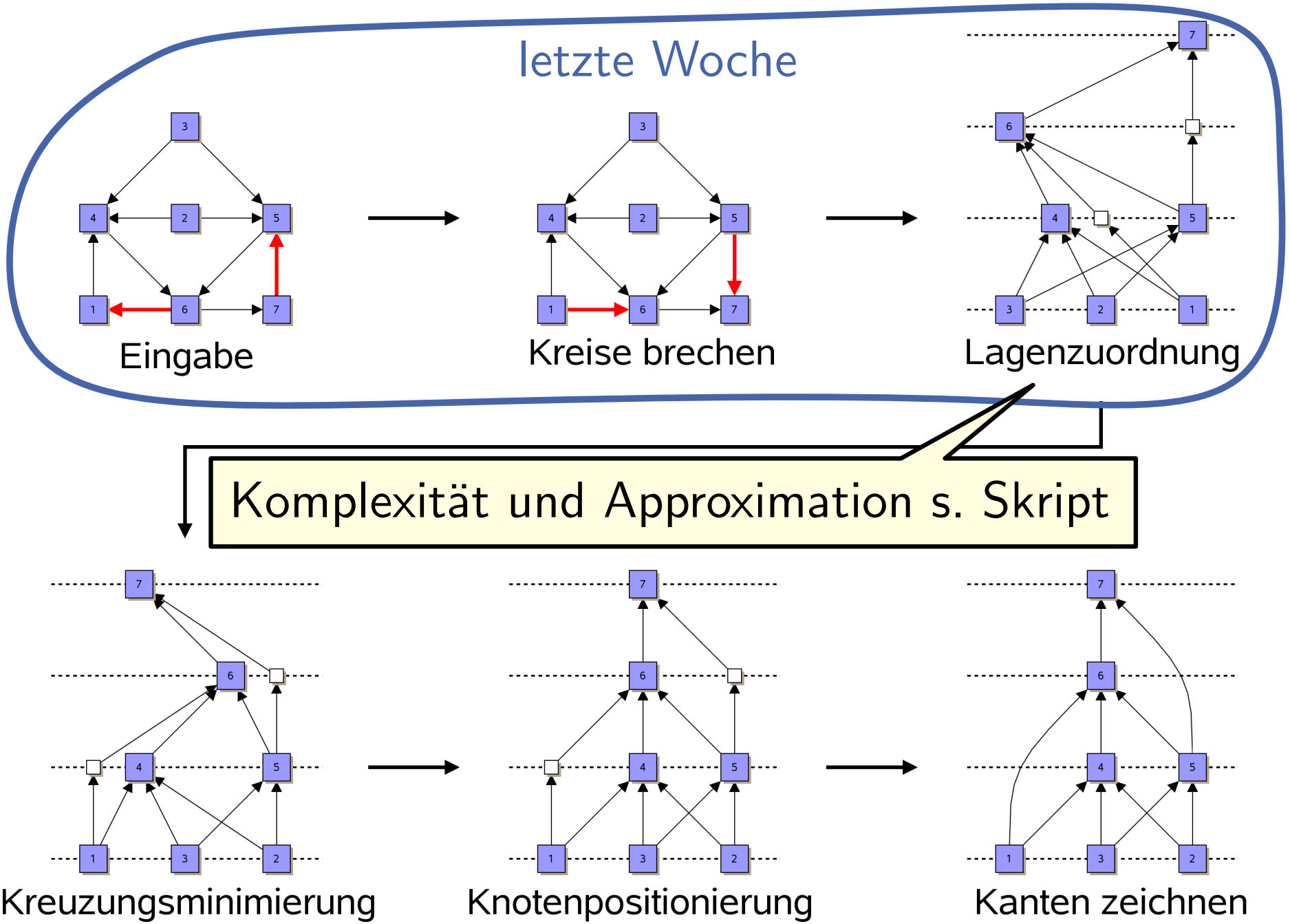
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



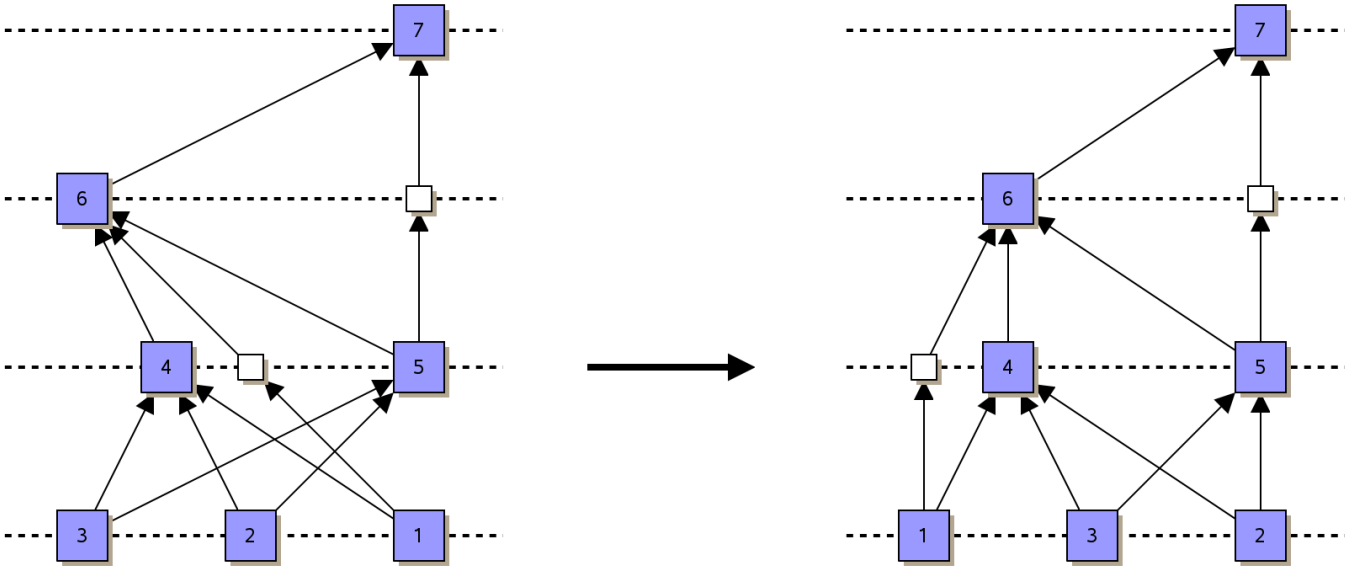
Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



Sugiyama Framework (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)



Schritt 3: Kreuzungsminimierung



Wie würden Sie vorgehen?

Problemstellung

Geg.: DAG $D = (V, A)$, Knoten partitioniert in disjunkte Lagen

Ges.: Ordnung der Knoten in jeder Lage, so dass die Anzahl Kantenkreuzungen minimal ist

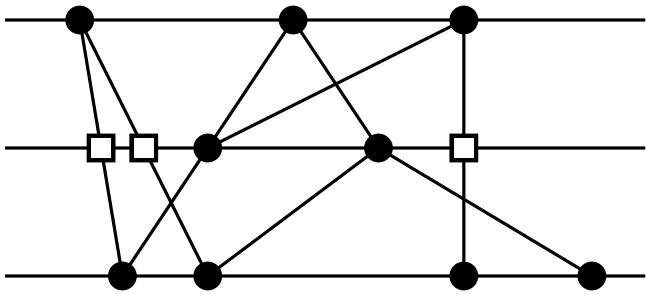
Problemstellung

Geg.: DAG $D = (V, A)$, Knoten partitioniert in disjunkte Lagen

Ges.: Ordnung der Knoten in jeder Lage, so dass die Anzahl Kantenkreuzungen minimal ist

Eigenschaften

- Problem ist NP-schwer schon für zwei Lagen (Bipartite Crossing Number, [Garey, Johnson '83])
- kaum Ansätze über mehrere Lagen gleichzeitig
- meist iteratives Optimieren für je zwei benachbarte Lagen
- dazu: füge in jeder Lage Dummyknoten für alle Kanten ein, die diese Lage überspringen



Einseitige Kreuzungsminimierung (OSCM)

Karlsruhe Institute of Technology

Geg.: 2-Lagen-Graph $G = (L_1, L_2, E)$ und Knotenordnung x_1 von L_1

Ges.: Knotenordnung x_2 von L_2, so dass die Anzahl Kreuzungen von Kanten in E minimal ist

Einseitige Kreuzungsminimierung (OSCM)

Karlsruhe Institute of Technology

Geg.: 2-Lagen-Graph $G = (L_1, L_2, E)$ und Knotenordnung x_1 von L_1

Ges.: Knotenordnung x_2 von L_2, so dass die Anzahl Kreuzungen von Kanten in E minimal ist

Beobachtung:

- Anzahl Kreuzungen einer 2-Lagen-Zeichnung von G hängt nur von x_1 und x_2 ab, nicht von tatsächlichen Positionen
- für $u, v \in L_2$ hängt Anzahl Kreuzungen inzidenter Kanten nur von $x_2(u) < x_2(v)$ oder $x_2(v) < x_2(u)$ ab

Einseitige Kreuzungsminimierung (OSCM)

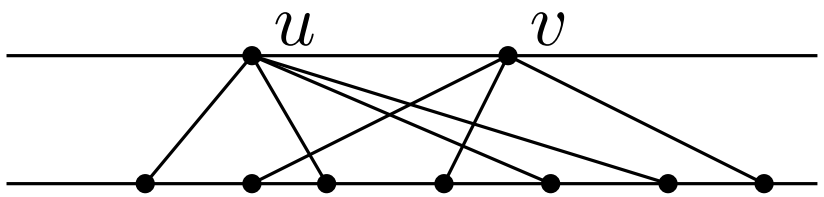
Geg.: 2-Lagen-Graph $G = (L_1, L_2, E)$ und Knotenordnung x_1 von L_1

Ges.: Knotenordnung x_2 von L_2, so dass die Anzahl Kreuzungen von Kanten in E minimal ist

Beobachtung:

- Anzahl Kreuzungen einer 2-Lagen-Zeichnung von G hängt nur von x_1 und x_2 ab, nicht von tatsächlichen Positionen
- für $u, v \in L_2$ hängt Anzahl Kreuzungen inzidenter Kanten nur von $x_2(u) < x_2(v)$ oder $x_2(v) < x_2(u)$ ab

Def: Kreuzungszahl $c_{uv} := |\{(uw, vz) \mid w \in N(u), z \in N(v) \wedge x_1(z) < x_1(w)\}|$ für $x_2(u) < x_2(v)$



$c_{uv} = 5$

$c_{vu} = 7$

Weitere Eigenschaften

Def: Kreuzungszahl für G mit Ordnungen x_1 und x_2 sei $\mathsf{cr}(G, x_1, x_2)$;
für festes x_1 sei $\mathrm{opt}(G, x_1) = \min_{x_2} \mathsf{cr}(G, x_1, x_2)$

Lemma 1: Es gelten folgende Eigenschaften:

- $\mathsf{cr}(G, x_1, x_2) = \sum_{x_2(u)<x_2(v)} c_{uv}$
- $\mathsf{opt}(G, x_1) \geq \sum_{u,v} \min\{c_{uv}, c_{vu}\}$

Weitere Eigenschaften

Def: Kreuzungszahl für G mit Ordnungen x_1 und x_2 sei
$\mathsf{cr}(G, x_1, x_2)$;
für festes x_1 sei $\mathrm{opt}(G, x_1) = \min_{x_2} \mathsf{cr}(G, x_1, x_2)$

Lemma 1: Es gelten folgende Eigenschaften:

- $\mathsf{cr}(G, x_1, x_2) = \sum_{x_2(u)<x_2(v)} c_{uv}$
- $\mathsf{opt}(G, x_1) \geq \sum_{u,v} \min\{c_{uv}, c_{vu}\}$

Effizientes Berechnen von $\mathsf{cr}(G, x_1, x_2)$ s. Übungsblatt

Iterative Kreuzungsminimierung

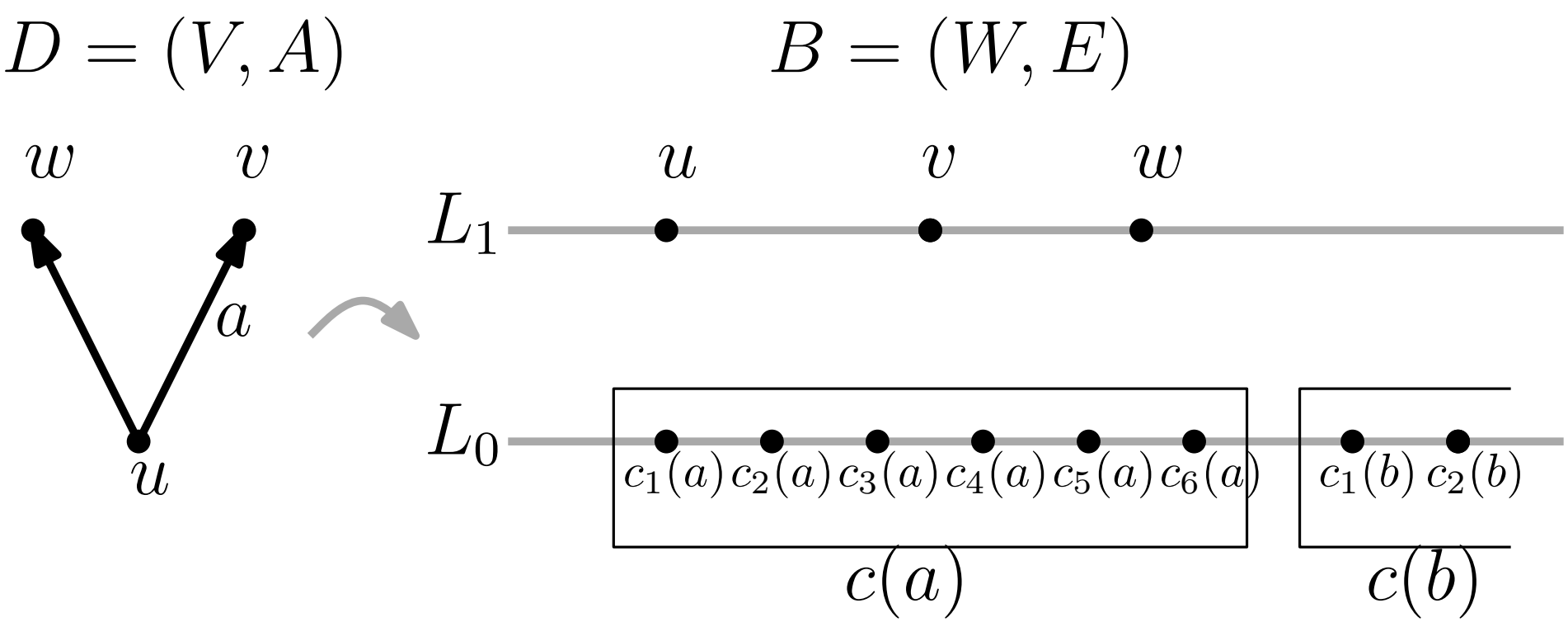
Sei $G = (V, E)$ ein DAG mit Lagenzuordnung $L_1, \ldots, L_h$.

(1) berechne zufällige Ordnung x_1 für Lage L_1
(2) für $i = 1, \ldots, h-1$ betrachte Lagen L_i und L_{i+1} und minimiere $\mathrm{cr}(G, x_i, x_{i+1})$ bei festem x_i ($\rightarrow$ **OSCM**)
(3) für $i = h-1, \ldots, 1$ betrachte Lagen L_{i+1} und L_i und minimiere $\mathrm{cr}(G, x_i, x_{i+1})$ bei festem x_{i+1} ($\rightarrow$ **OSCM**)
(4) wiederhole (2) und (3) bis keine weitere Verbesserung
(5) wiederhole ggf. Schritte (1)–(4) mit anderem x_1
(6) gib beste gefundene Lösung aus

Komplexität OSCM (Eades, Wormald 1994)

Satz: Das einseitige Kreuzungsminimierungsproblem (OSCM) ist NP-schwer.

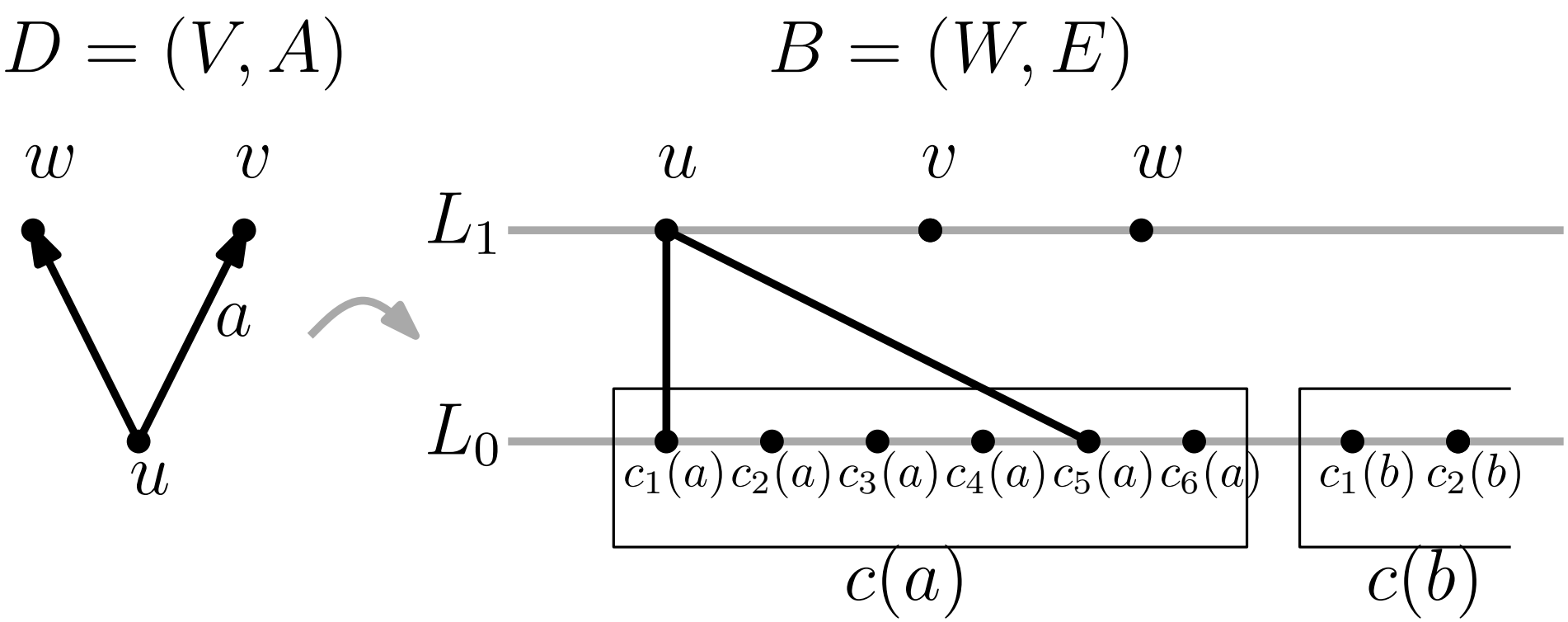
Beweisskizze: Reduktion von Feedback Arc Set



Komplexität OSCM (Eades, Wormald 1994)

Satz: Das einseitige Kreuzungsminimierungsproblem (OSCM) ist NP-schwer.

Beweisskizze: Reduktion von Feedback Arc Set

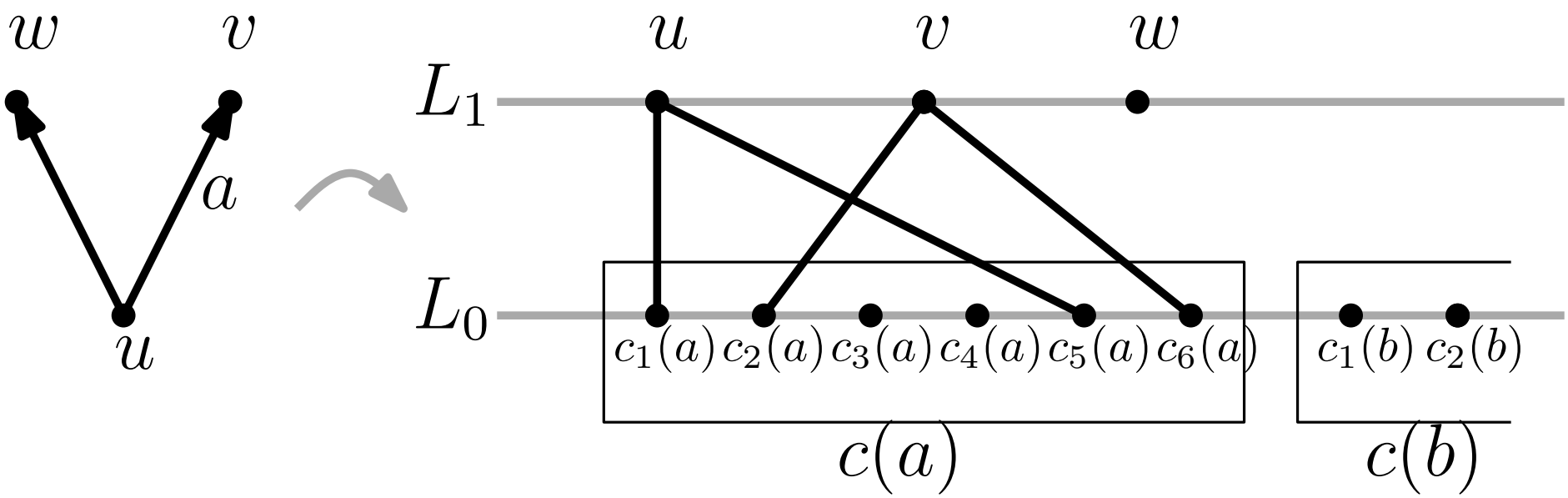


Komplexität OSCM (Eades, Wormald 1994)

Satz: Das einseitige Kreuzungsminimierungsproblem (OSCM) ist NP-schwer.

Beweisskizze: Reduktion von Feedback Arc Set

$D = (V, A)$ $B = (W, E)$

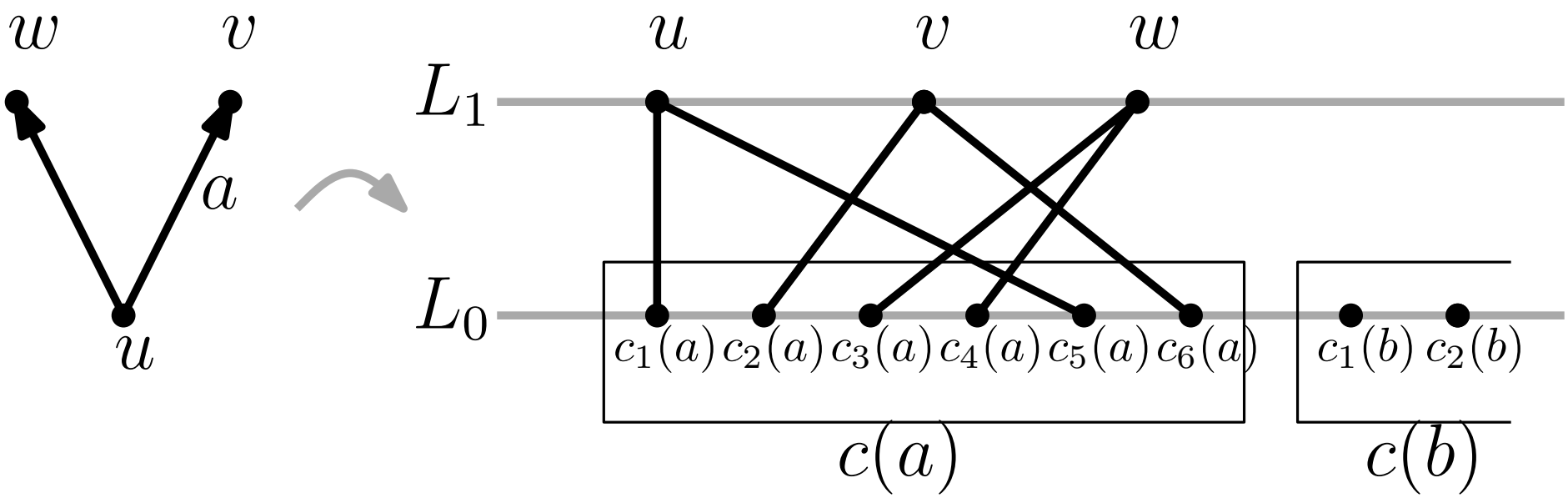


Komplexität OSCM (Eades, Wormald 1994)

Satz: Das einseitige Kreuzungsminimierungsproblem (OSCM) ist NP-schwer.

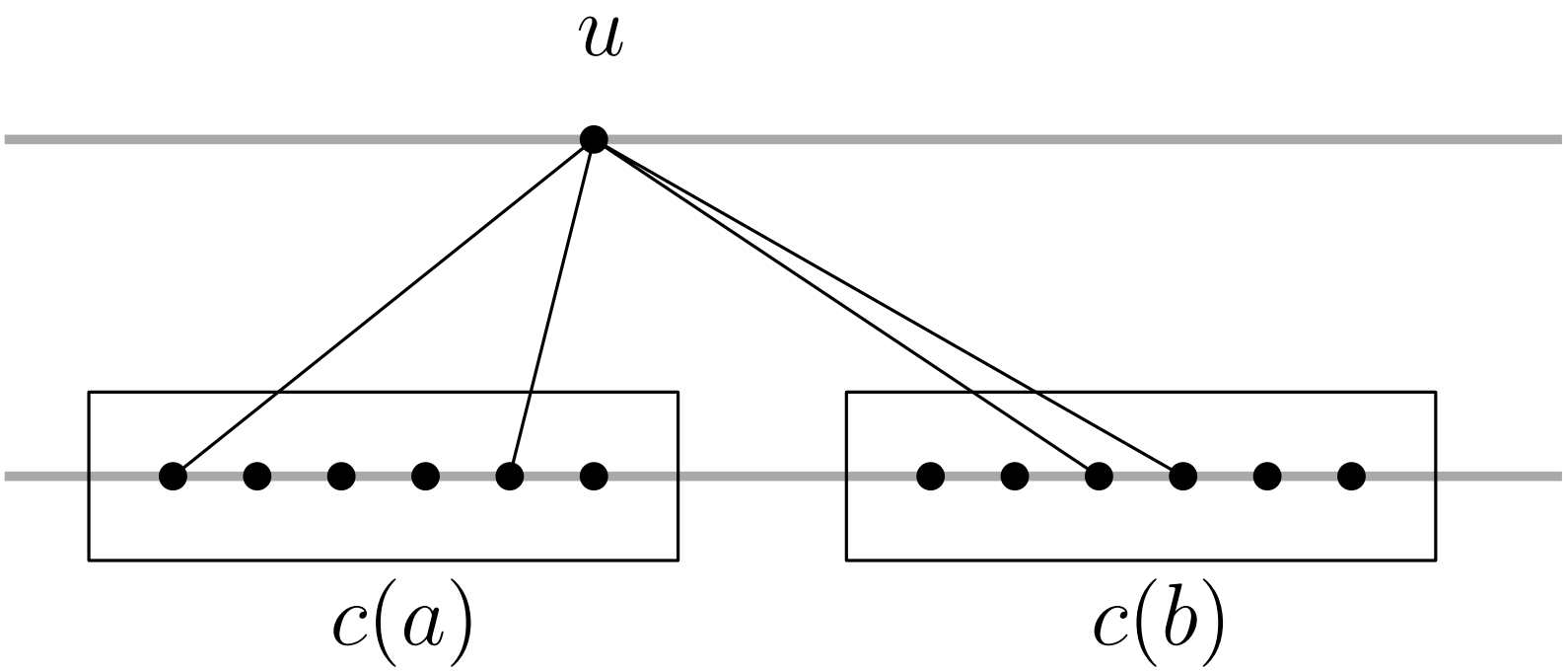
Beweisskizze: Reduktion von Feedback Arc Set

$D = (V, A)$ $B = (W, E)$



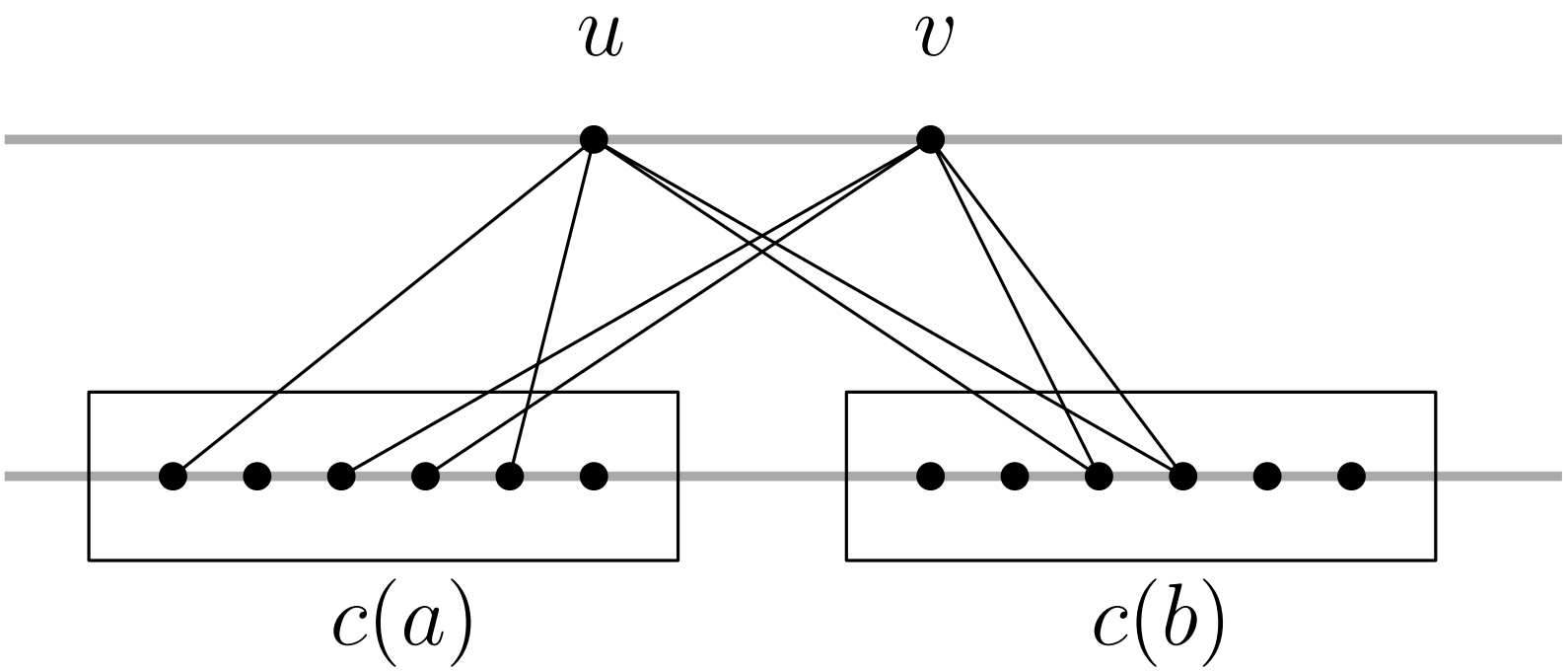
Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen



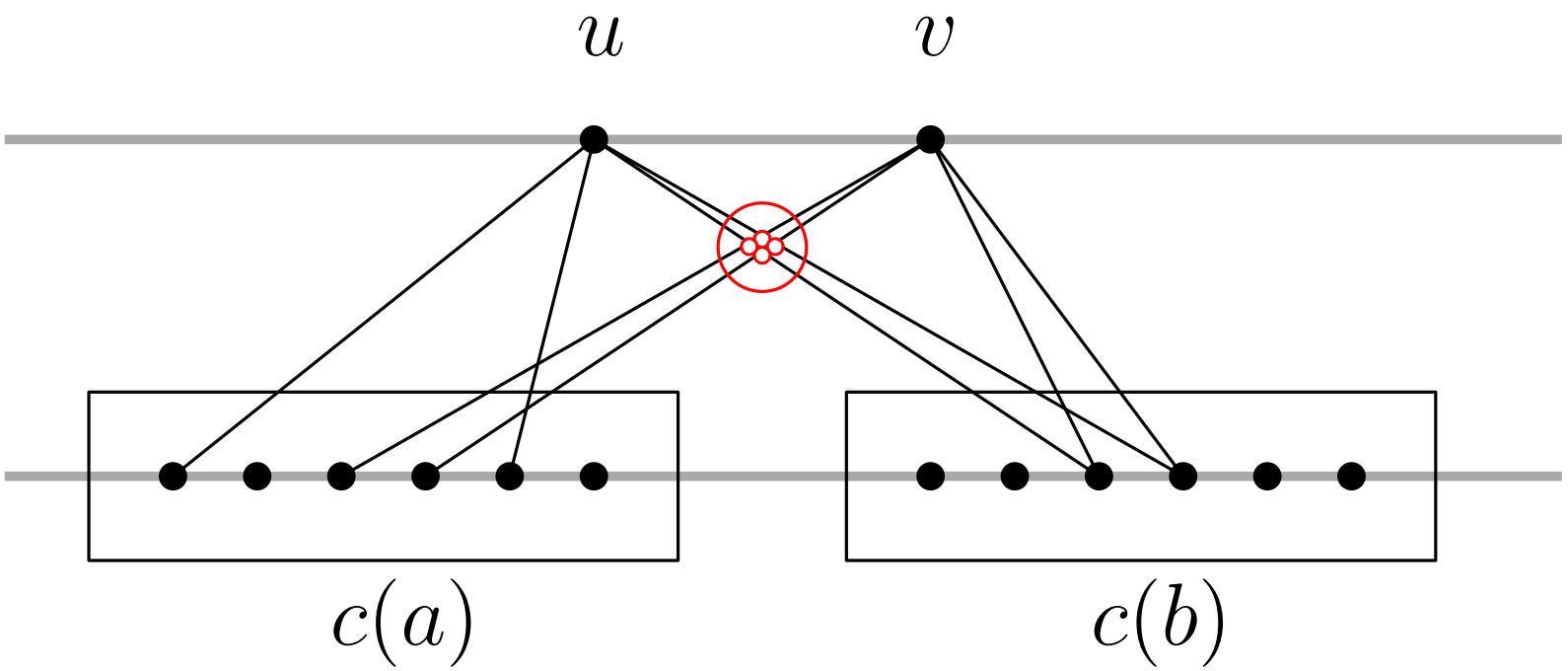
Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen



Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen

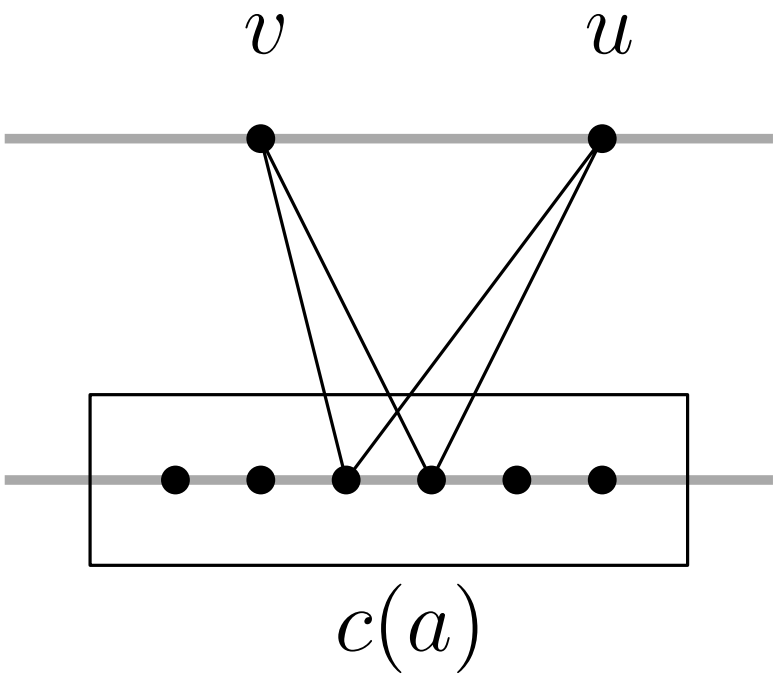


$$4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$$

Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen

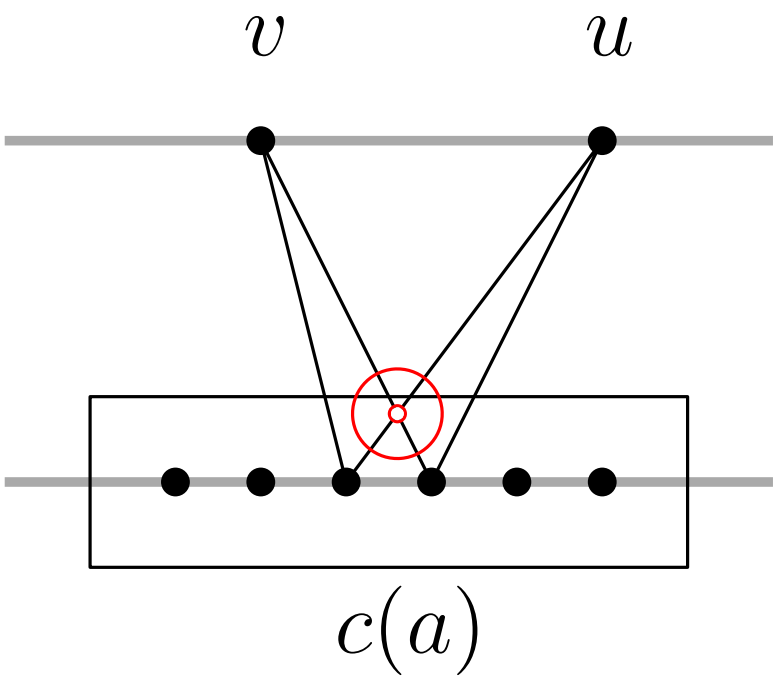
$$4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$$



Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen

$$4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$$

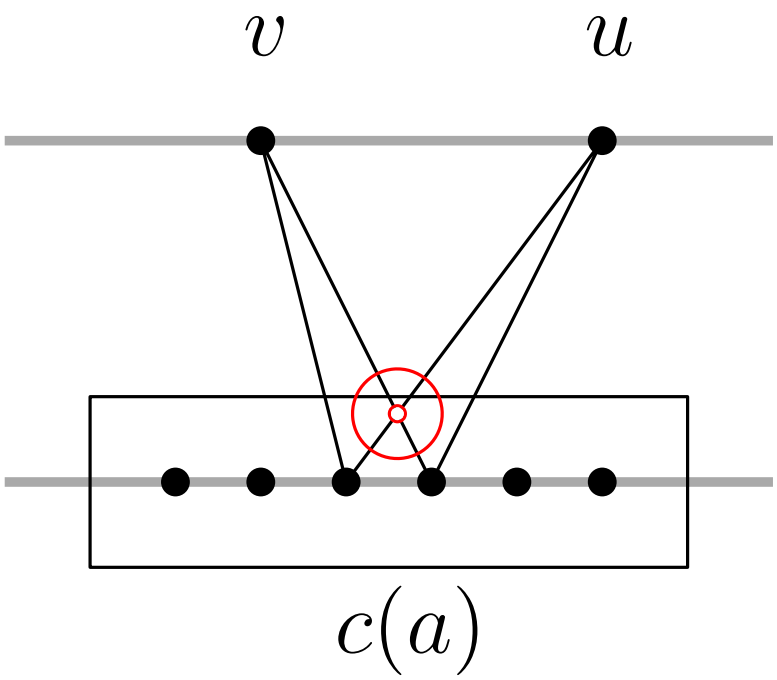


$$+m \cdot \binom{n-2}{2}$$

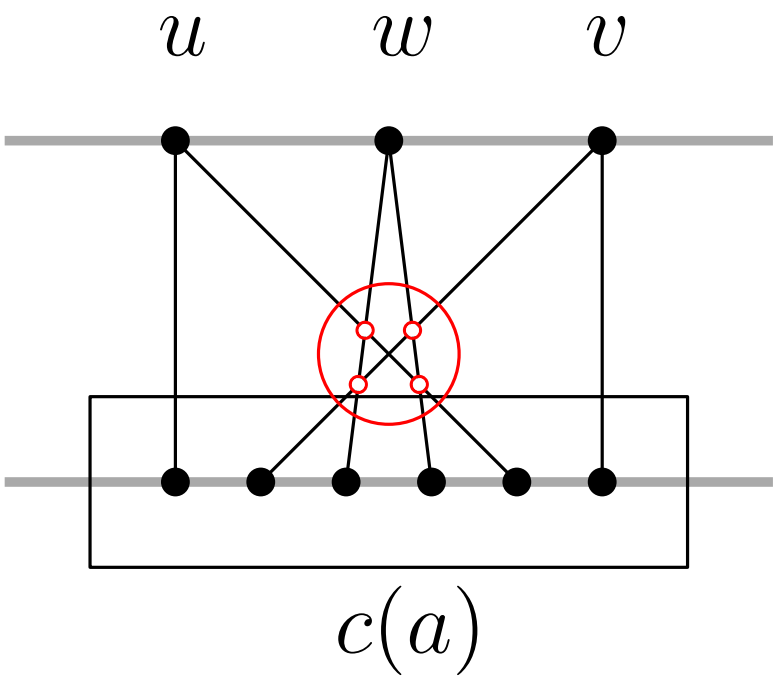
Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen

$$4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$$



$$+m \cdot \binom{n-2}{2}$$

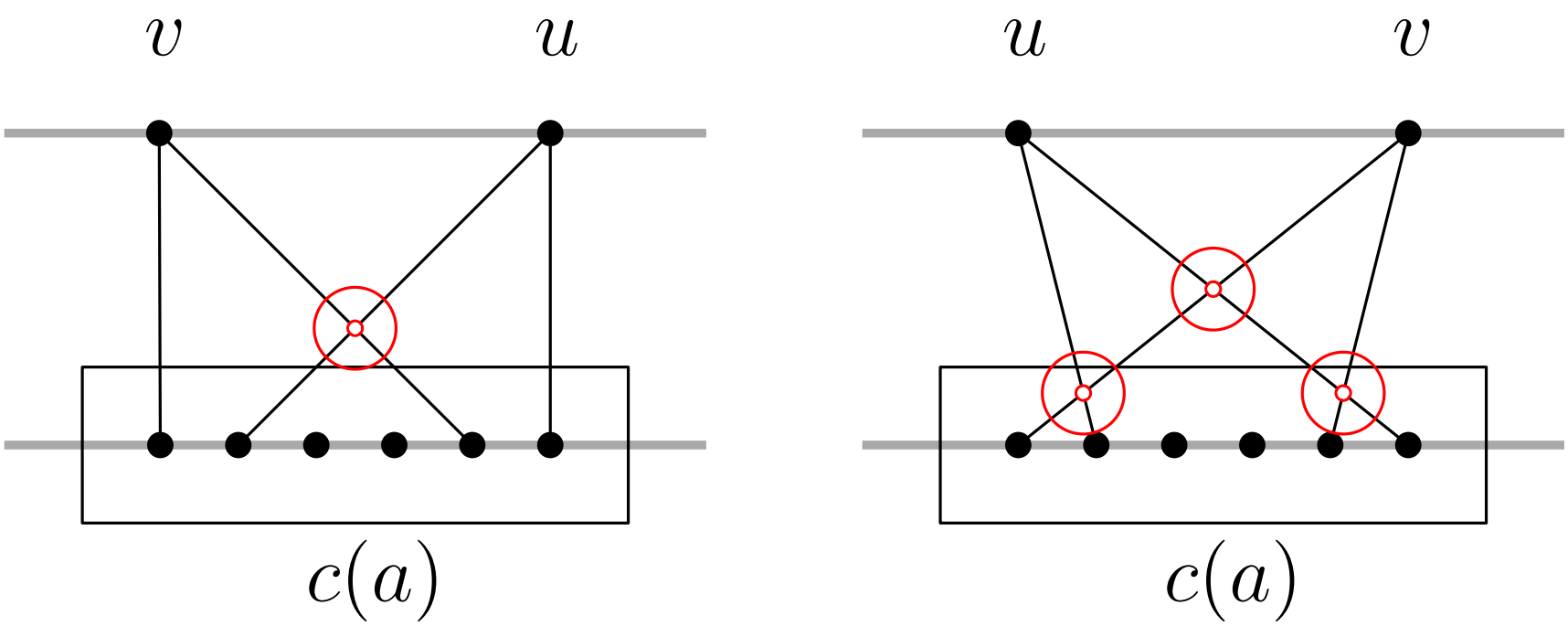


$$+4 \cdot m \cdot (n-2)$$

Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen

$$4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n-2}{2} + 4 \cdot m \cdot (n-2) =: M$$

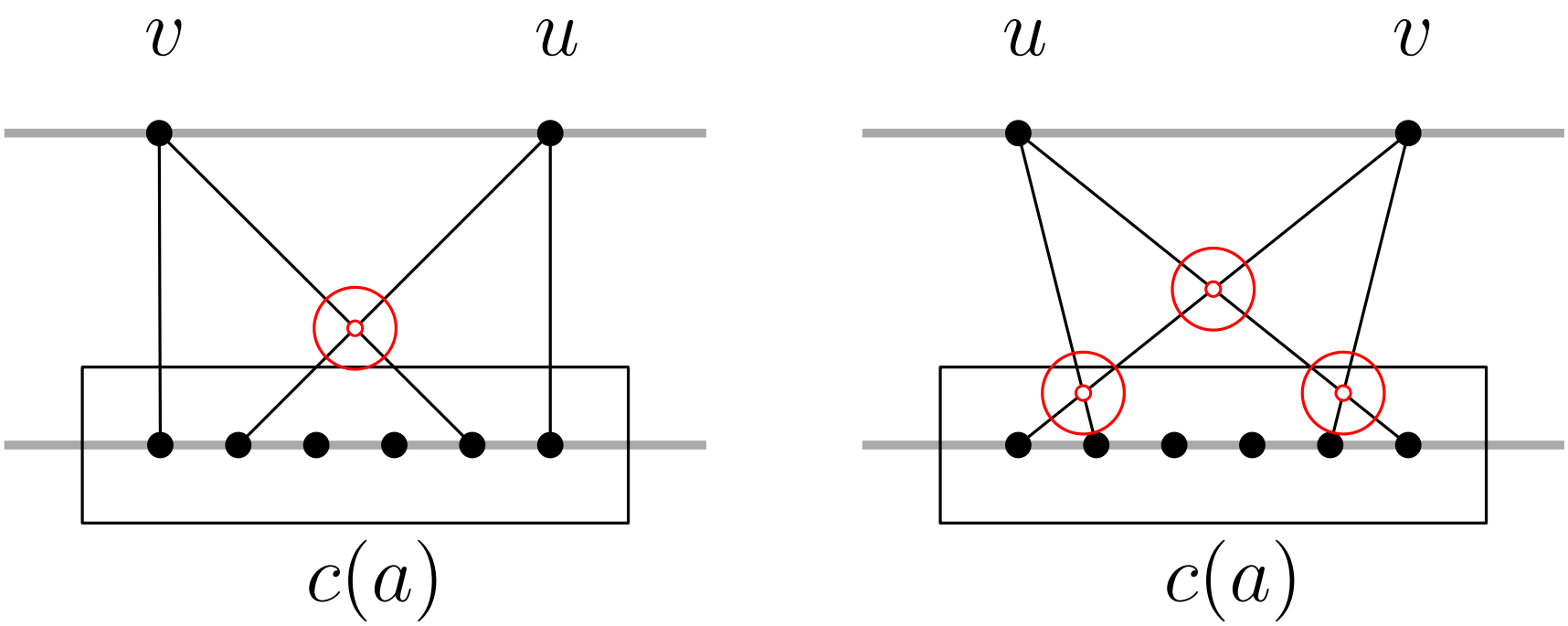


$+(m - m')$ $+3m'$

Komplexität OSCM

Kreuzungen zählen

$$4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n-2}{2} + 4 \cdot m \cdot (n-2) =: M$$



$$\text{opt}(G, x_1) \leq M + m + 2m'$$
$$\Leftrightarrow D \text{ hat FAS der Größe} \leq m'$$

□

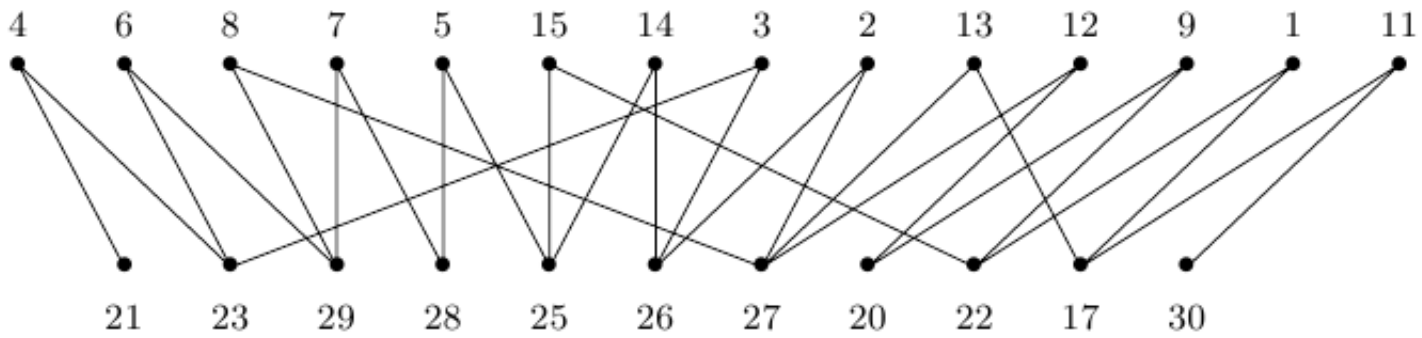
Algorithmen für OSCM

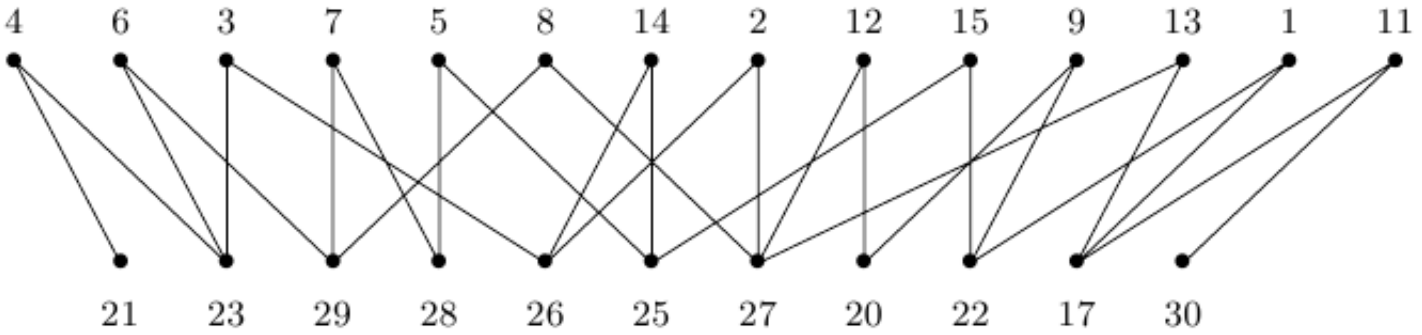
Heuristiken:

- Barycenter
- Median
- ...

Exakt:

- ILP Modellierung





Barycenter Heuristik (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)

Idee: wenige Kreuzungen, wenn Knoten nah an den Nachbarn

- setze

$$x_2(u) = \frac{1}{\deg(u)} \sum_{v \in N(u)} x_1(u)$$

- bei Gleichheit um kleinen Wert trennen

Barycenter Heuristik (Sugiyama, Tagawa, Toda 1981)

Idee: wenige Kreuzungen, wenn Knoten nah an den Nachbarn

- setze

$$x_2(u) = \frac{1}{\deg(u)} \sum_{v \in N(u)} x_1(u)$$

- bei Gleichheit um kleinen Wert trennen

Eigenschaften:

- geringer Implementationsaufwand
- schnell
- meist sehr gute Ergebnisse
- findet Optimum falls $\mathrm{opt}(G, x_1) = 0$ (s. Übungsblatt)
- im worst case um Faktor $\Omega(\sqrt{n})$ schlechter

Median-Heuristik (Eades, Wormald 1994)

Idee: setze Koordinate auf Median der Nachbarn

- für Knoten $v \in L_2$ mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ setze $x_2(v) = \mathrm{med}(v) = x_1(v_{\lfloor k/2 \rfloor})$
  bzw. $x_2(v) = 0$ falls $N(v) = \emptyset$
- falls $x_2(u) = x_2(v)$ mit ungleicher Gradparität, setze ungeraden Knoten nach links
- falls $x_2(u) = x_2(v)$ mit gleicher Gradparität, setze beliebigen Knoten nach links
- Berechnung mit Linearzeit-Medianalgorithmus in $O(|E|)$

Median-Heuristik (Eades, Wormald 1994)

Idee: setze Koordinate auf Median der Nachbarn

- für Knoten $v \in L_2$ mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ setze $x_2(v) = \text{med}(v) = x_1(v_{\lfloor k/2 \rfloor})$ bzw. $x_2(v) = 0$ falls $N(v) = \emptyset$
- falls $x_2(u) = x_2(v)$ mit ungleicher Gradparität, setze ungeraden Knoten nach links
- falls $x_2(u) = x_2(v)$ mit gleicher Gradparität, setze beliebigen Knoten nach links
- Berechnung mit Linearzeit-Medianalgorithmus in $O(|E|)$

Eigenschaften:

- geringer Implementationsaufwand
- schnell
- meist gute Ergebnisse
- findet Optimum falls $\text{opt}(G, x_1) = 0$
- **Faktor-3 Approximation**

Approximationsfaktor

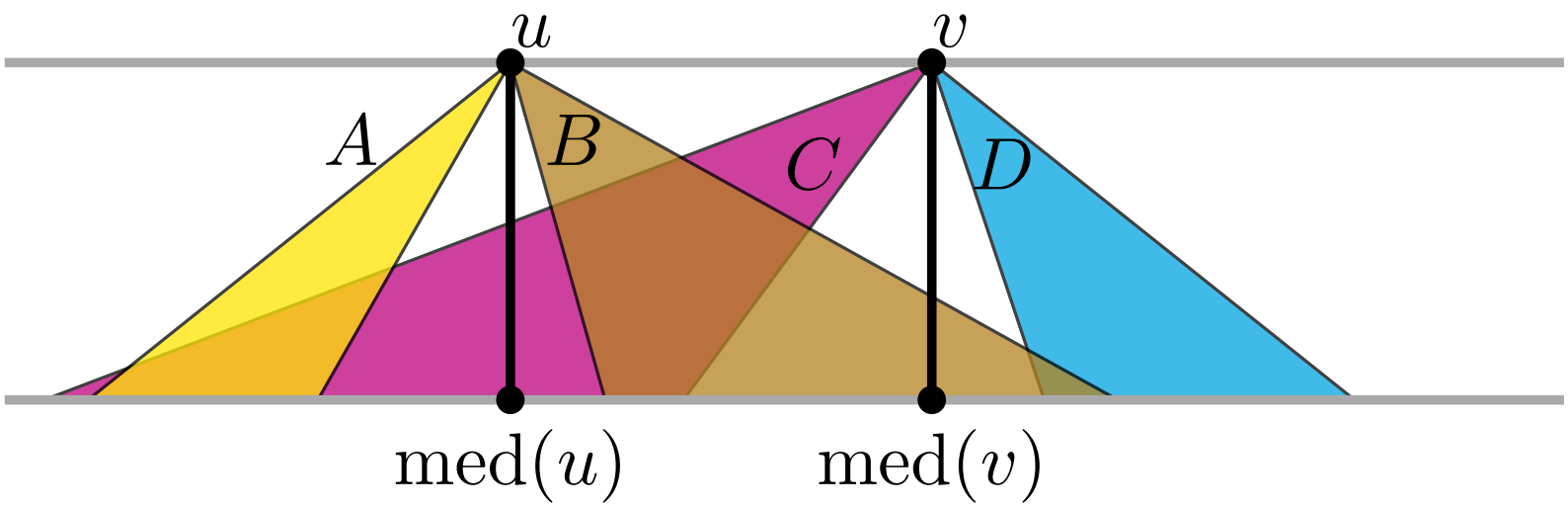
Satz: Sei $G = (L_1, L_2, E)$ ein 2-Lagen-Graph und x_1 eine beliebige Ordnung von L_1. Dann gilt

$$\operatorname{med}(G, x_1) \leq 3 \operatorname{opt}(G, x_1).$$

Approximationsfaktor

Satz: Sei $G = (L_1, L_2, E)$ ein 2-Lagen-Graph und x_1 eine beliebige Ordnung von L_1. Dann gilt

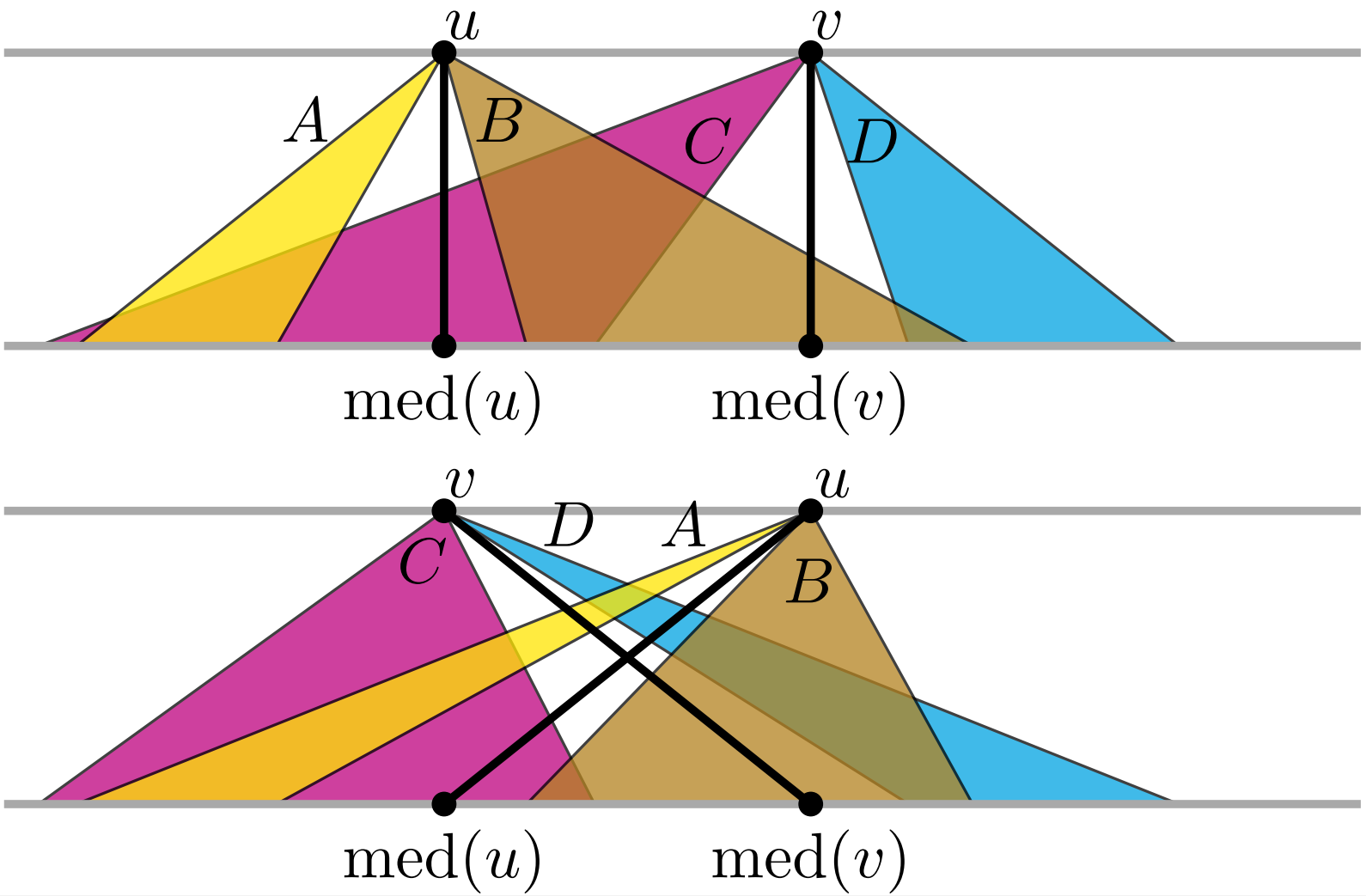
$$\mathrm{med}(G, x_1) \leq 3\,\mathrm{opt}(G, x_1).$$



Approximationsfaktor

Satz: Sei $G = (L_1, L_2, E)$ ein 2-Lagen-Graph und x_1 eine beliebige Ordnung von L_1. Dann gilt

$$\operatorname{med}(G, x_1) \leq 3 \operatorname{opt}(G, x_1).$$



Ganzzahlige Lineare Programmierung

Karlsruhe Institute of Technology

Eigenschaften:

- branch-and-cut Technik für DAGs beschränkter Größe
- findet optimale Lösung
- Lösung jedoch nicht in polynomieller Zeit garantiert
- nützlich für kleine bis mittlere Grapehn

Ganzzahlige Lineare Programmierung

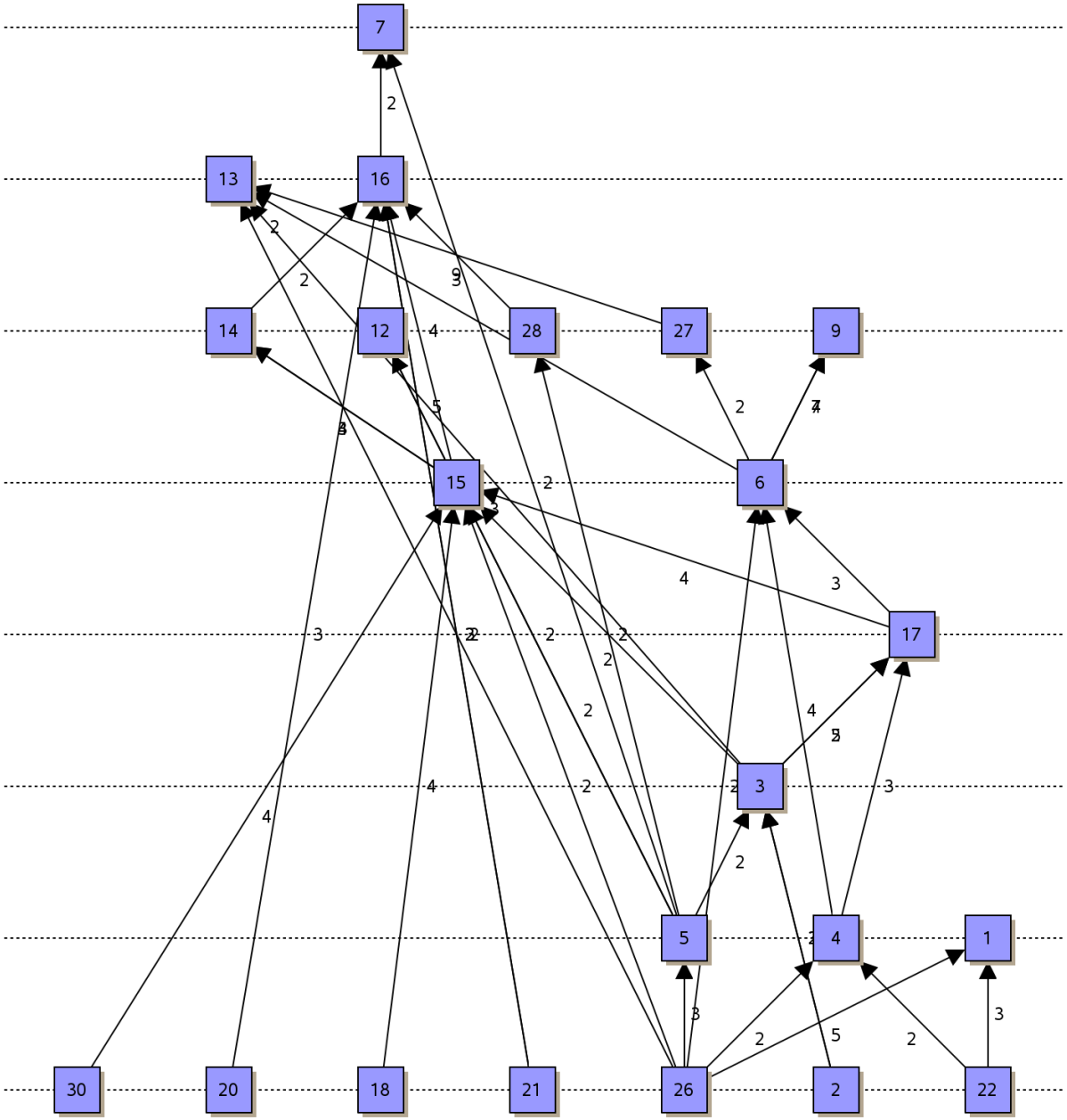
Karlsruhe Institute of Technology

Eigenschaften:

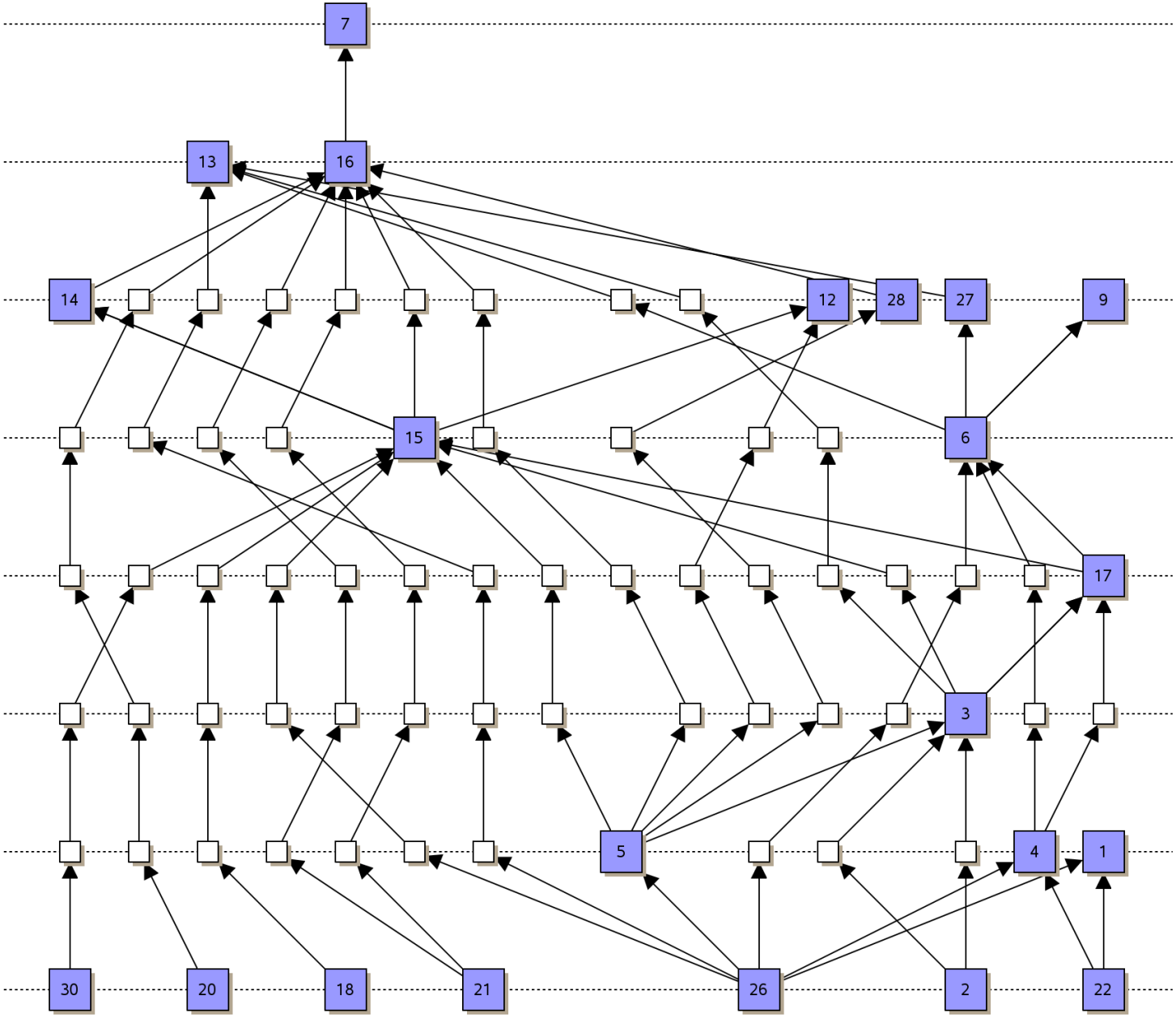
- branch-and-cut Technik für DAGs beschränkter Größe
- findet optimale Lösung
- Lösung jedoch nicht in polynomieller Zeit garantiert
- nützlich für kleine bis mittlere Grapehn

Modell: siehe Tafel

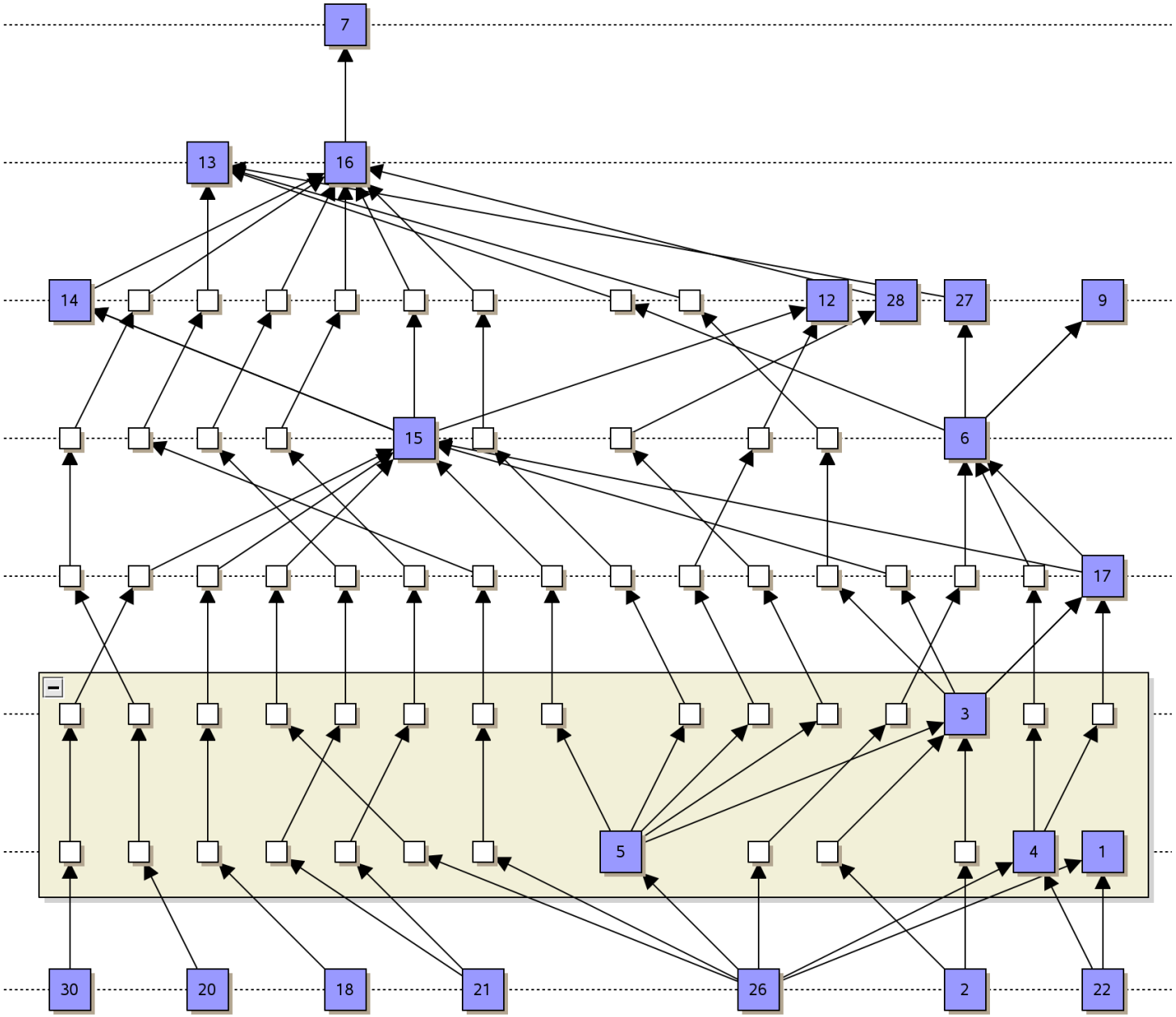
Beispiel



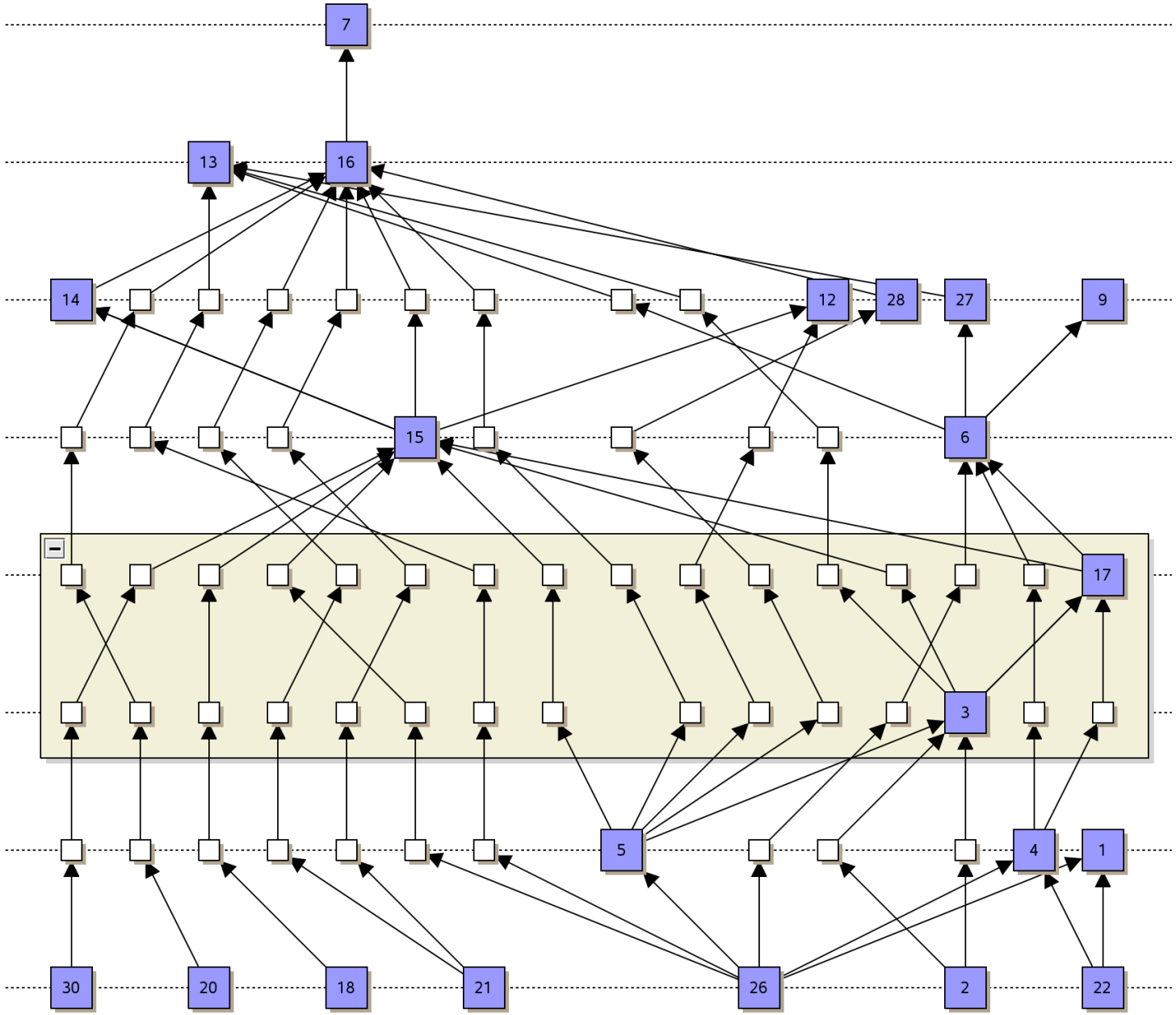
Beispiel



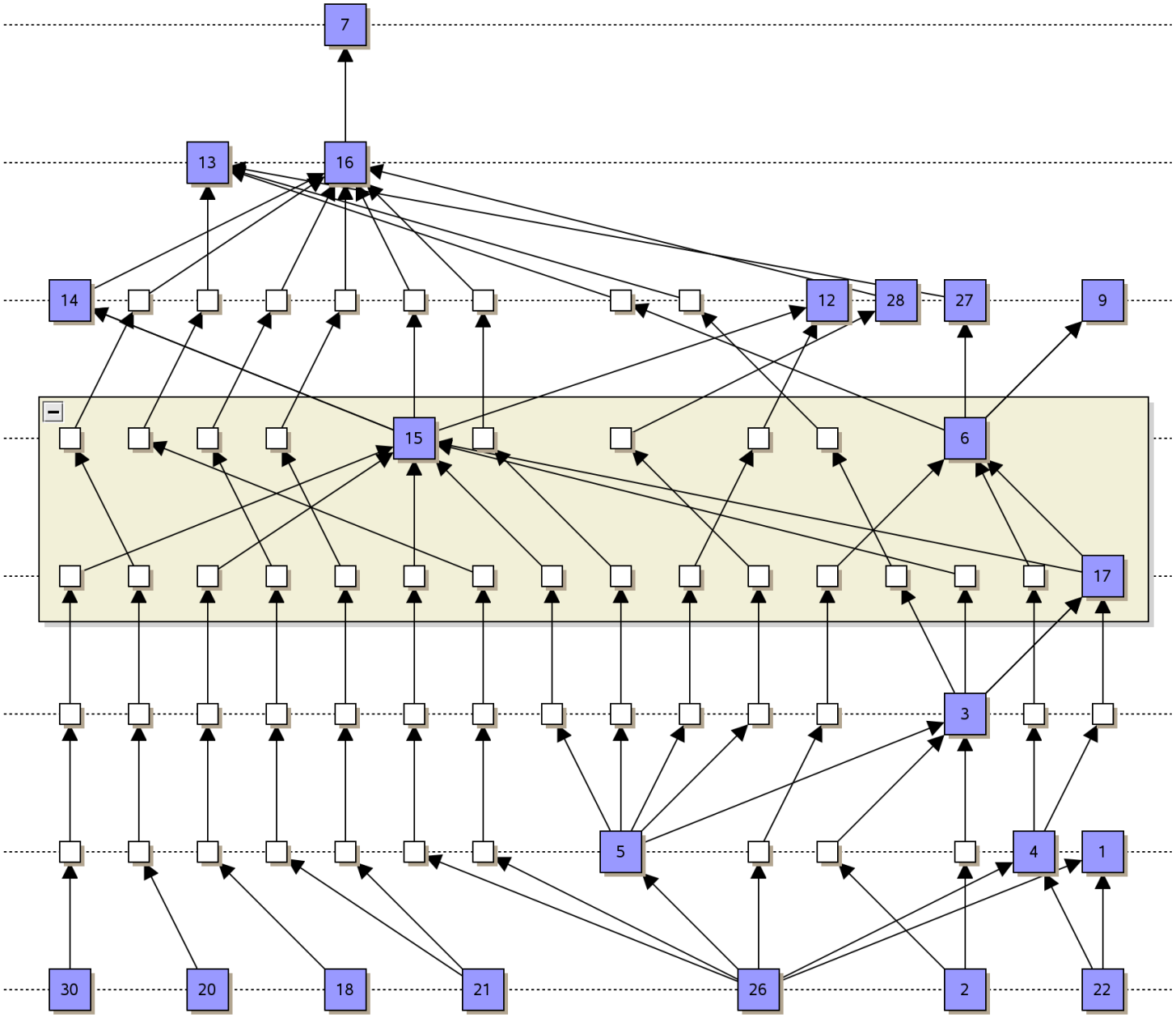
Beispiel



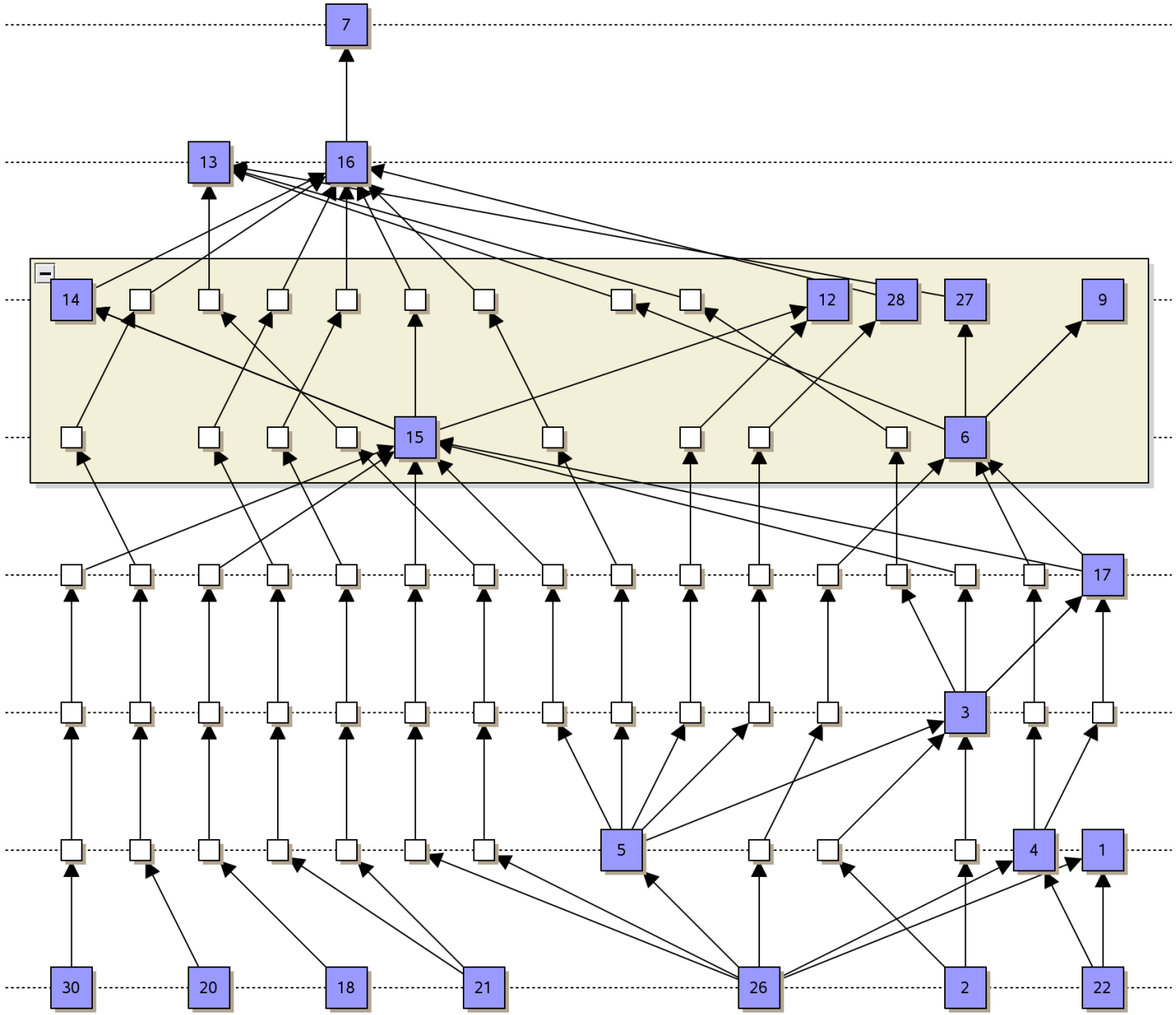
Beispiel



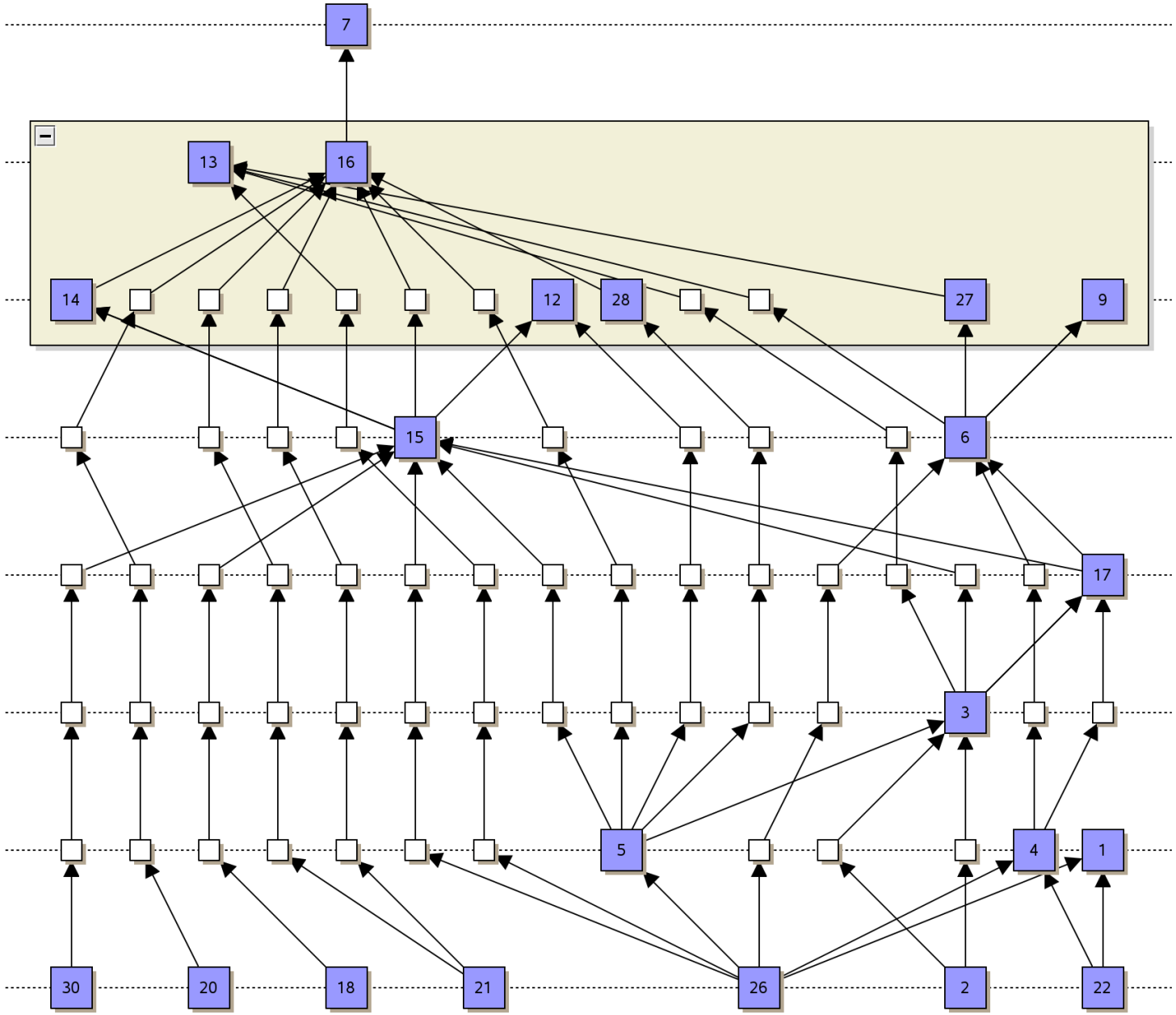
Beispiel



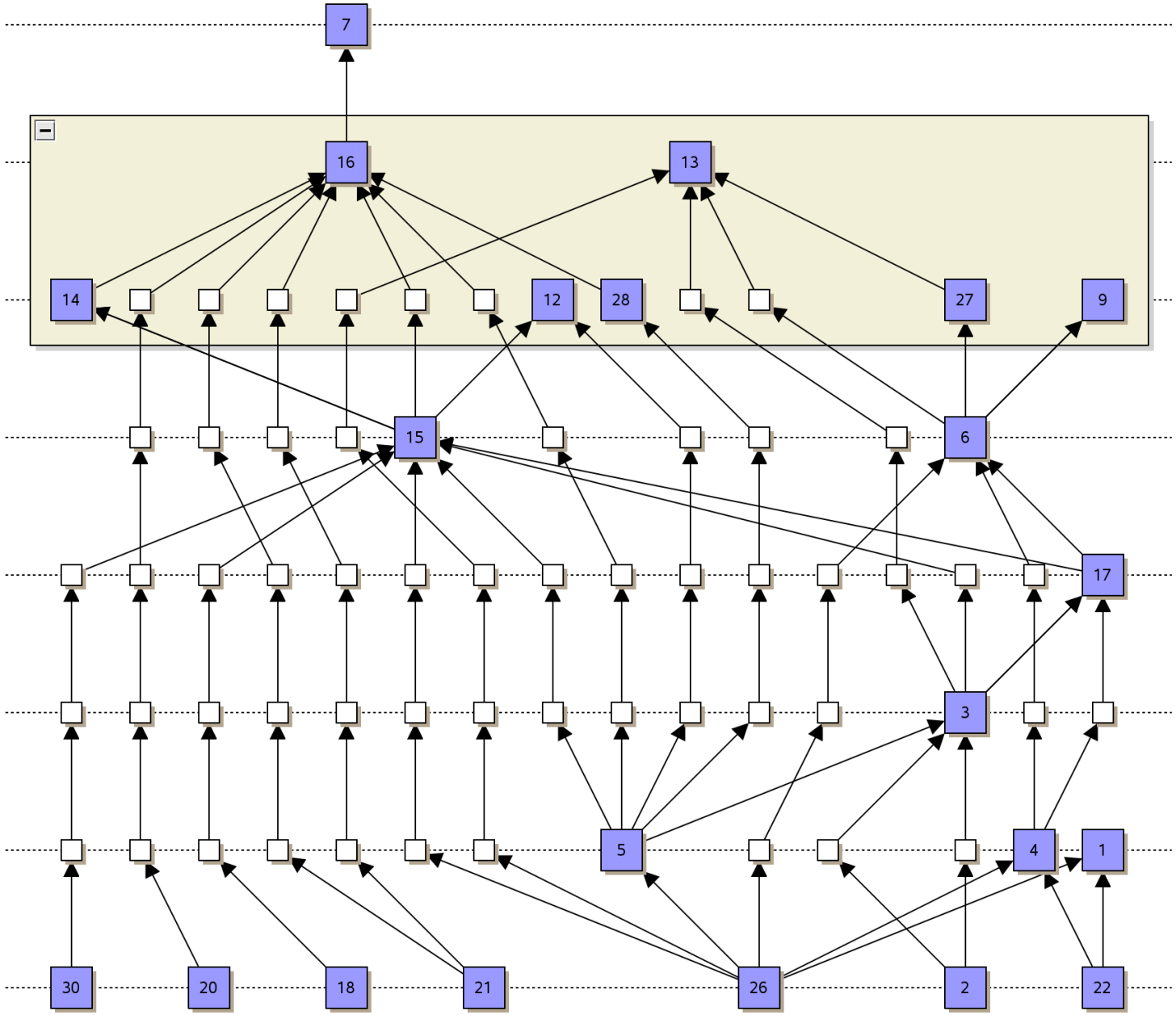
Beispiel



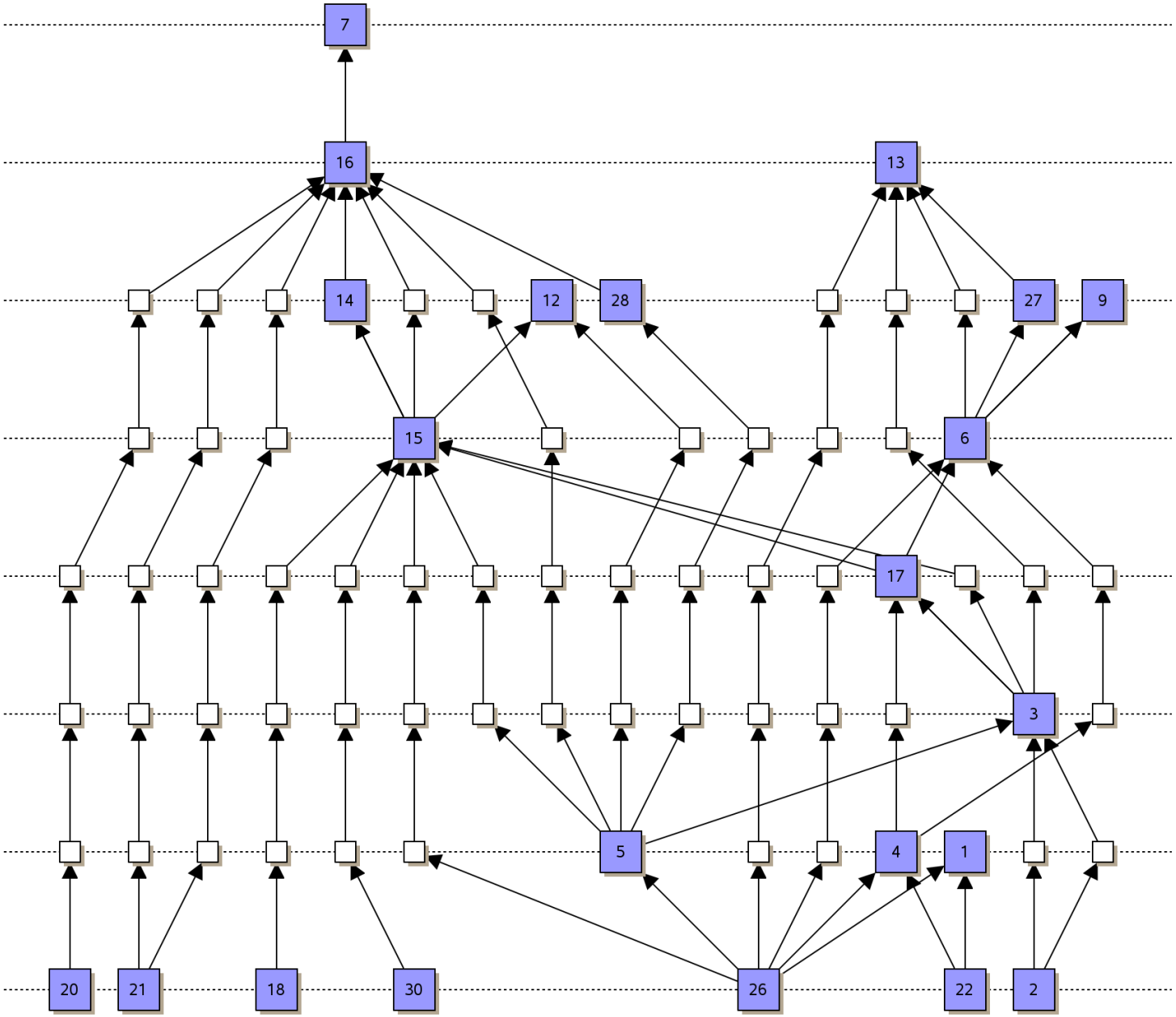
Beispiel



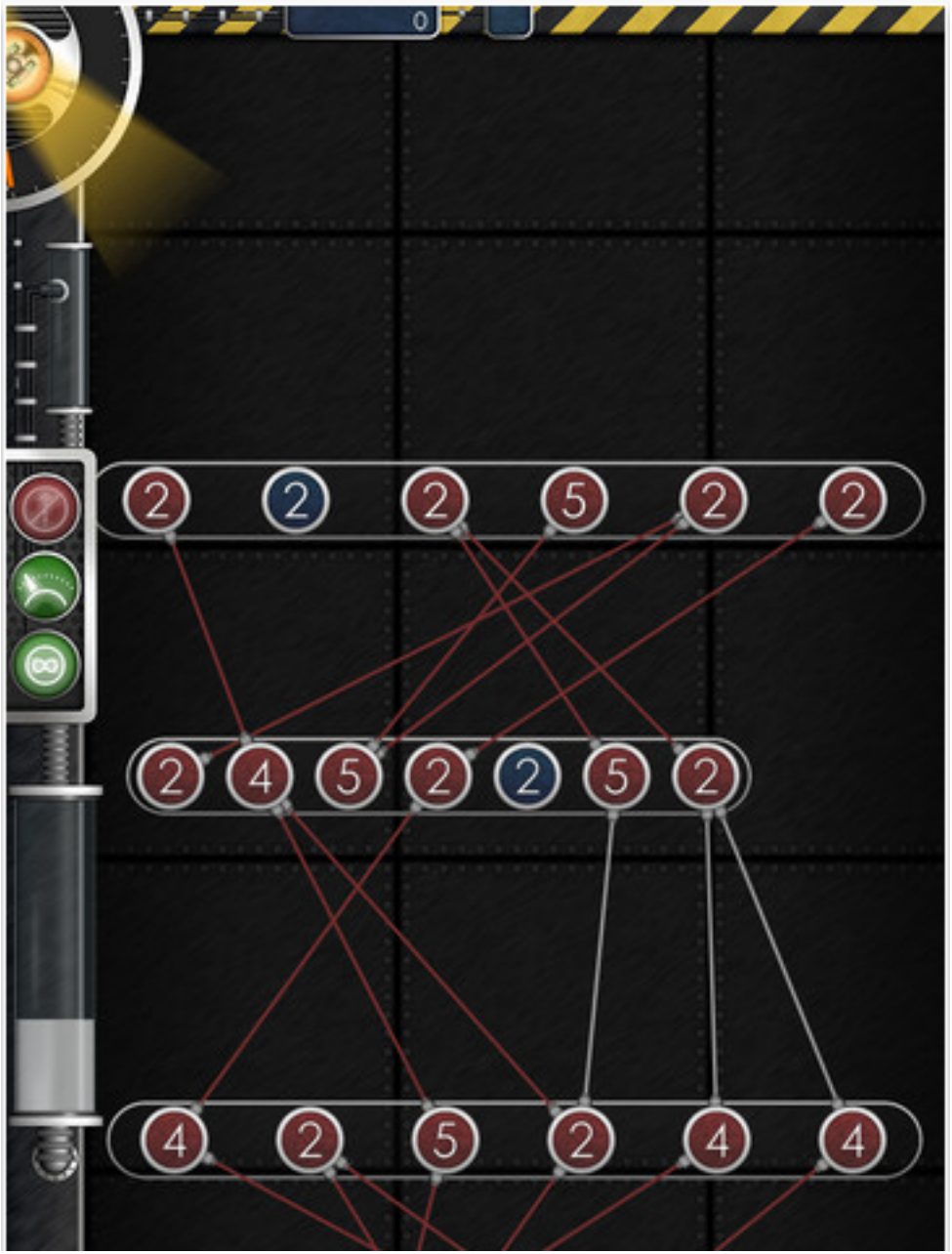
Beispiel



Beispiel



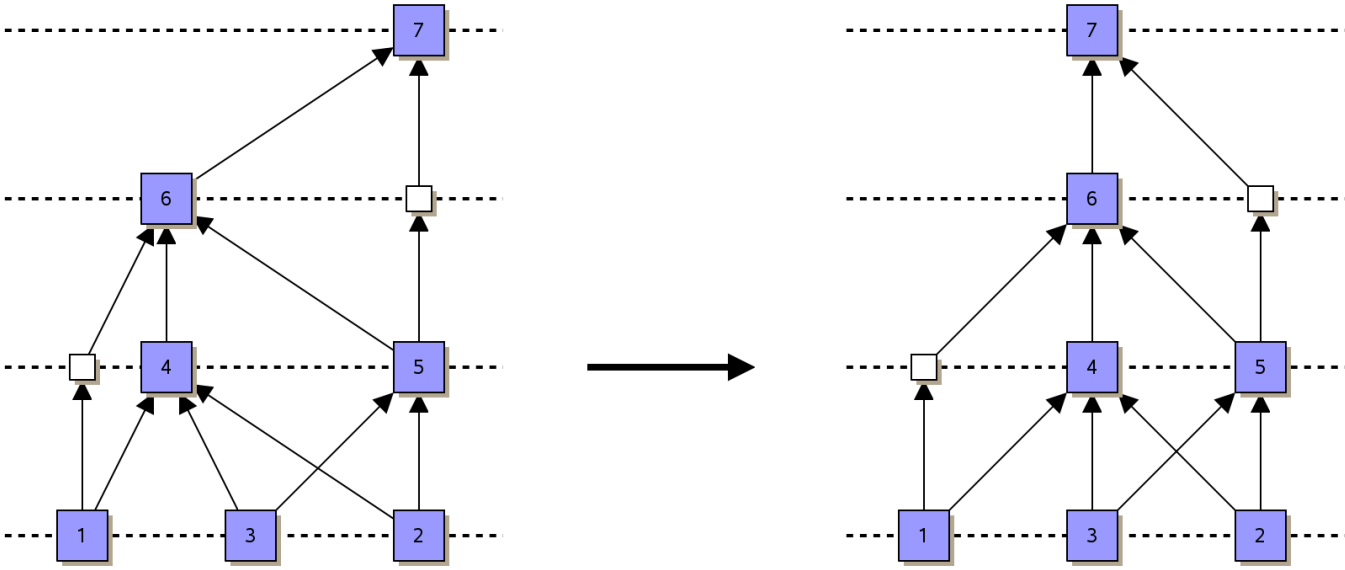
CrossingX



Gibt sogar ein iPad Spiel **CrossingX** für das OSCM Problem!

Gewinner Graph Drawing Game Contest 2012

Schritt 4: Koordinatenzuweisung



Welche Ziele gibt es?

Kanten begradigen

Ziel: minimiere Abweichung von gerader Linie für Kanten mit Dummy-Knoten

Idee: nutze quadratisches Programm

- sei $p_{uv} = (u, d_1, \ldots, d_k, v)$ Pfad mit k Dummyknoten zwischen u und v
- sei $a_i = x(u) + \frac{i}{k+1}(x(v) - x(u))$ die x-Koordinate von d_i bei gerader Linie
- minimiere $\sum_{i=1}^{k}(x(d_i) - a_i)^2$ über alle Pfade
- Nebenbedingungen: $x(w) - x(z) \geq \delta$ für alle Knoten der gleichen Lage und w rechts von z (δ Abstandsparameter)

Kanten begradigen

Ziel: minimiere Abweichung von gerader Linie für Kanten mit Dummy-Knoten

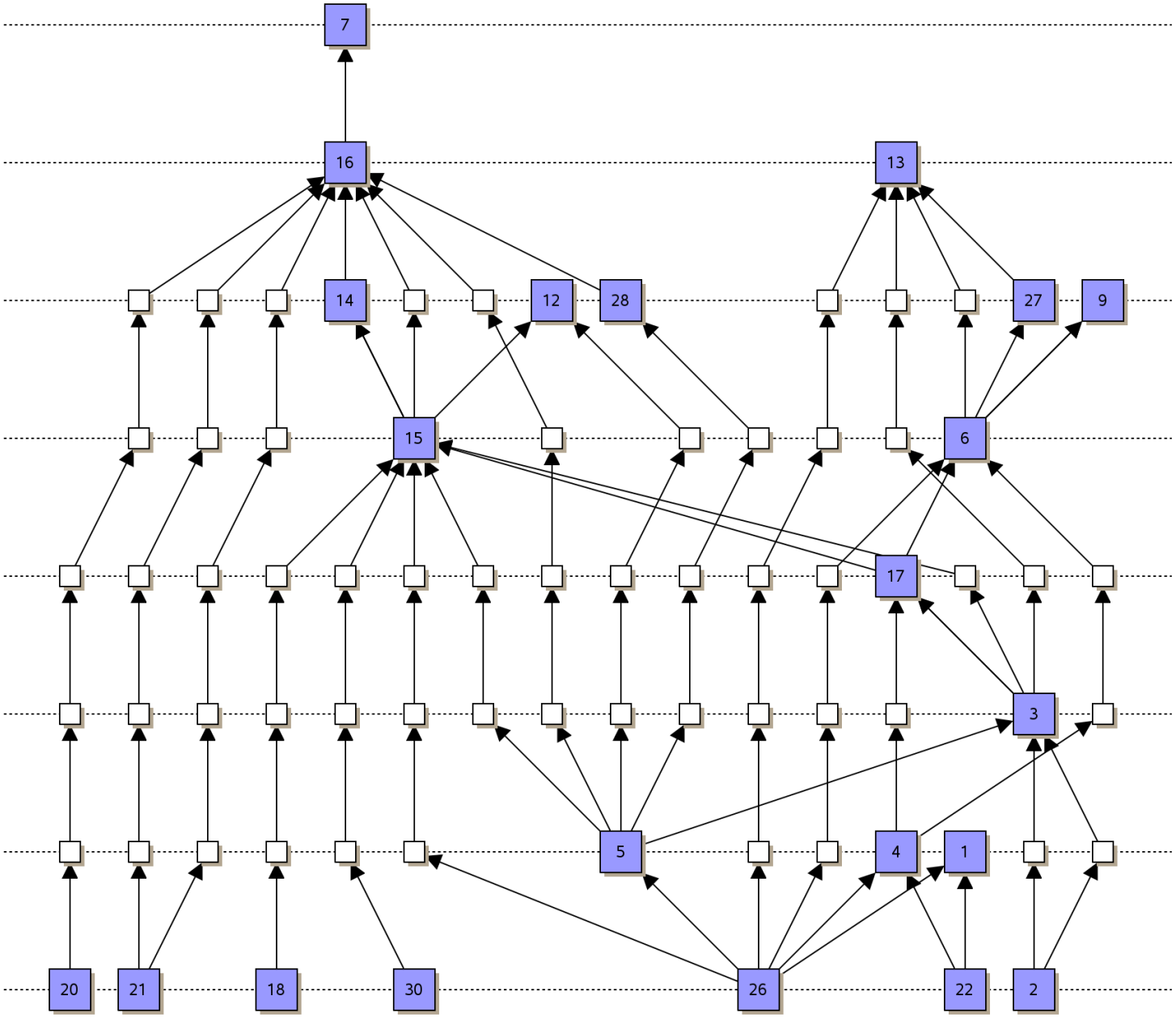
Idee: nutze quadratisches Programm

- sei $p_{uv} = (u, d_1, \ldots, d_k, v)$ Pfad mit k Dummyknoten zwischen u und v
- sei $a_i = x(u) + \frac{i}{k+1}(x(v) - x(u))$ die x-Koordinate von d_i bei gerader Linie
- minimiere $\sum_{i=1}^{k}(x(d_i) - a_i)^2$ über alle Pfade
- Nebenbedingungen: $x(w) - x(z) \geq \delta$ für alle Knoten der gleichen Lage und w rechts von z (δ Abstandsparameter)

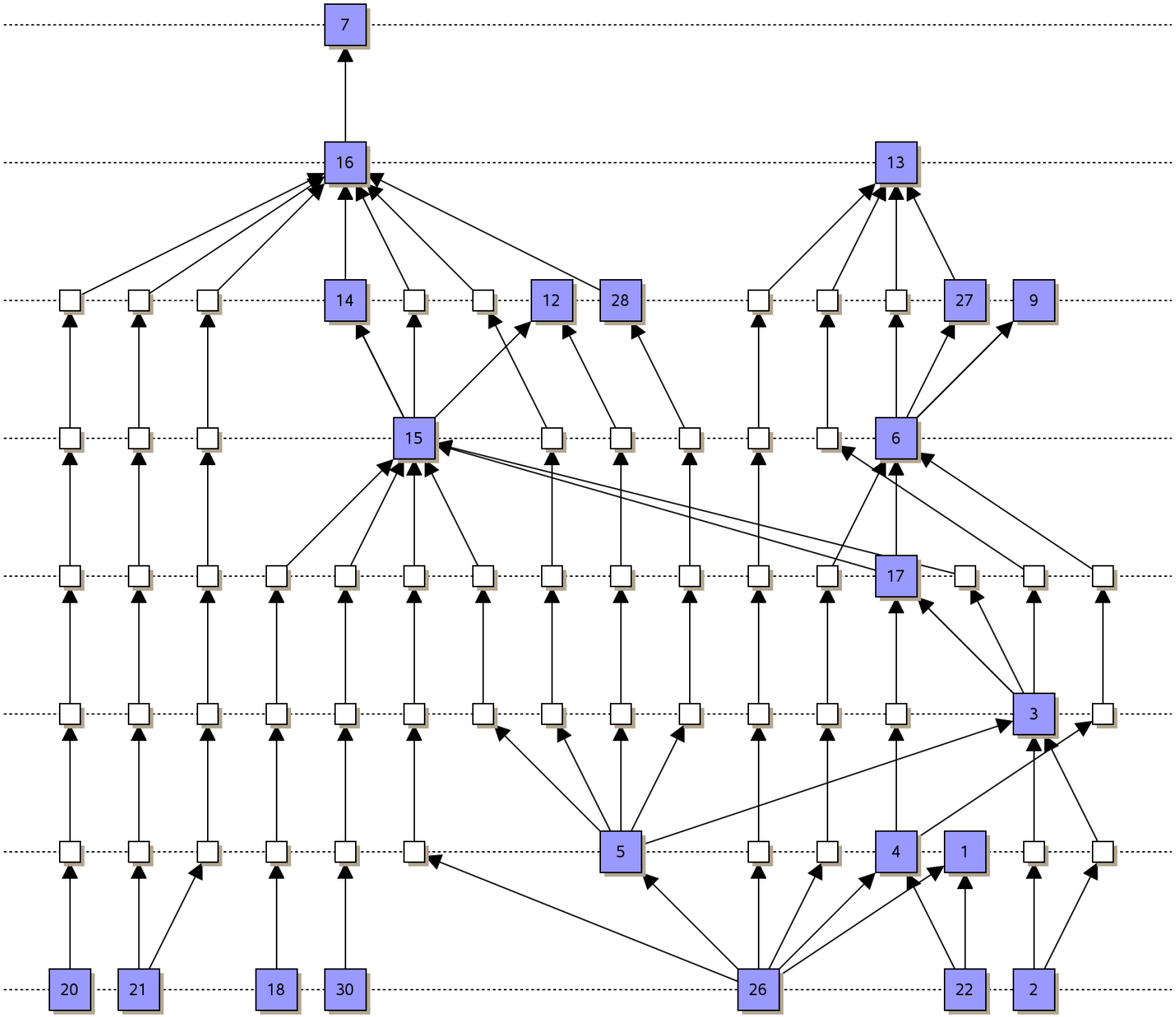
Eigenschaften:

- quadratisches Programm oft laufzeitintensiv
- Breite kann exponentiell wachsen
- Zielfunktion anpassbar für möglichst vertikale Kanten

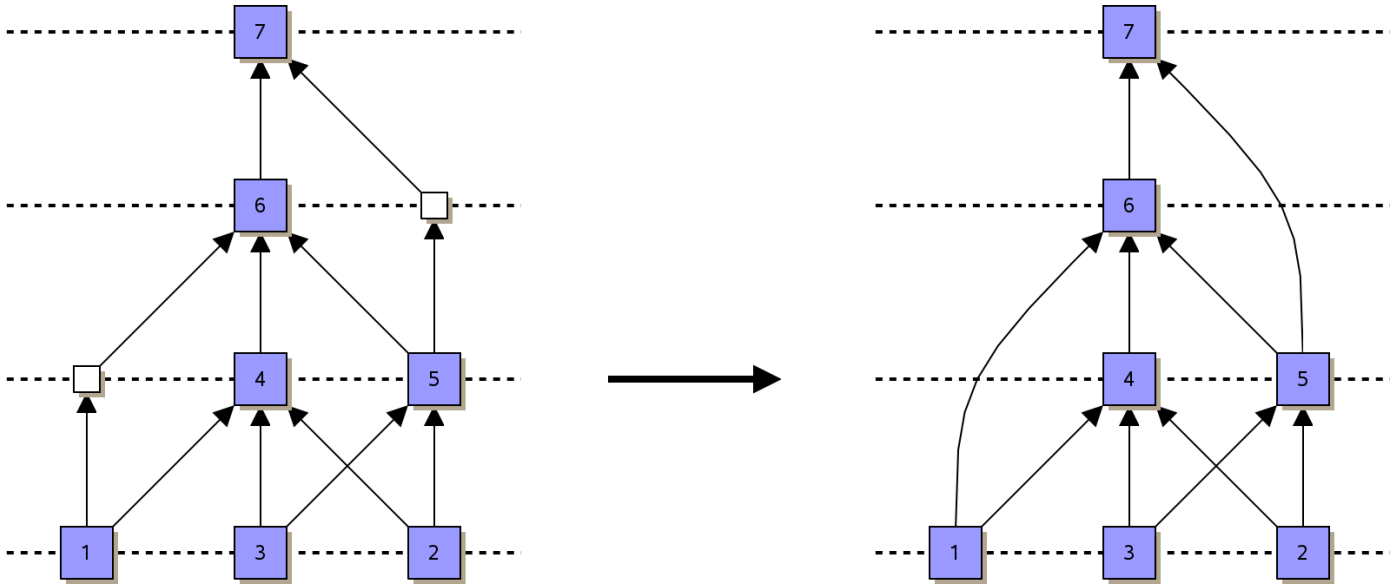
Beispiel



Beispiel

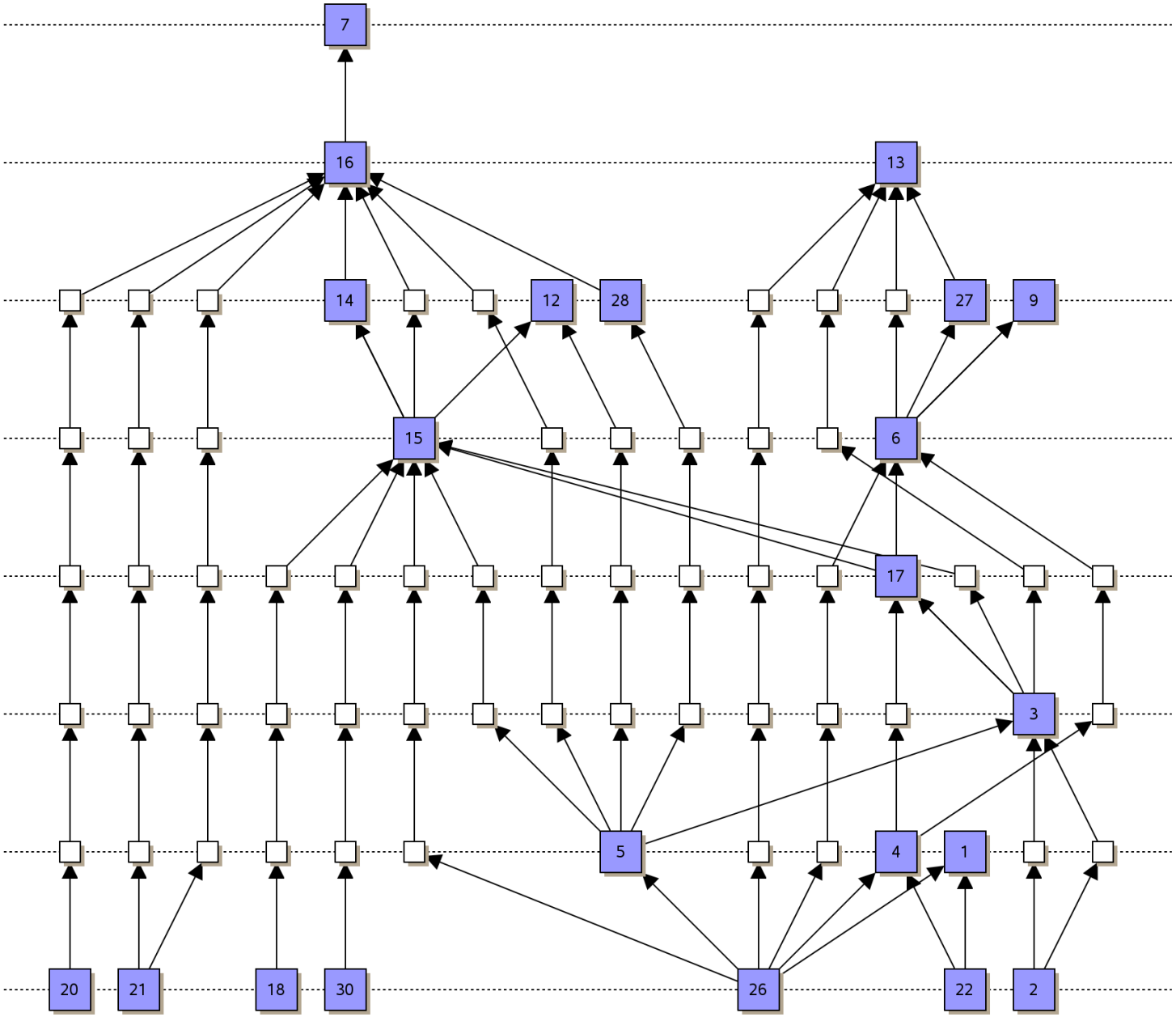


Schritt 5: Kantenzeichnen

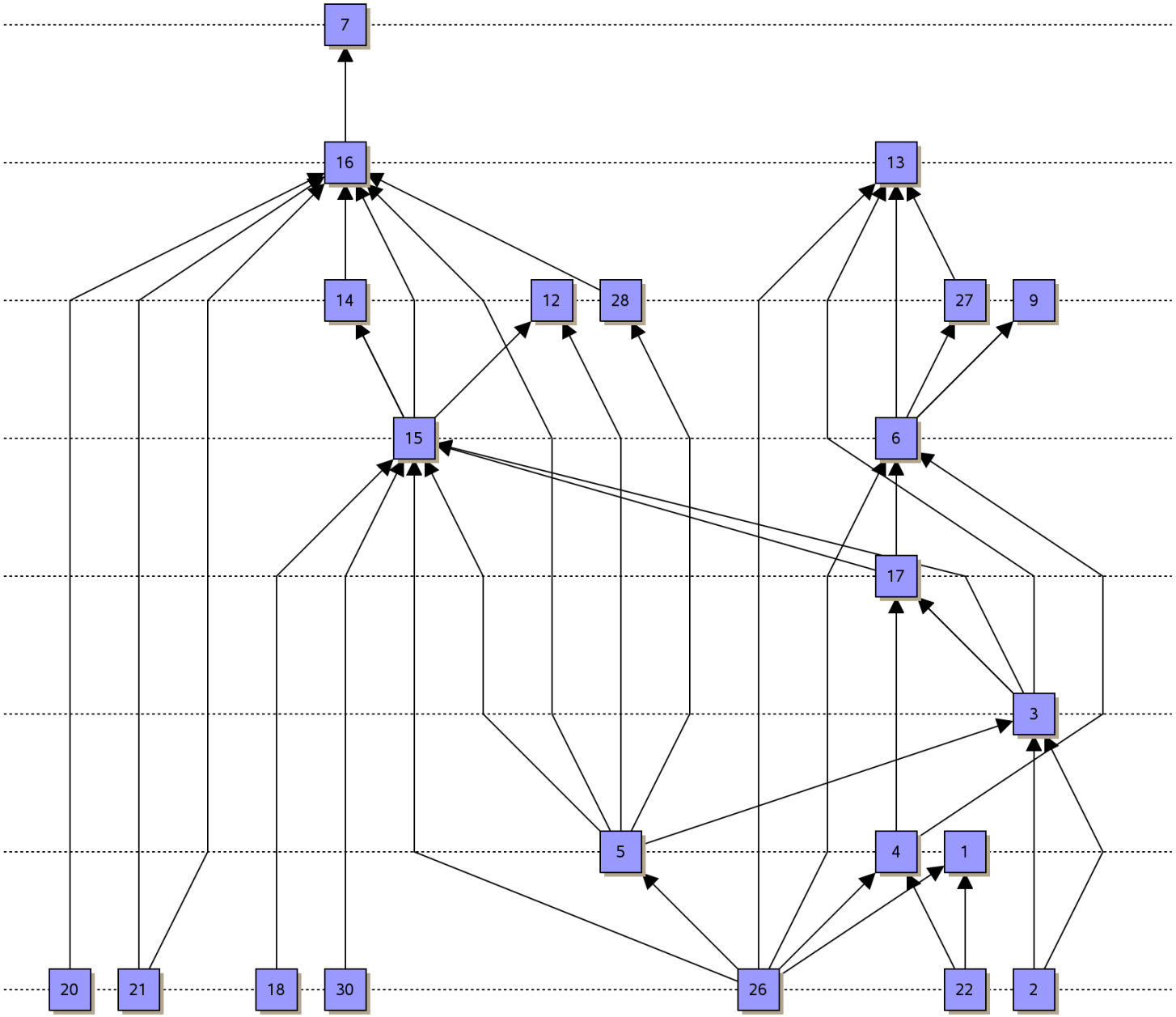


Möglichkeit: Polylines durch Bézierkurven ersetzen

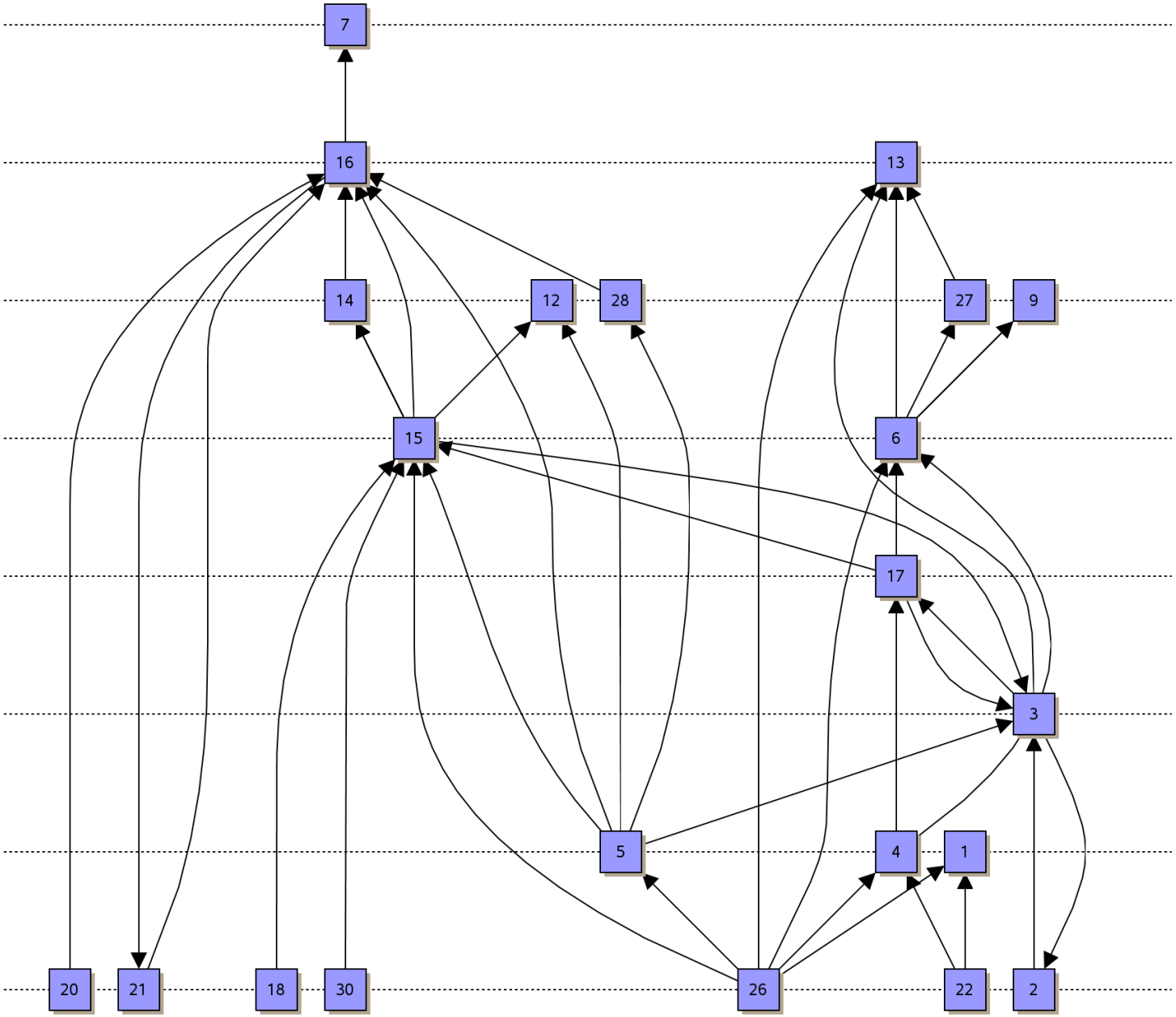
Beispiel



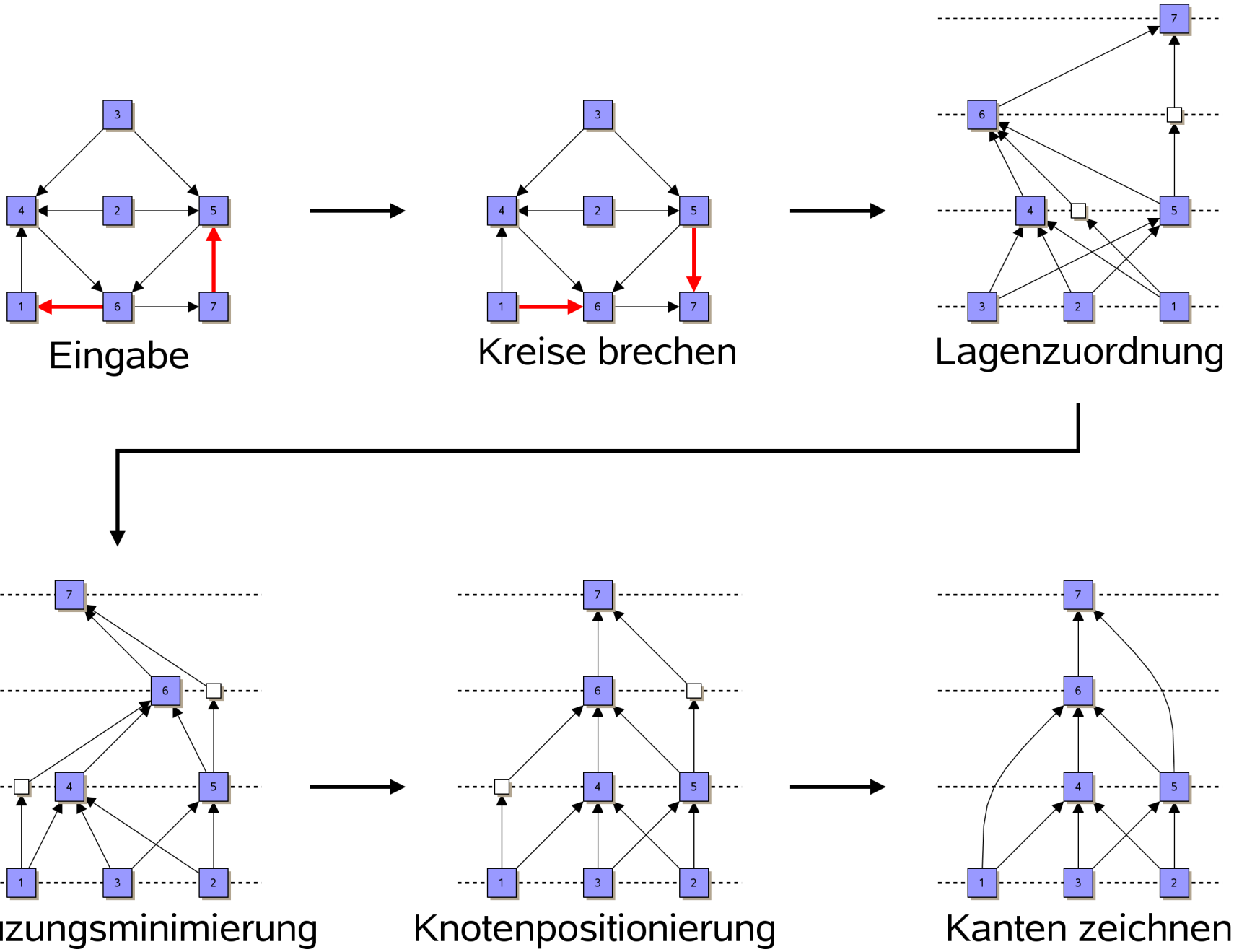
Beispiel



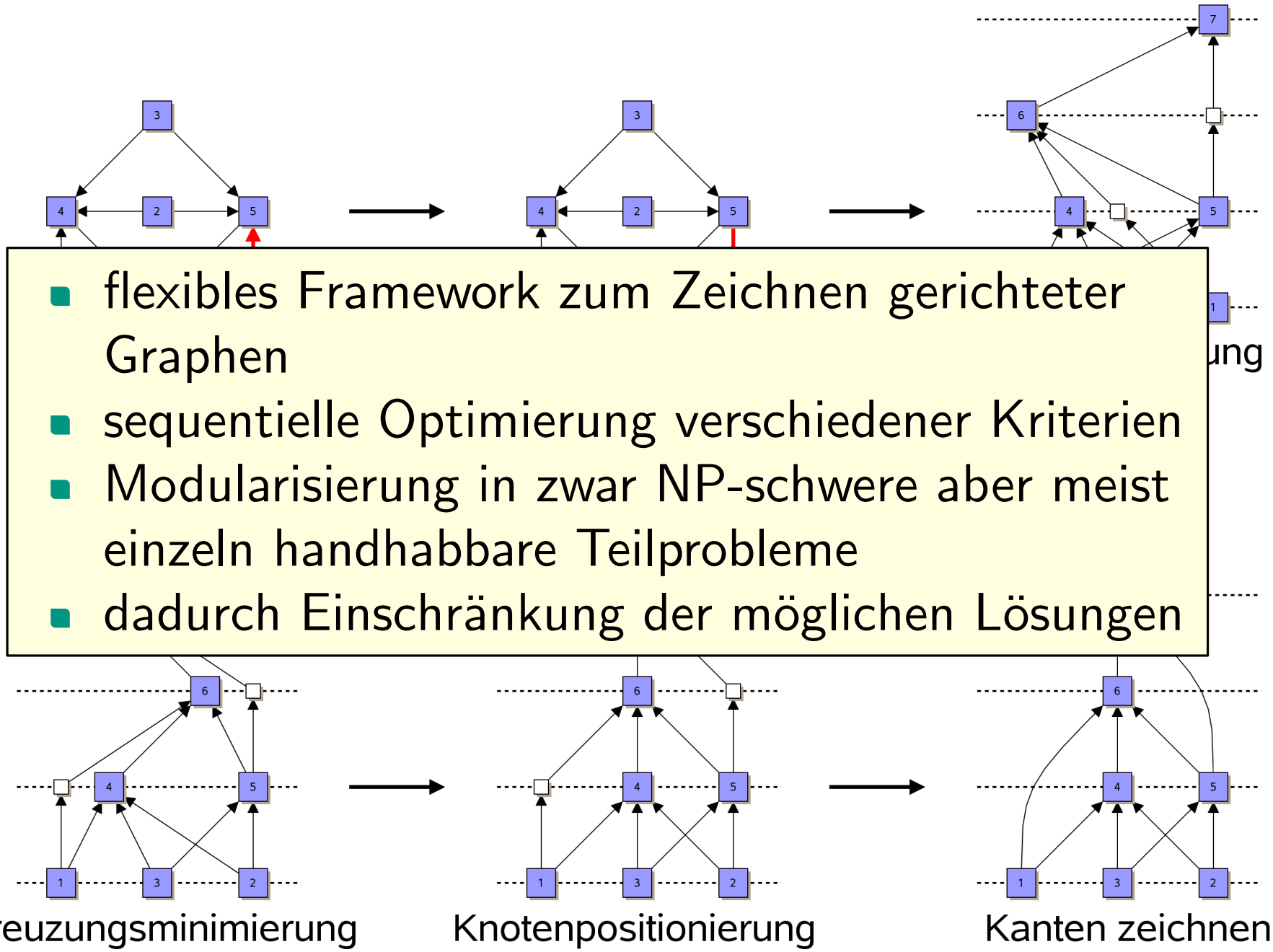
Beispiel



Zusammenfassung

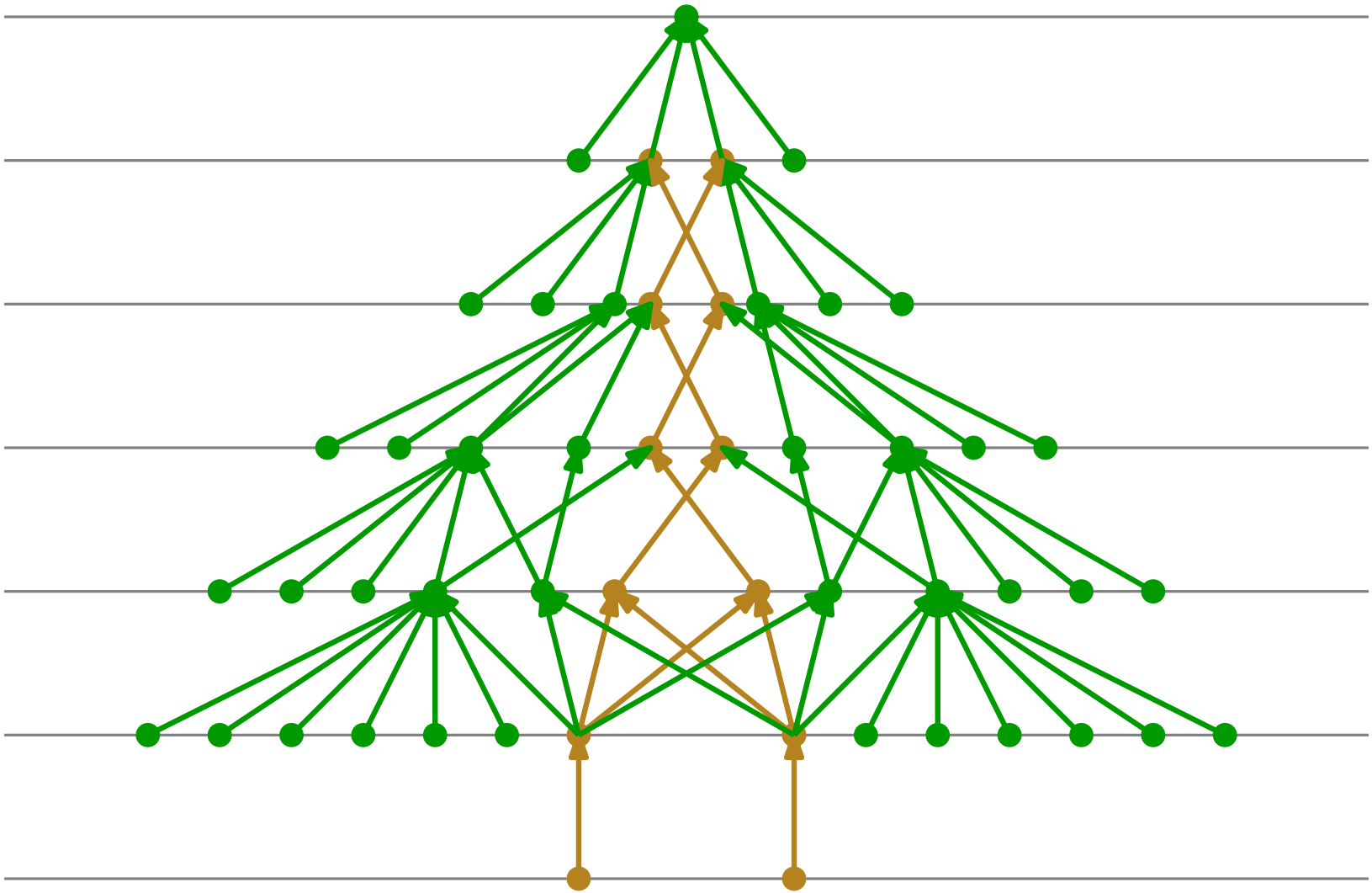


Zusammenfassung



- flexibles Framework zum Zeichnen gerichteter Graphen
- sequentielle Optimierung verschiedener Kriterien
- Modularisierung in zwar NP-schwere aber meist einzeln handhabbare Teilprobleme
- dadurch Einschränkung der möglichen Lösungen

Schöne Weihnachten!



Oder bis Morgen in der Übung...