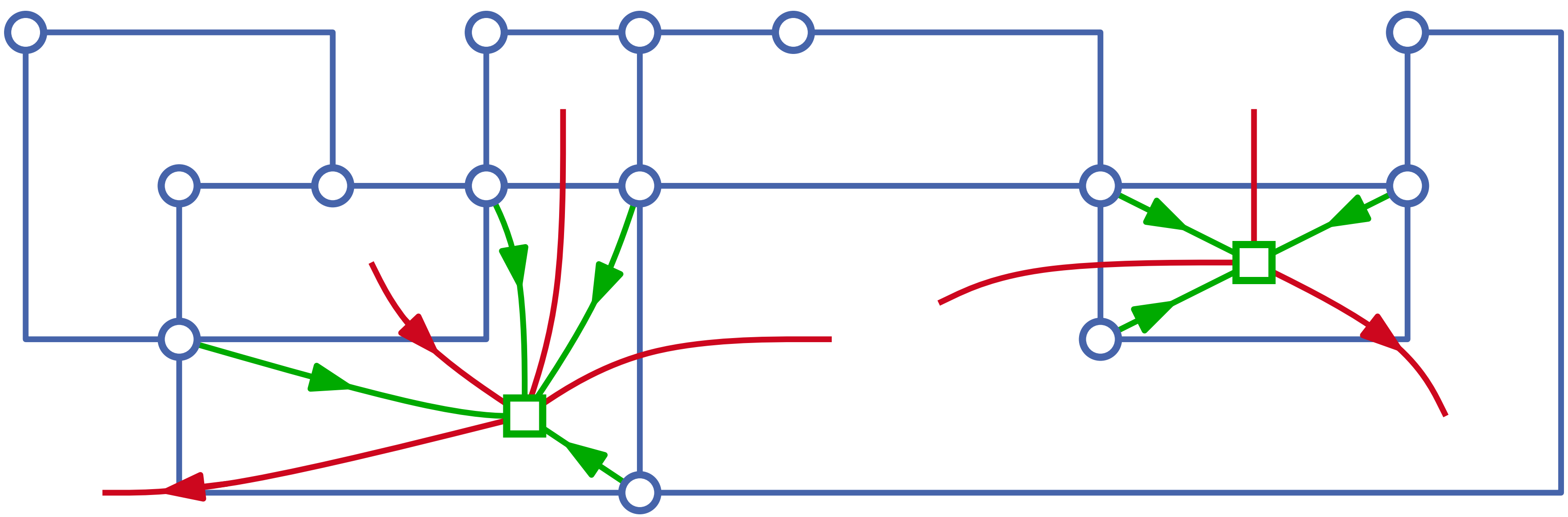
Zweite Übung

Algorithmen zu Visualisierung von Graphen
Kombinatorische Optimierung mittels Flussmethoden

Ignaz Rutter (basierend auf Folien von Thomas Bläsius)

INSTITUTE OF THEORETICAL INFORMATICS
KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY (KIT)



Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

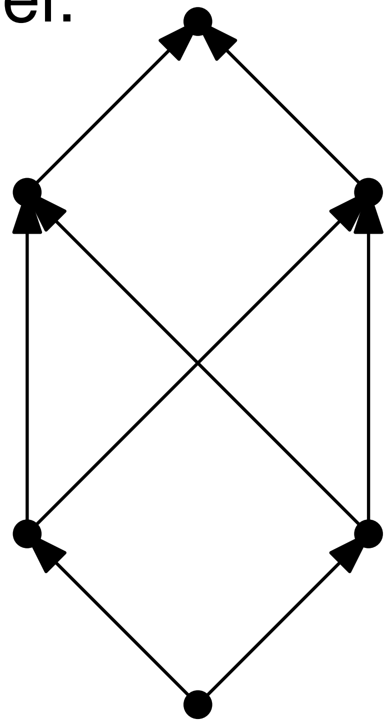
Aufwärtsplanarität

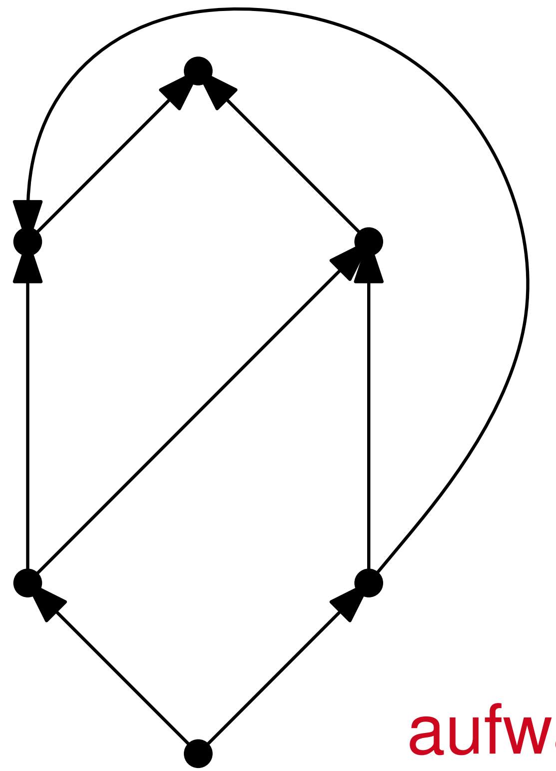
Wdh.: Aufwärtsplanarität

Definition

Ein gerichteter azyklischer Graph $D = (V, A)$ heißt aufwärtsplanar, wenn es eine planare Einbettung von D in die Ebene gibt, bei der alle Kanten aufwärtsgerichtet sind.

Beispiel:





planar!

aufwärtsplanar? – Nein!

Wdh.: Charakterisierung

Definition:

DAG $D = (V, A)$ heißt st-Graph, wenn

- es ex. eindeutige Quelle s in V
- es ex. eindeutige Senke t in V
- Kante st ist in A enthalten

Satz (Charakterisierung aufwärtsplanarer Graphen)

Für einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. D ist aufwärtsplanar
2. D hat ein geradliniges aufwärtsplanares Layouts
3. D ist aufspannender Subgraph eines planaren st-Graphen

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) ist klar

(1) $\Rightarrow$ (3) in Vorlesung gezeigt

(3) $\Rightarrow$ (2) noch zu zeigen

Wdh.: Aufwärtsplanar $\Rightarrow$ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

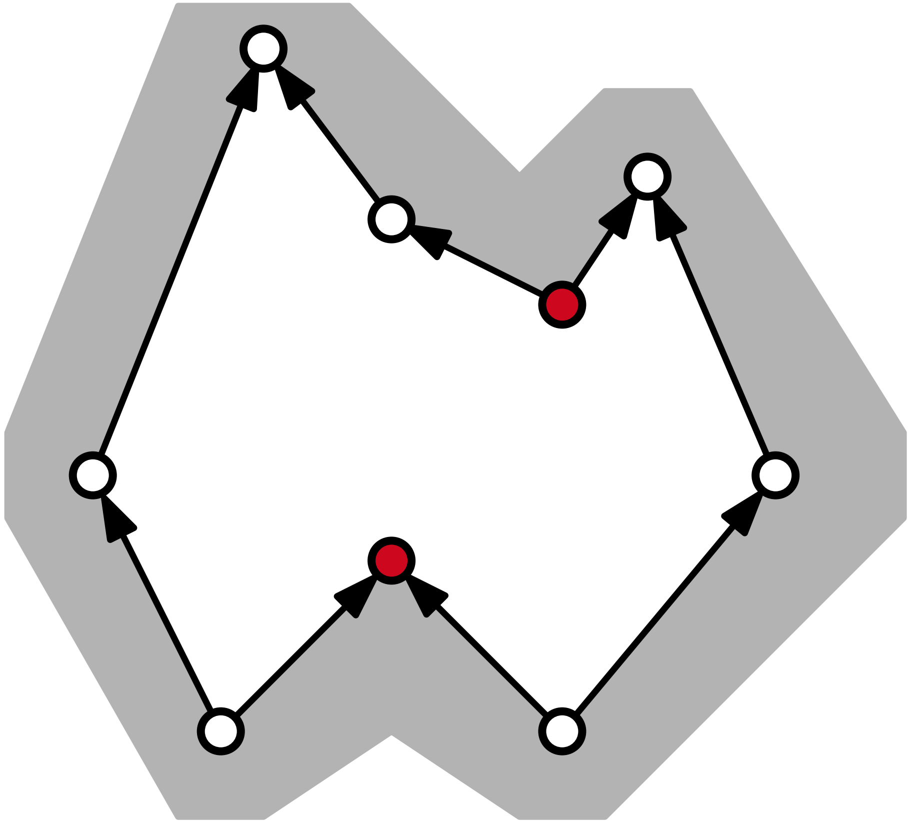
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Wdh.: Aufwärtsplanar $\Rightarrow$ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

Inneren Facetten



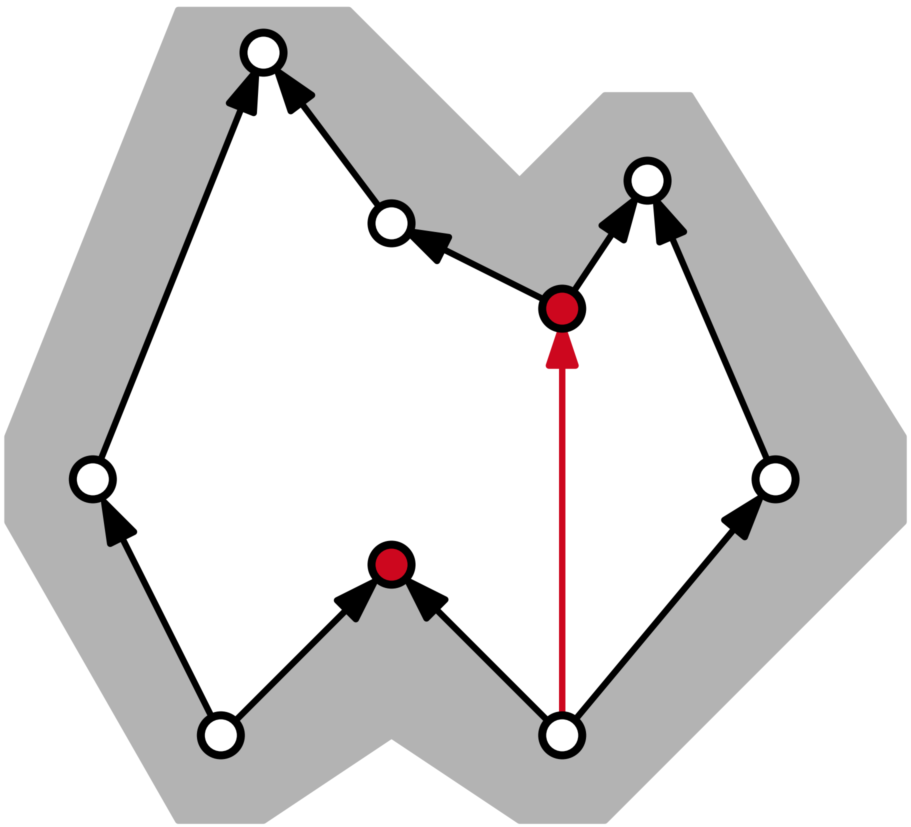
Eliminiere Quellen/Senken

Wdh.: Aufwärtsplanar $\Rightarrow$ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

Inneren Facetten



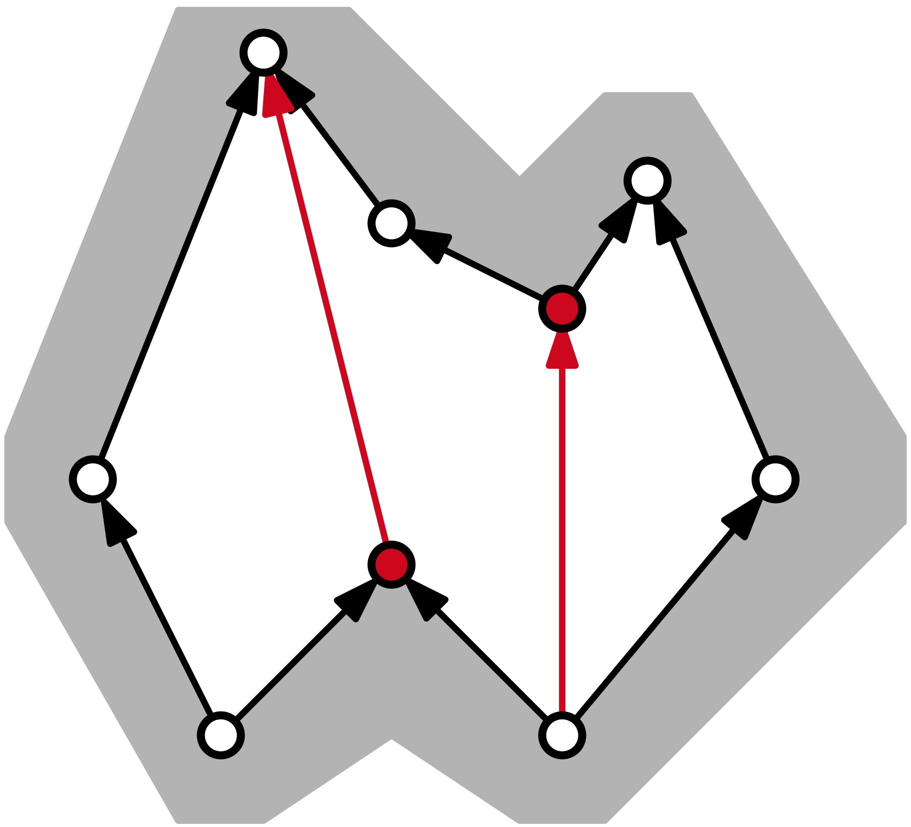
Eliminiere Quellen/Senken

Wdh.: Aufwärtsplanar ⇒ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

Inneren Facetten



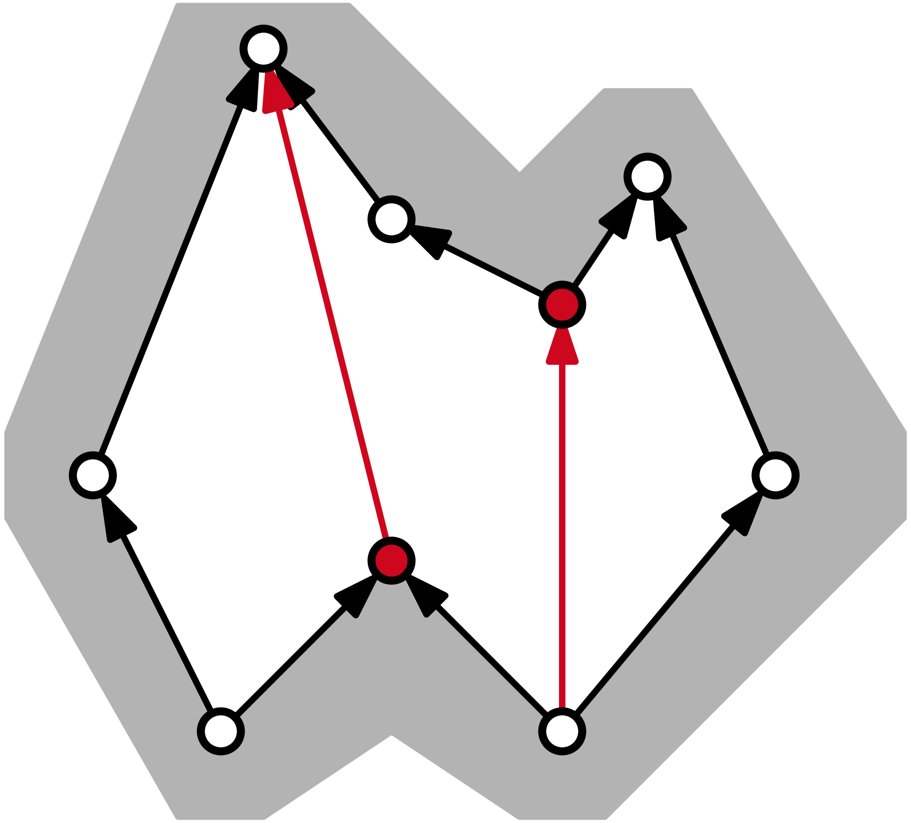
Eliminiere Quellen/Senken

Wdh.: Aufwärtsplanar ⇒ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

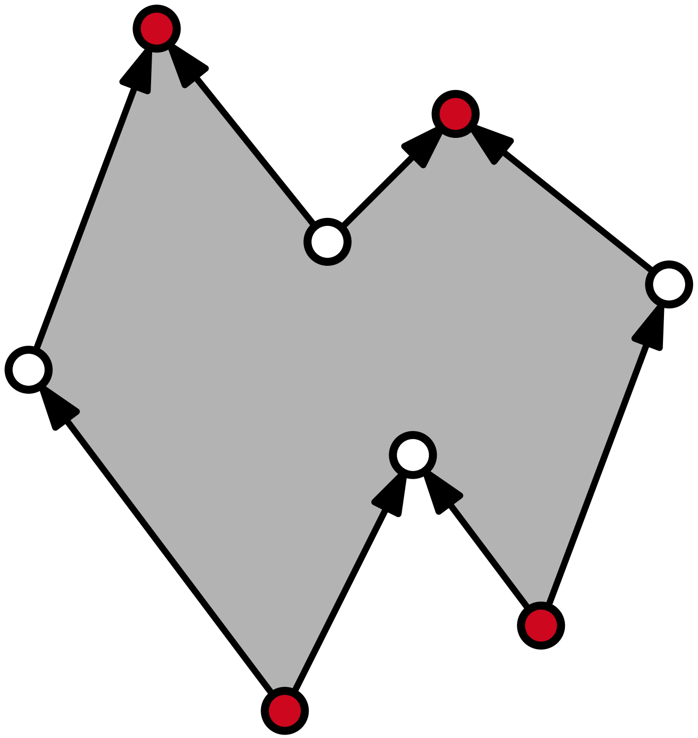
Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

Inneren Facetten



Eliminiere Quellen/Senken

Äußere Facette



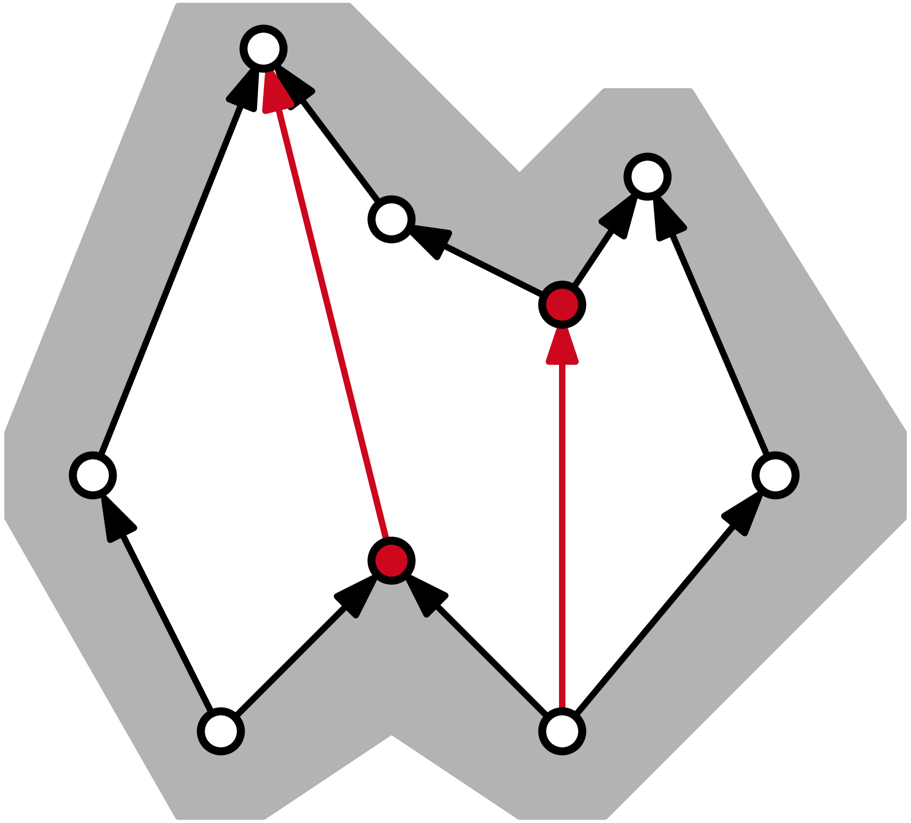
Wähle eine Quellen/Senken

Wdh.: Aufwärtsplanar ⇒ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

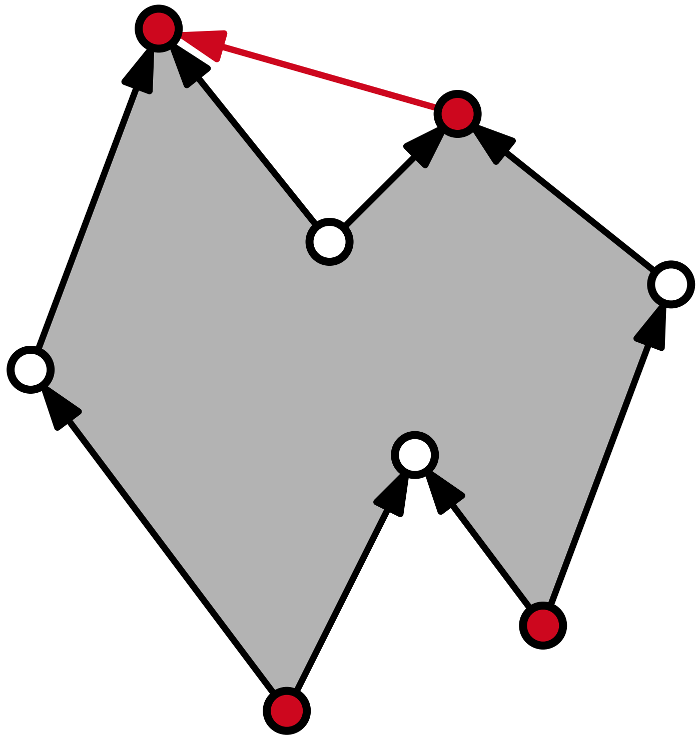
Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

Inneren Facetten



Eliminiere Quellen/Senken

Äußere Facette



Wähle eine Quellen/Senken

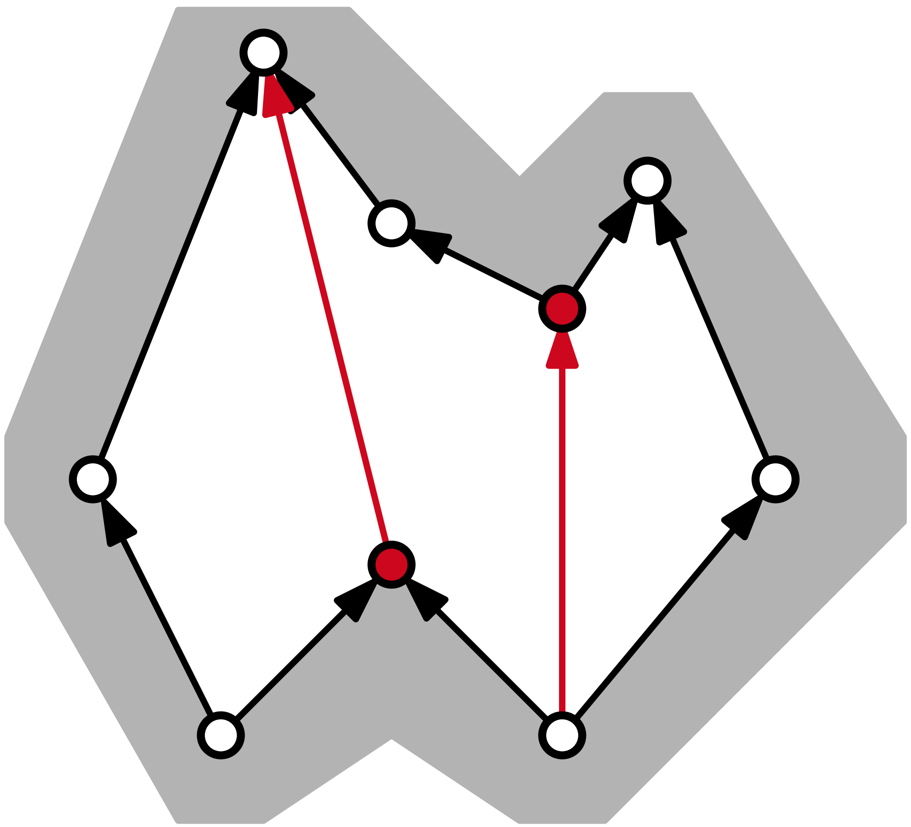
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Wdh.: Aufwärtsplanar $\Rightarrow$ st-Graph

Gegeben: Aufwärtsplanare Zeichnung

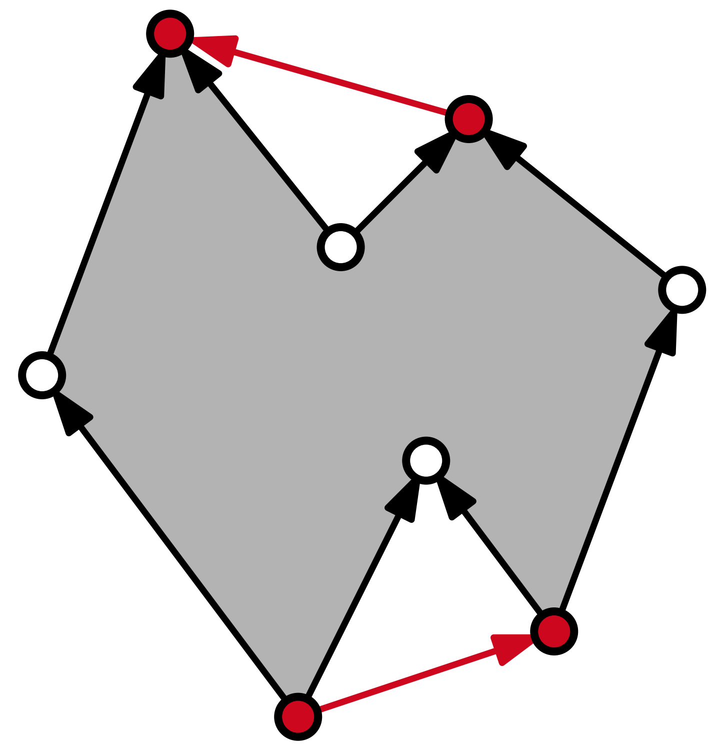
Ziel: Füge Kanten ein, sodass ein planarer st-Graph entsteht

Inneren Facetten



Eliminiere Quellen/Senken

Äußere Facette



Wähle eine Quellen/Senken

st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

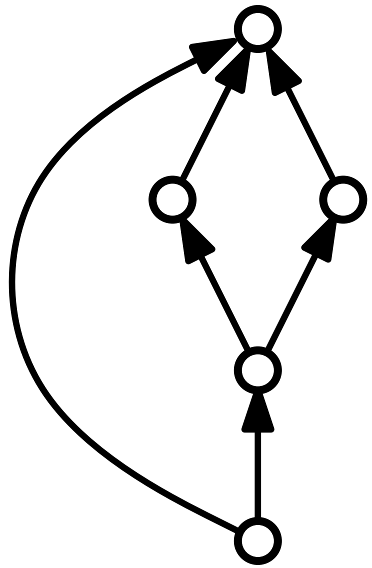
Zeige: Ein planarer st-Graph G hat eine geradlinige und aufwärtsplanare Zeichnung.

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Zeige: Ein planarer st-Graph G hat eine geradlinige und aufwärtsplanare Zeichnung.

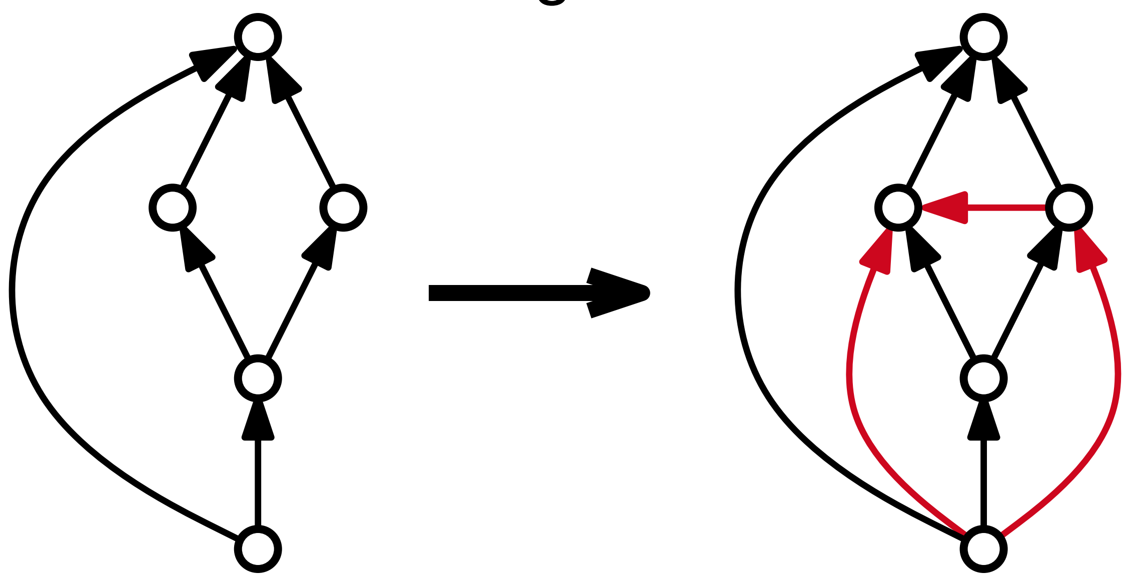
Trianguliere G



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Zeige: Ein planarer st-Graph G hat eine geradlinige und aufwärtsplanare Zeichnung.

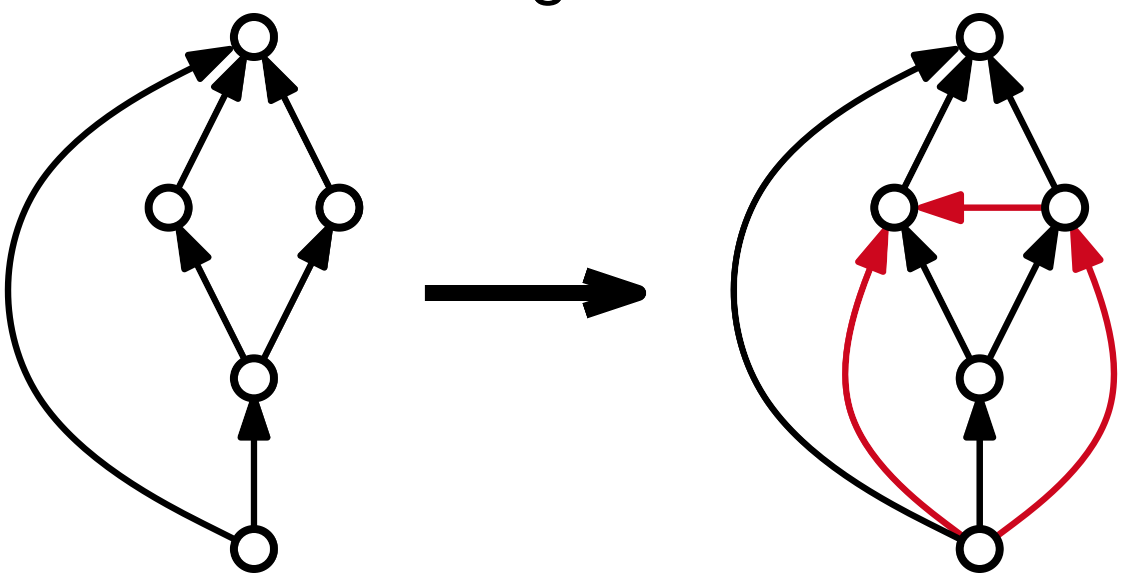
Trianguliere G



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Zeige: Ein planarer st-Graph G hat eine geradlinige und aufwärtsplanare Zeichnung.

Trianguliere G



Satz

Ein triangulierter st-Graph G kann geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden, sodass die äußere Facette einem vorgegebenen Dreieck entspricht.

st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Satz

Ein triangulierter st-Graph G kann geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden, sodass die äußere Facette einem vorgegebenen Dreieck entspricht.

Beweis: Induktion über die Anzahl der Knoten n.

st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

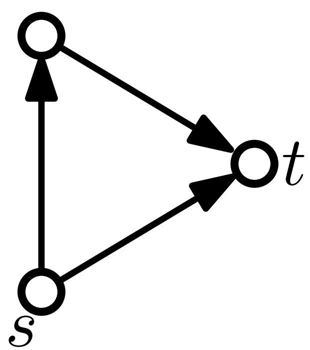
Satz

Ein triangulierter st-Graph G kann geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden, sodass die äußere Facette einem vorgegebenen Dreieck entspricht.

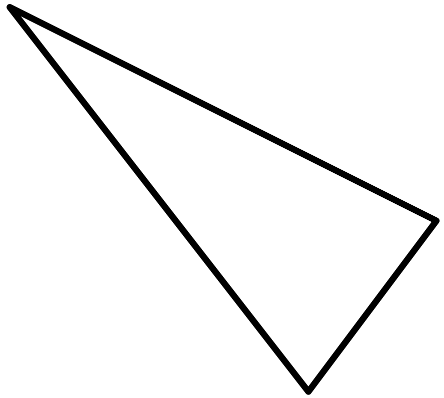
Beweis: Induktion über die Anzahl der Knoten n.

I.A.: $n = 3$

Graph G



gebenes Dreieck



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

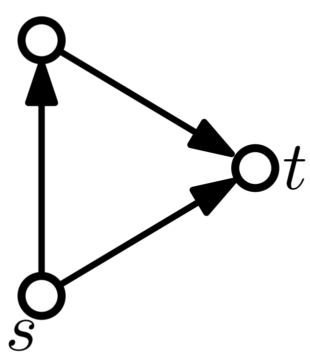
Satz

Ein triangulierter st-Graph G kann geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden, sodass die äußere Facette einem vorgegebenen Dreieck entspricht.

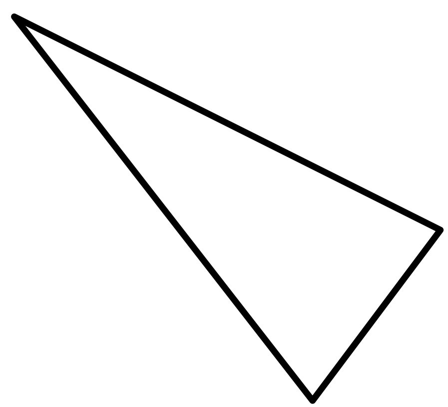
Beweis: Induktion über die Anzahl der Knoten n.

I.A.: $n = 3$

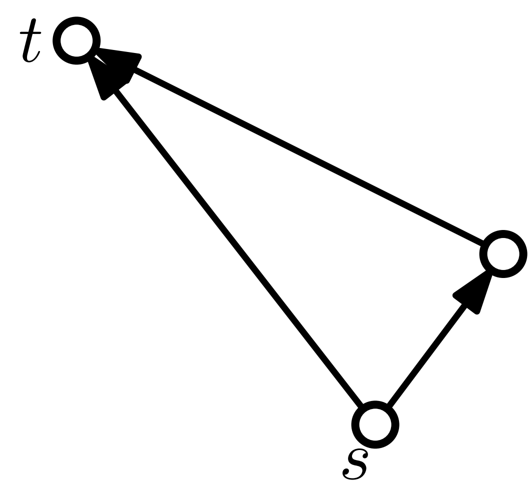
Graph G



gebenes Dreieck



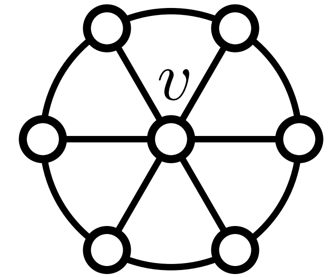
Zeichnung



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

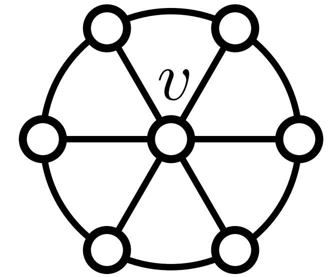
Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



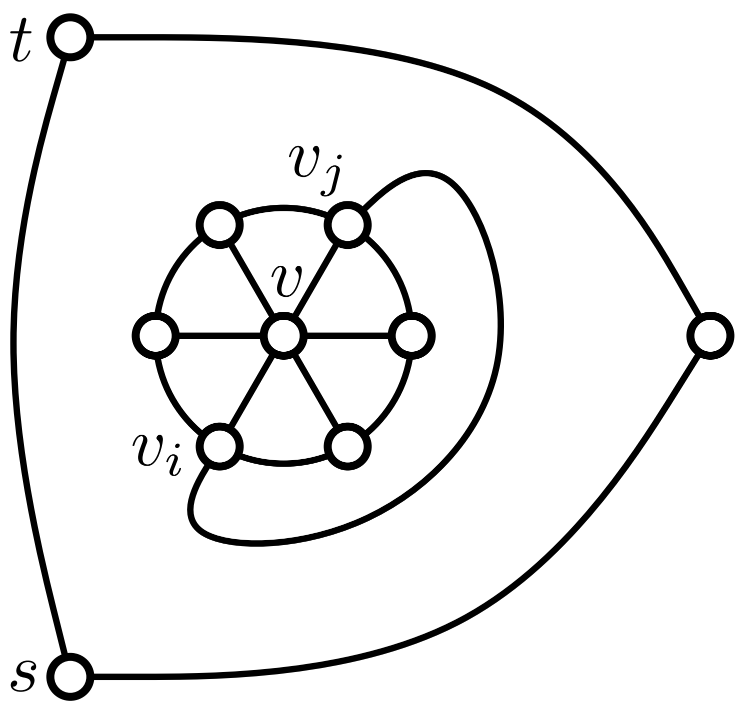
st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



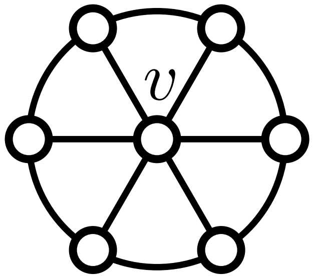
Fall 1: Es gibt eine zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$



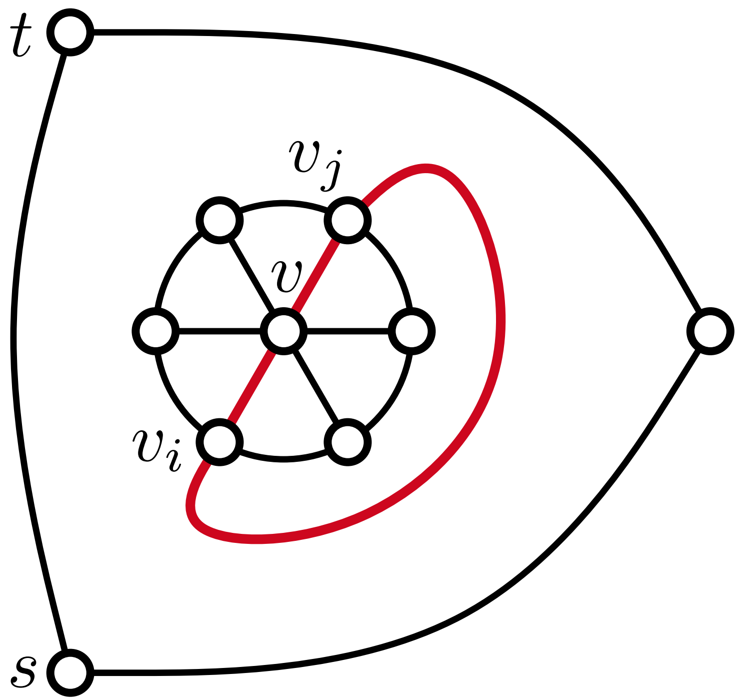
st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



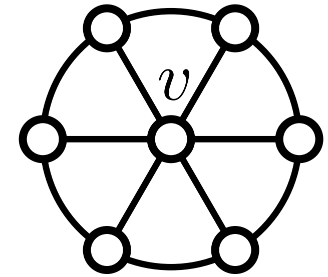
Fall 1: Es gibt eine zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$



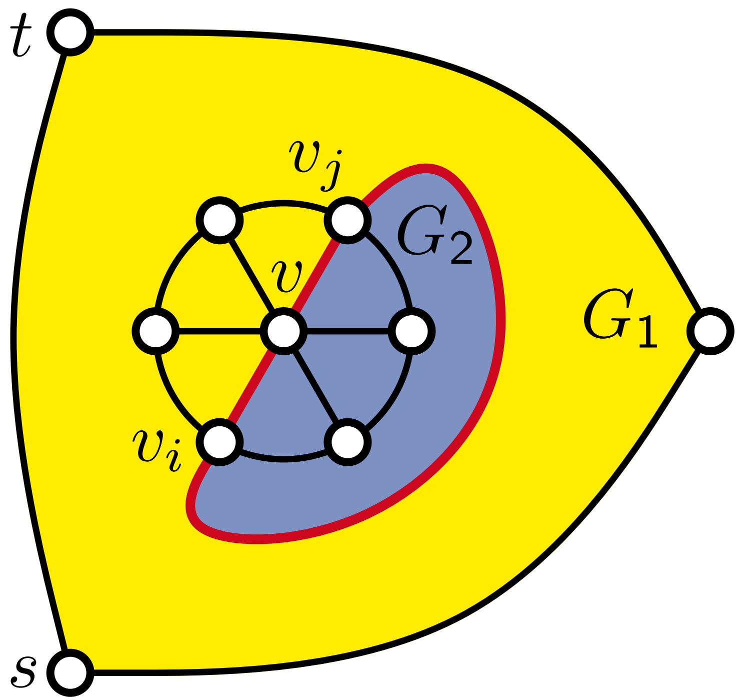
st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



Fall 1: Es gibt eine zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

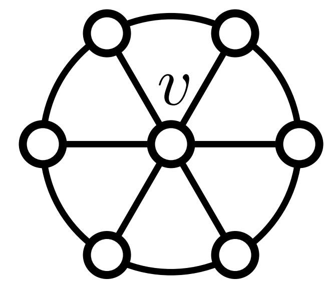


Der Kreis v, v_i, v_j zerlegt G in zwei Teile G_1 und G_2

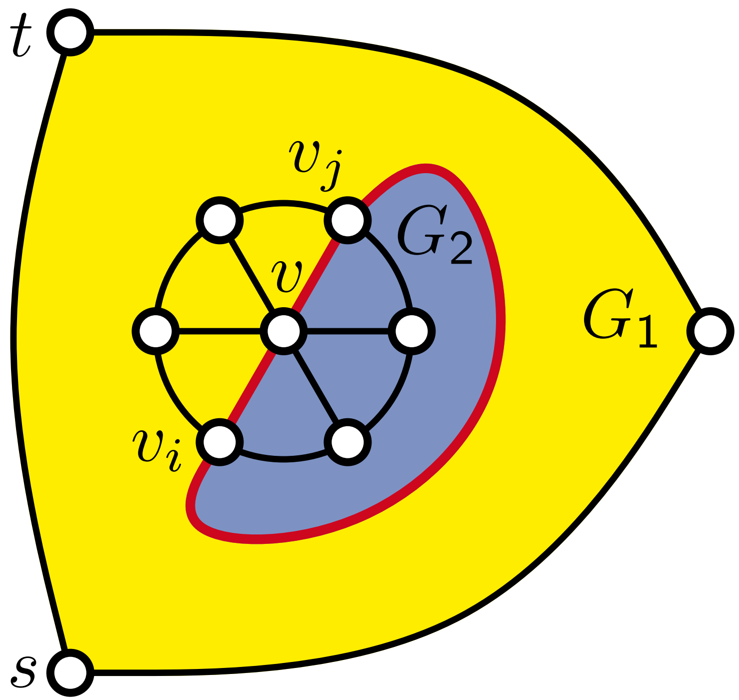
st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



Fall 1: Es gibt eine zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$



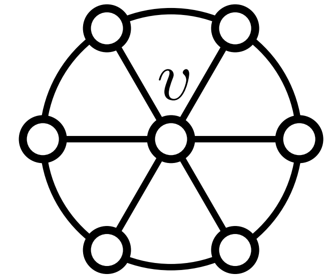
Der Kreis v, v_i, v_j zerlegt G in zwei Teile G_1 und G_2

G_1 und G_2 sind planare st-Graphen

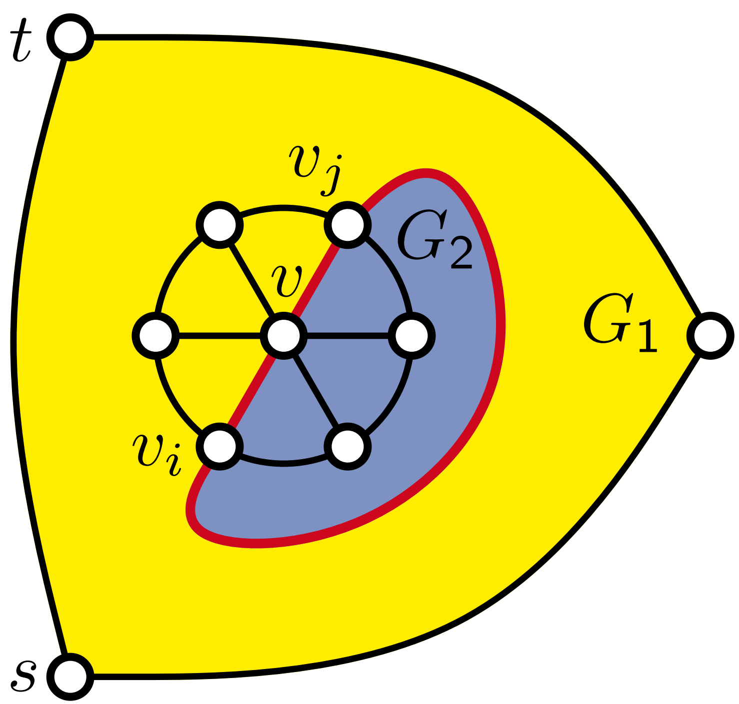
st-Graph ⇒ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



Fall 1: Es gibt eine zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$



Der Kreis v, v_i, v_j zerlegt G in zwei Teile G_1 und G_2

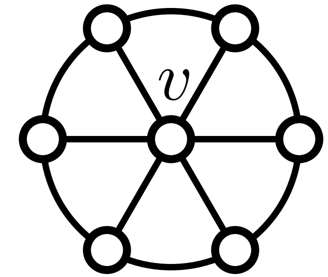
G_1 und G_2 sind planare st-Graphen

Zeichne G_1 nach I.V.

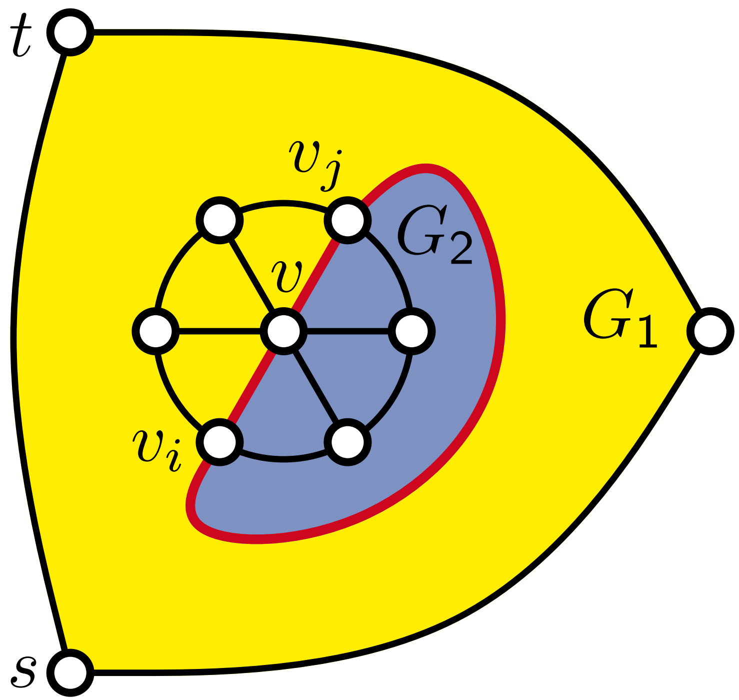
st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

$n > 3$: Betrachte inneren Knoten v mit Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$

Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_k$ bilden Kreis, da G trianguliert ist.



Fall 1: Es gibt eine zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$



Der Kreis v, v_i, v_j zerlegt G in zwei Teile G_1 und G_2

G_1 und G_2 sind planare st-Graphen

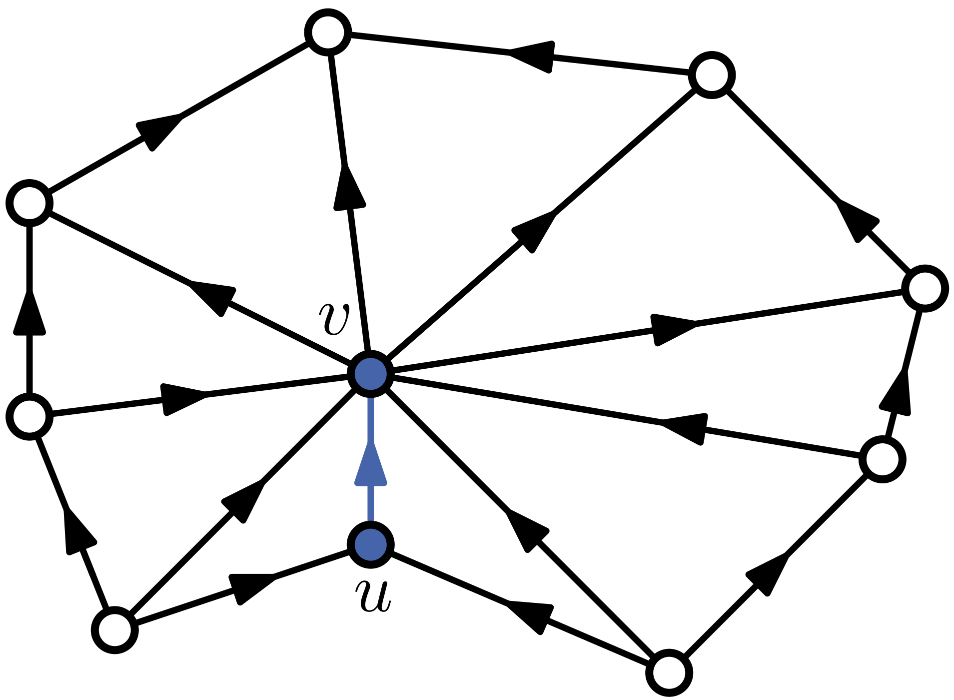
Zeichne G_1 nach I.V.

Zeichne G_2 nach I.V. in das entstehende Dreieck $\Delta v v_i v_j$

st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

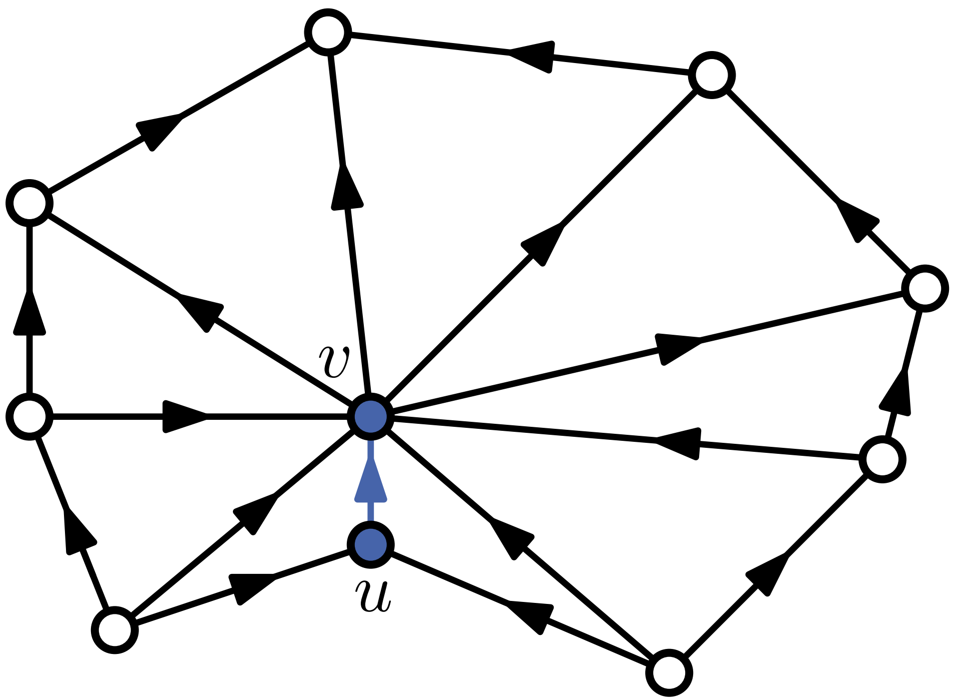
Finde „höchsten“ Vorgänger u von v



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

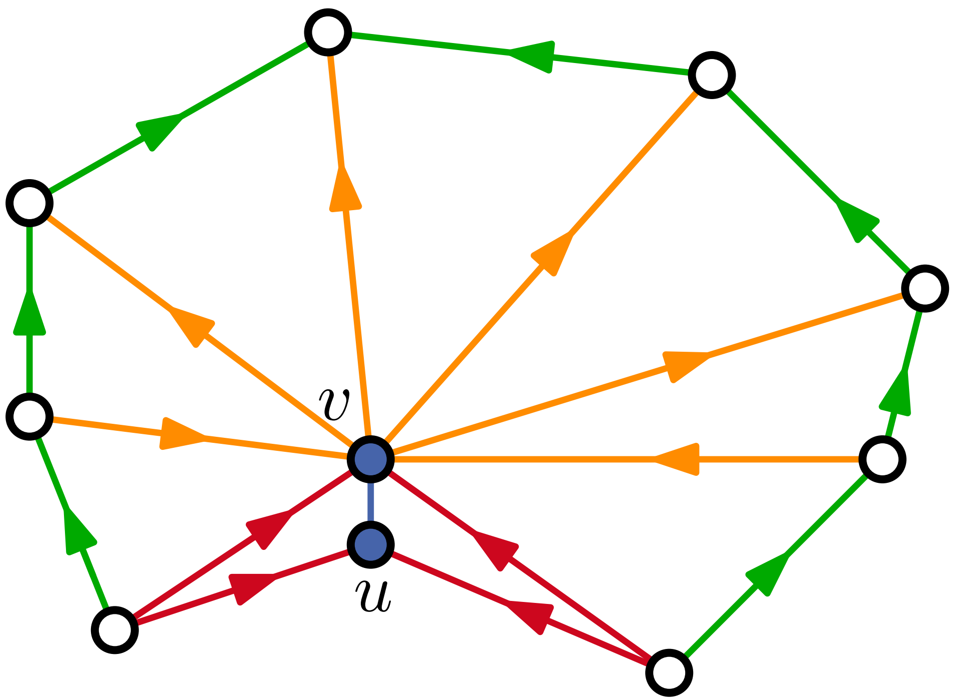
Kontrahiere die Kante (u, v)



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

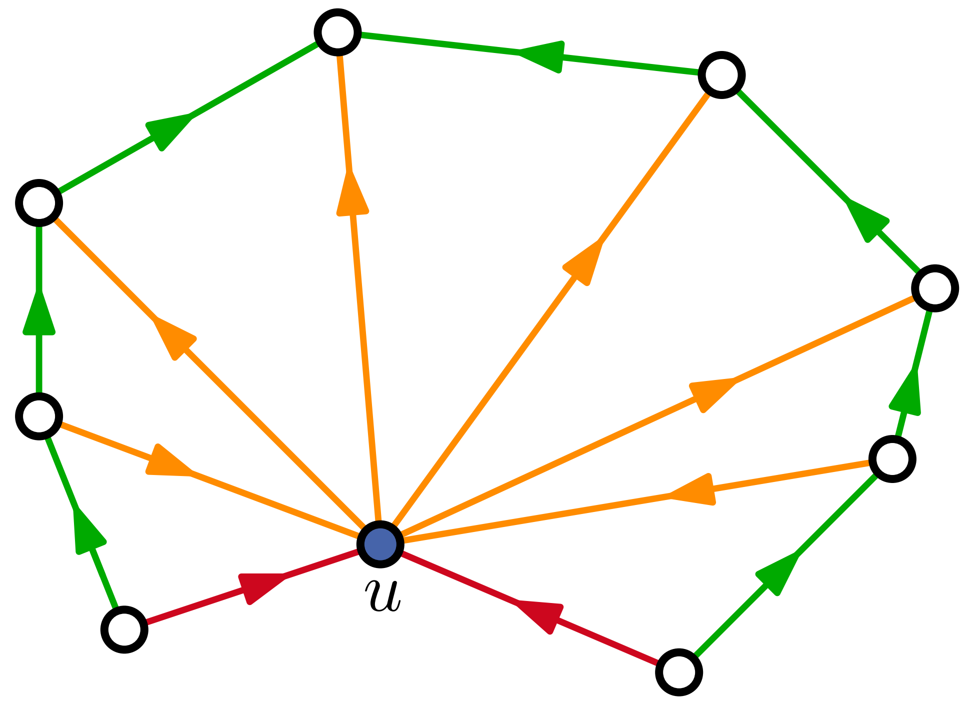
Kontrahiere die Kante (u, v)



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

Kontrahiere die Kante (u, v)

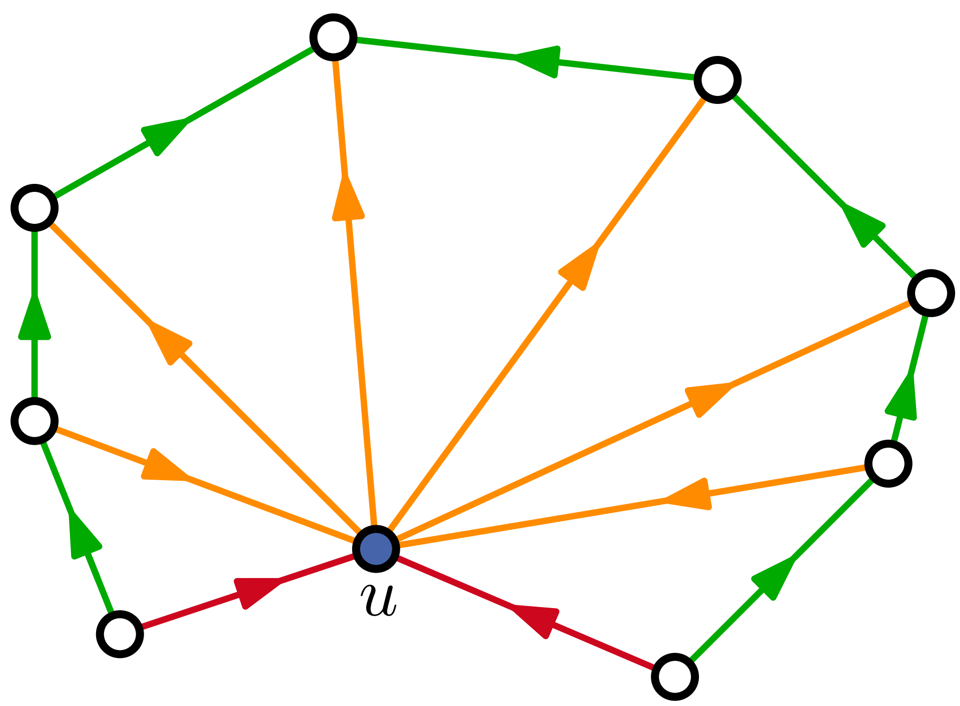


st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

Kontrahiere die Kante (u, v)

Der entstehende Graph hat weniger Knoten und kann nach I.V. geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden.

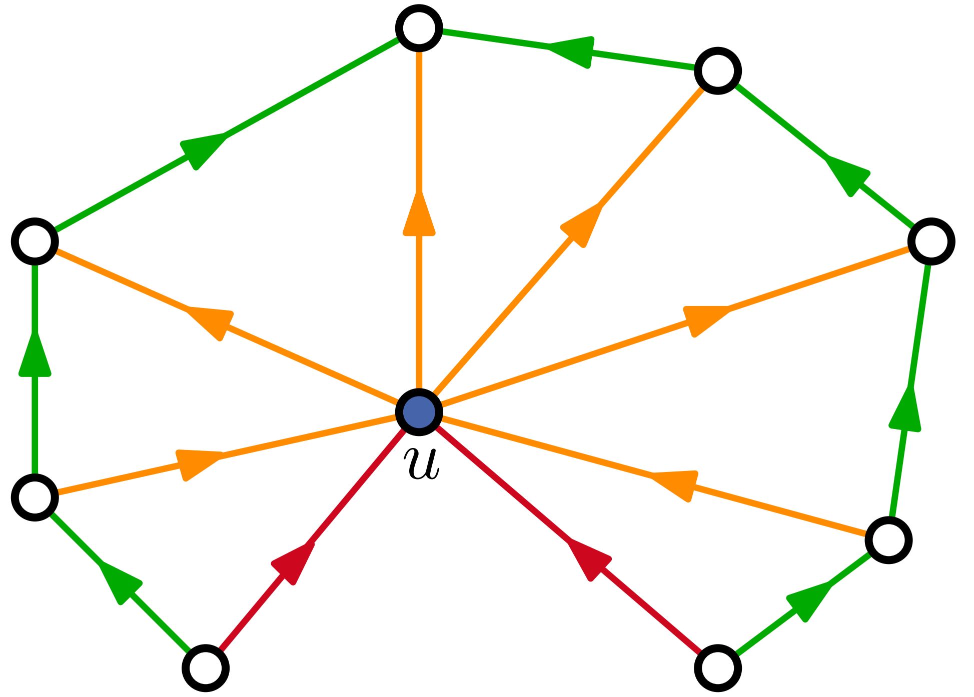


st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

Kontrahiere die Kante (u, v)

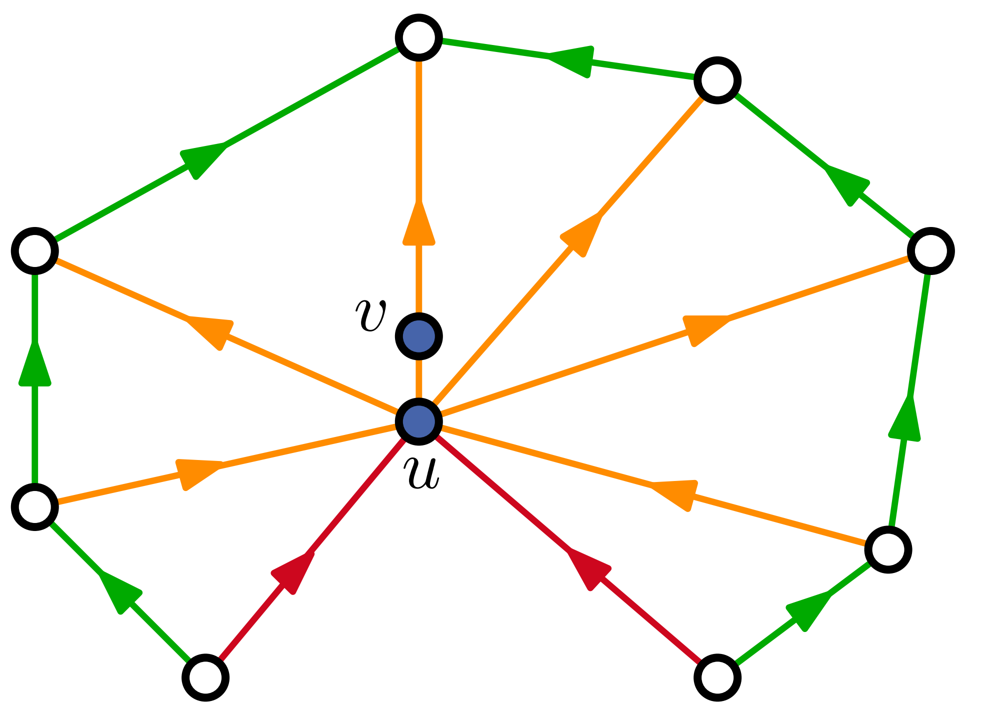
Der entstehende Graph hat weniger Knoten und kann nach I.V. geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden.



st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

Füge Knoten v (knapp genug) über u ein.

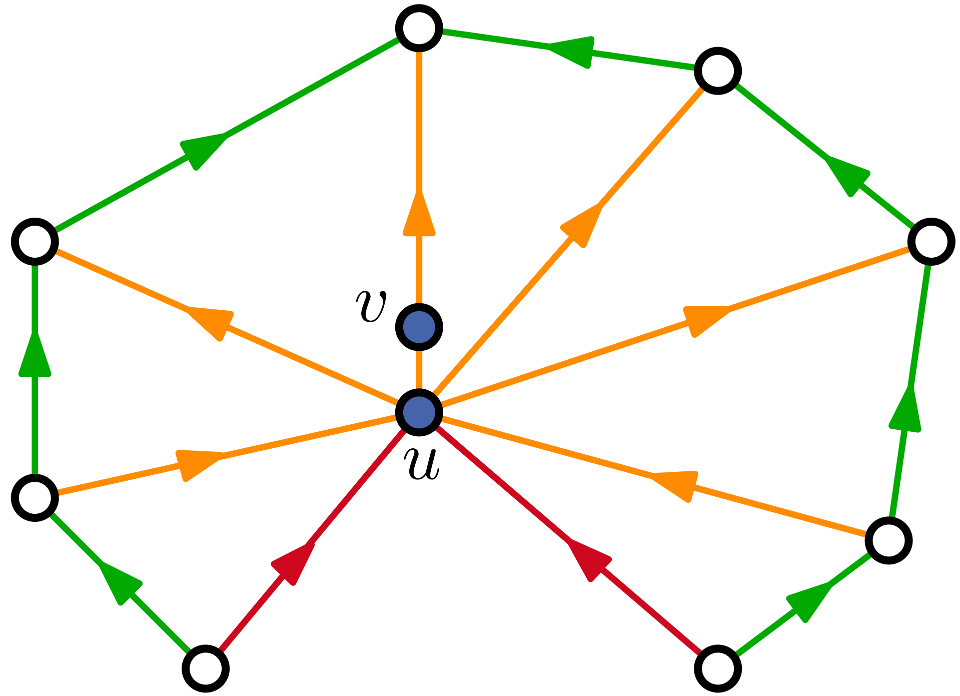


st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

Füge Knoten v (knapp genug) über u ein.

Alle Kanten zu v können geradlinig und aufwärtsplanar eingefügt werden, da sie mit der gleichen orientierung zu u verbunden sind.

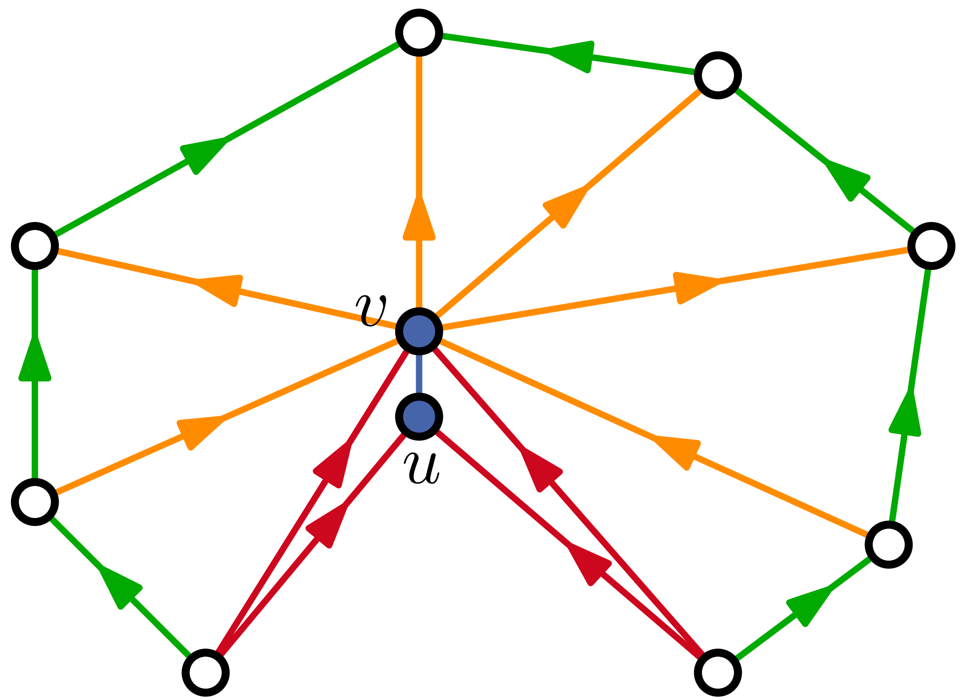


st-Graph $\Rightarrow$ geradlinig & aufwärtsplanar

Fall 2: Es gibt KEINE zusätzliche Kante $\{v_i, v_j\}$

Füge Knoten v (knapp genug) über u ein.

Alle Kanten zu v können geradlinig und aufwärtsplanar eingefügt werden, da sie mit der gleichen orientierung zu u verbunden sind.



Satz

Ein triangulierter st-Graph G kann geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden, sodass die äußere Facette einem vorgegebenen Dreieck entspricht.

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Satz

Ein triangulierter st-Graph G kann geradlinig und aufwärtsplanar gezeichnet werden, sodass die äußere Facette einem vorgegebenen Dreieck entspricht.

Satz (Charakterisierung aufwärtsplanarer Graphen)

Für einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. D ist aufwärtsplanar
2. D hat ein geradliniges aufwärtsplanares Layouts
3. D ist aufspannender Subgraph eines planaren st-Graphen

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) ist klar
(1) $\Rightarrow$ (3) in Vorlesung gezeigt
(3) $\Rightarrow$ (2) gerade eben gezeigt

Übungsaufgaben

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 1 – Planare Einbettungen

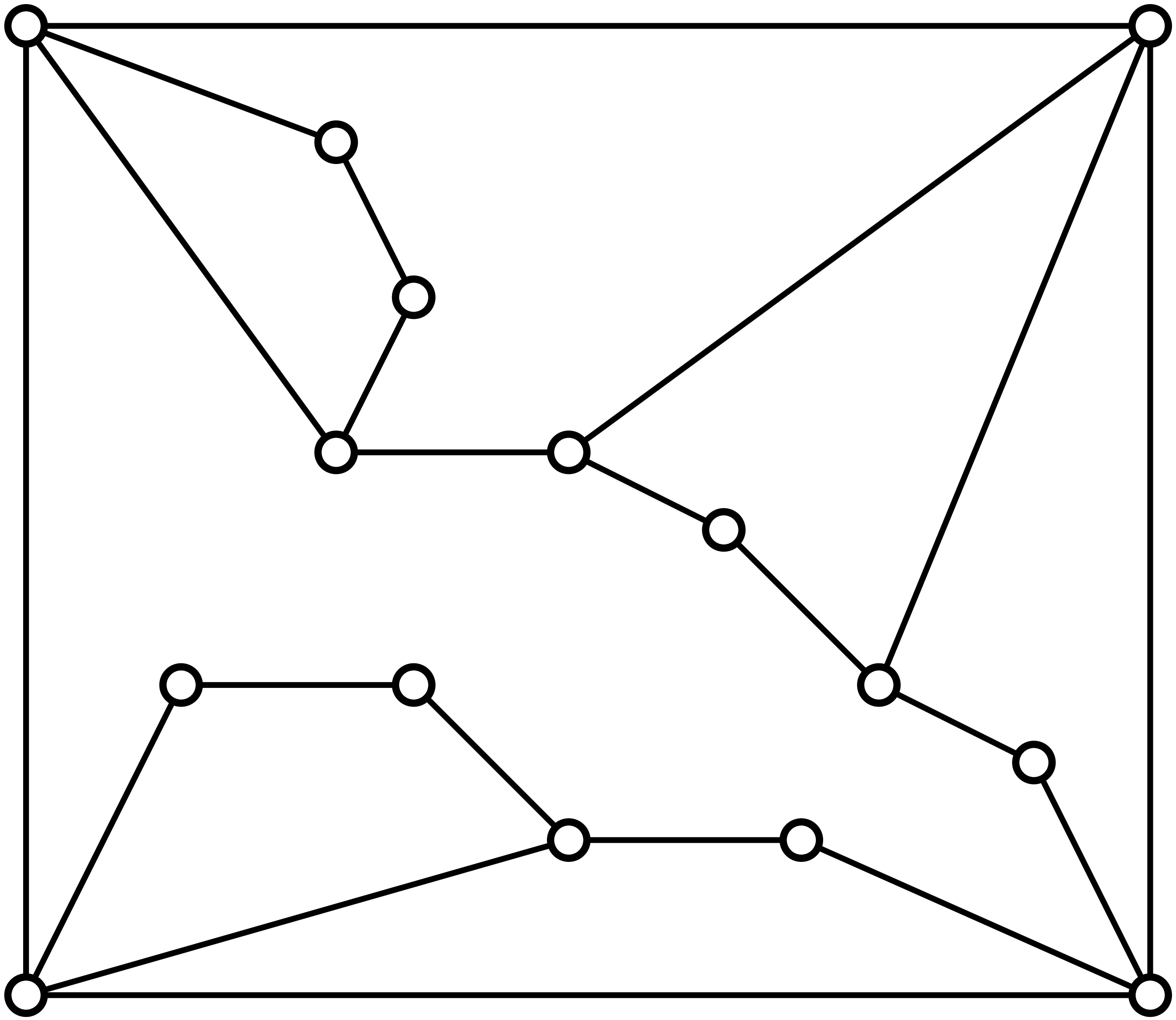
Sei G ein planarer Graph mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Für $1 \leq i \leq f$ sei a_i die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G, wobei die Facetten so numeriert seien, daß die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.
Kann es zu einem planaren Graphen G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so daß die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 2 – Winkelsumme bei Facetten

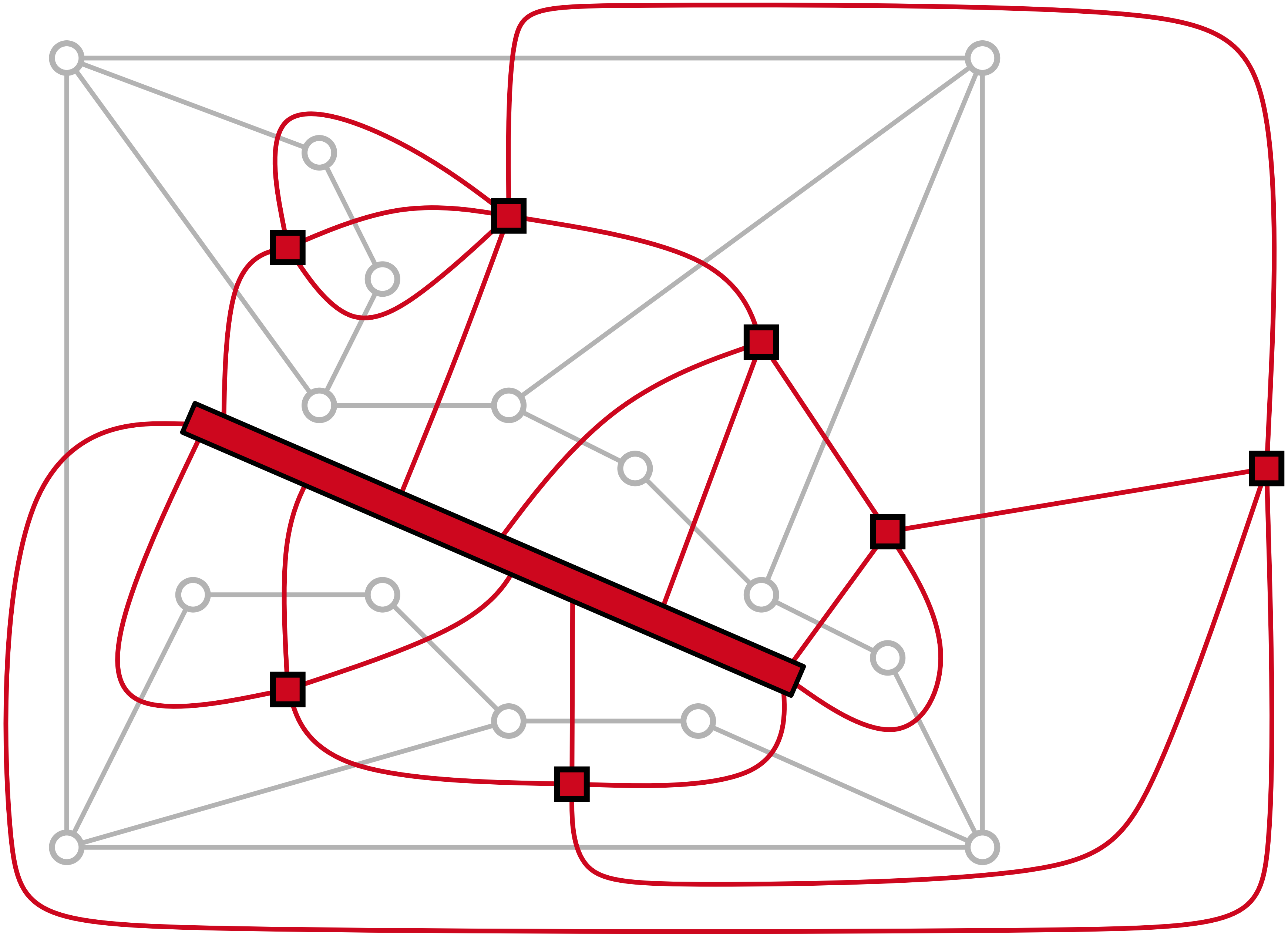
Gegeben sei eine orthogonale Einbettung $\mathcal{E}$ eines planaren Graphen. Zeigen Sie: Falls f eine innere Facette von $\mathcal{E}$ ist, dann ist die Summe aller innerhalb von f auftretenden Winkel gleich $\pi(p-2)$, wobei p die Anzahl der auftretenden Winkel ist. Ist f die äußere Facette, so ist die entsprechende Summe gleich $\pi(p+2)$.

Aufgabe 3 – Knickminimierung

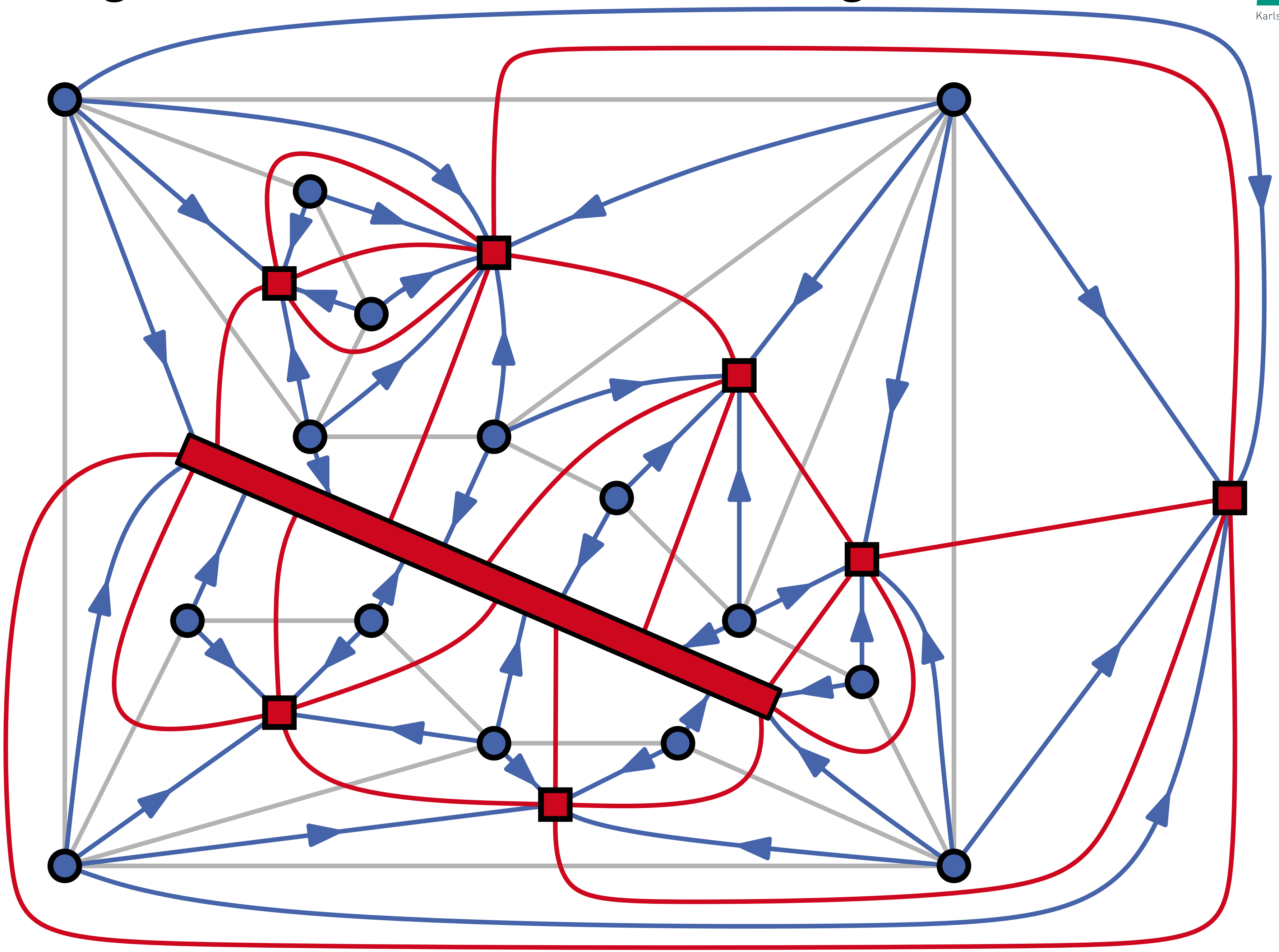


Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

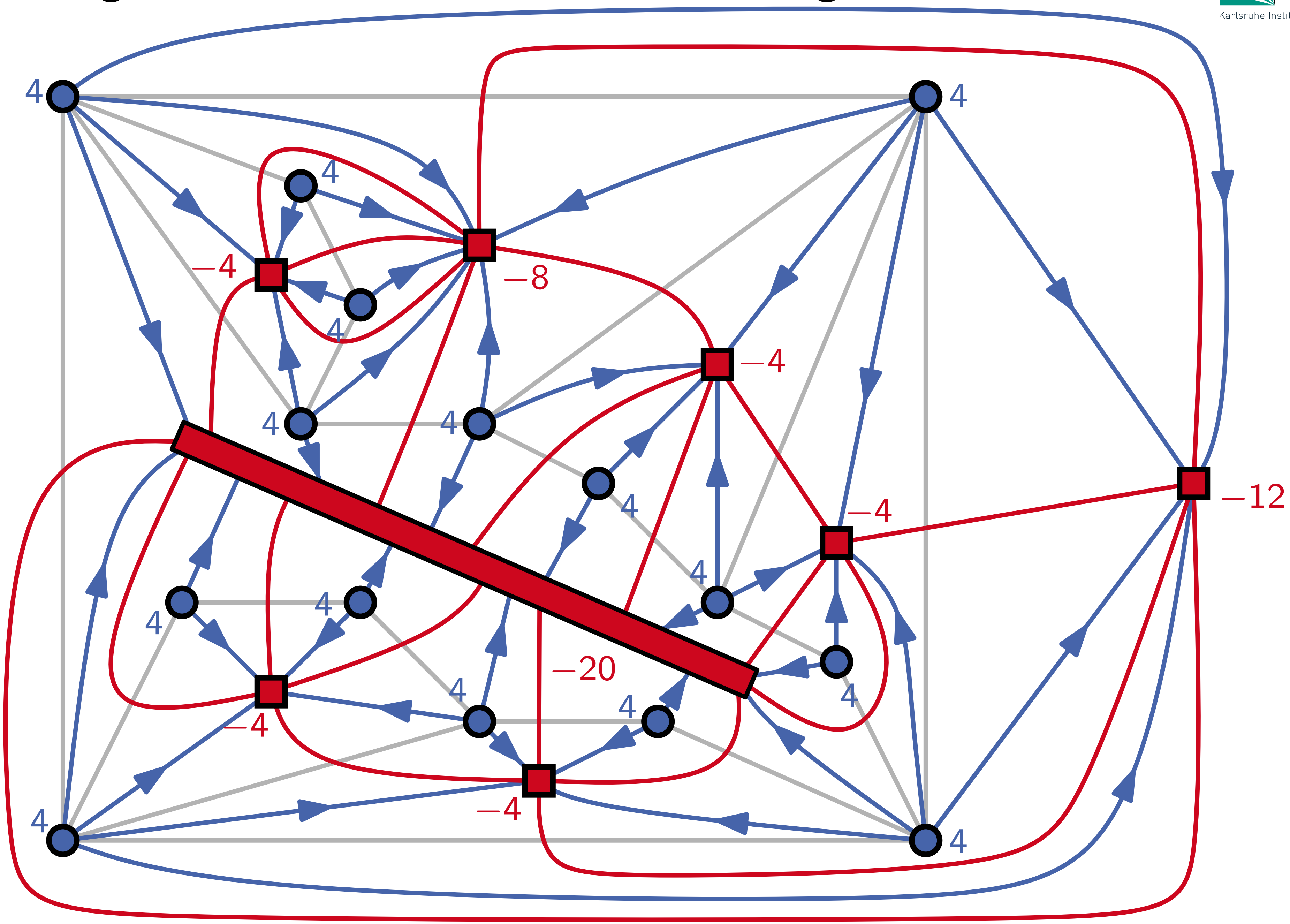
Aufgabe 3 – Knickminimierung



Aufgabe 3 – Knickminimierung



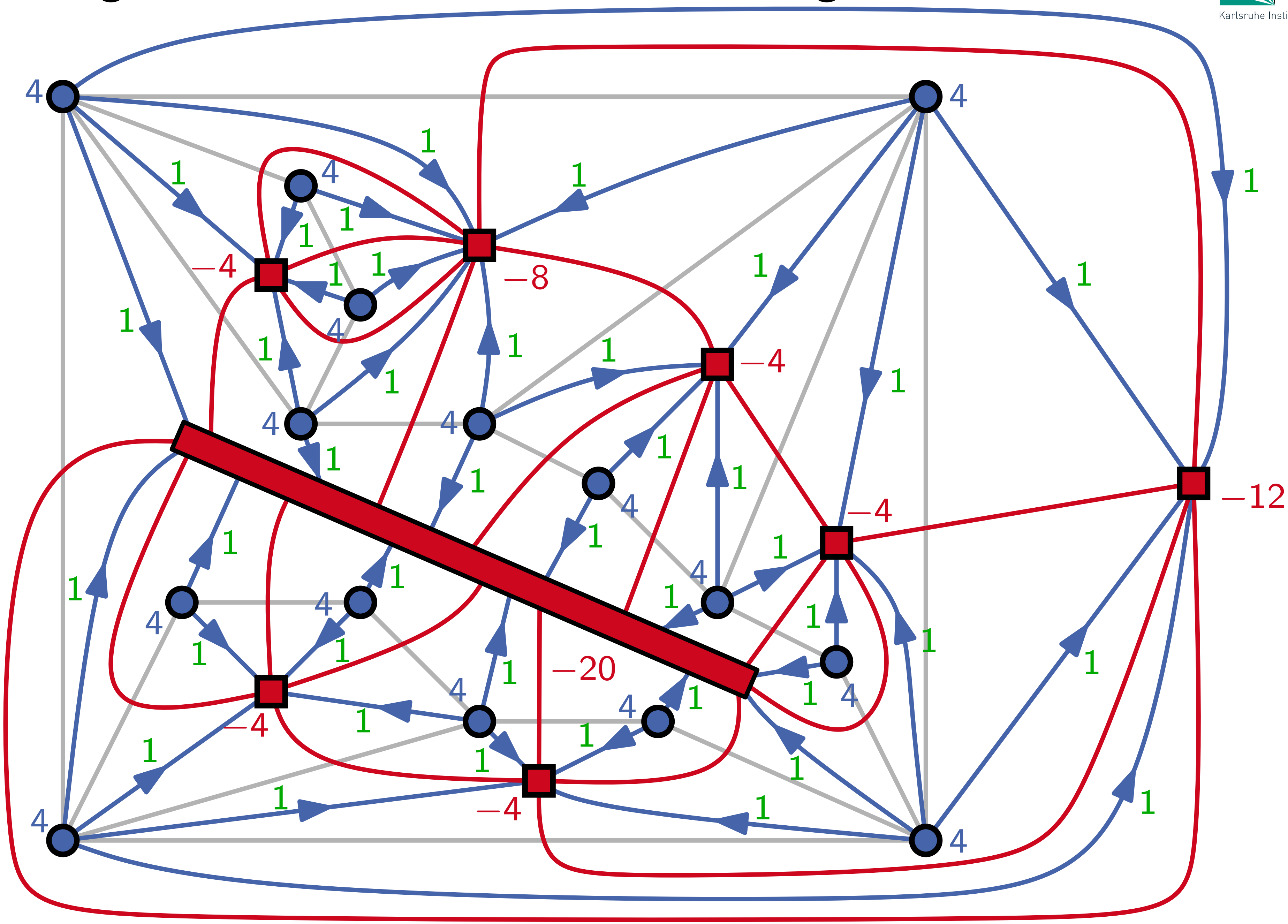
Aufgabe 3 – Knickminimierung



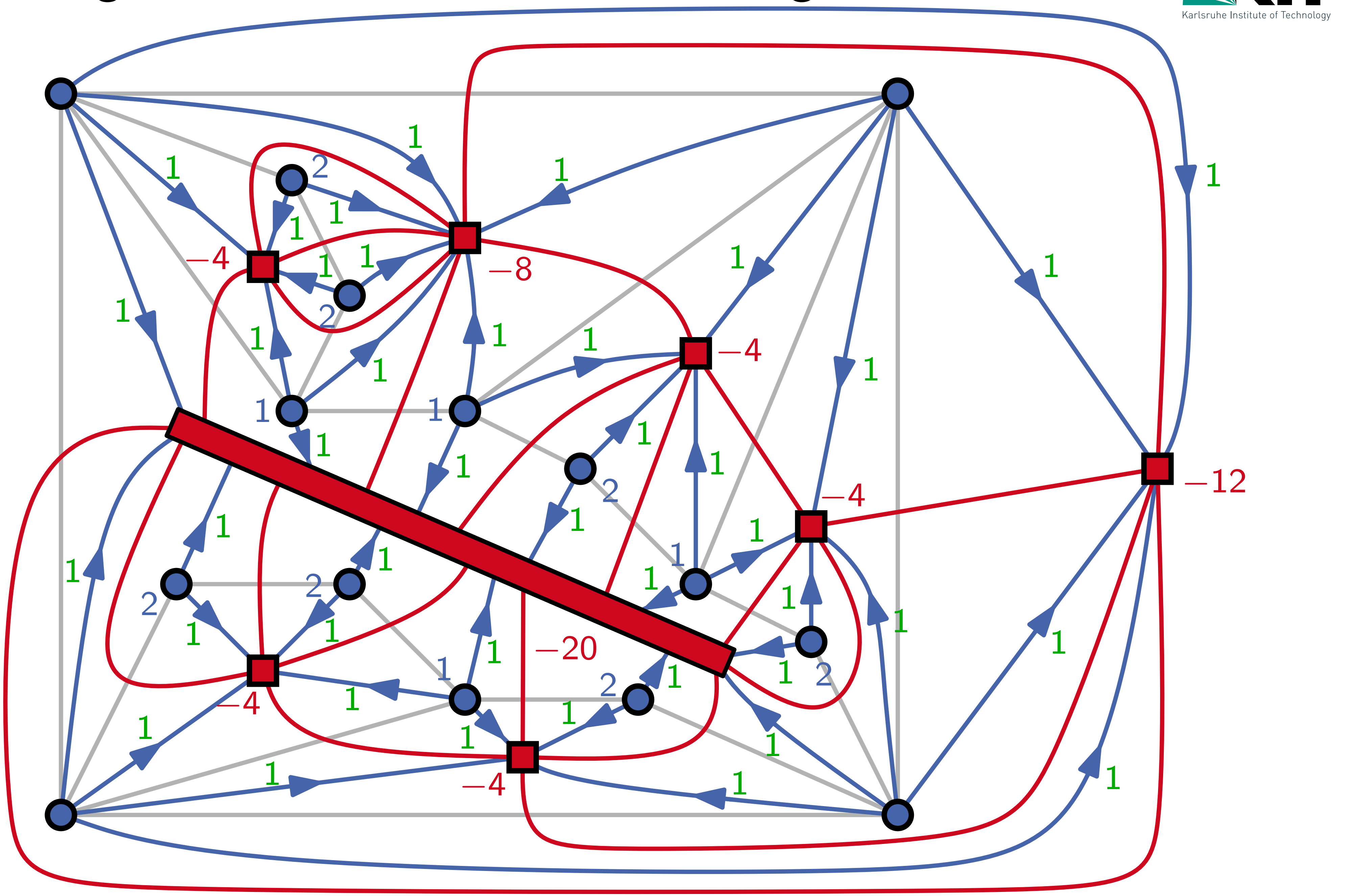
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 3 – Knickminimierung

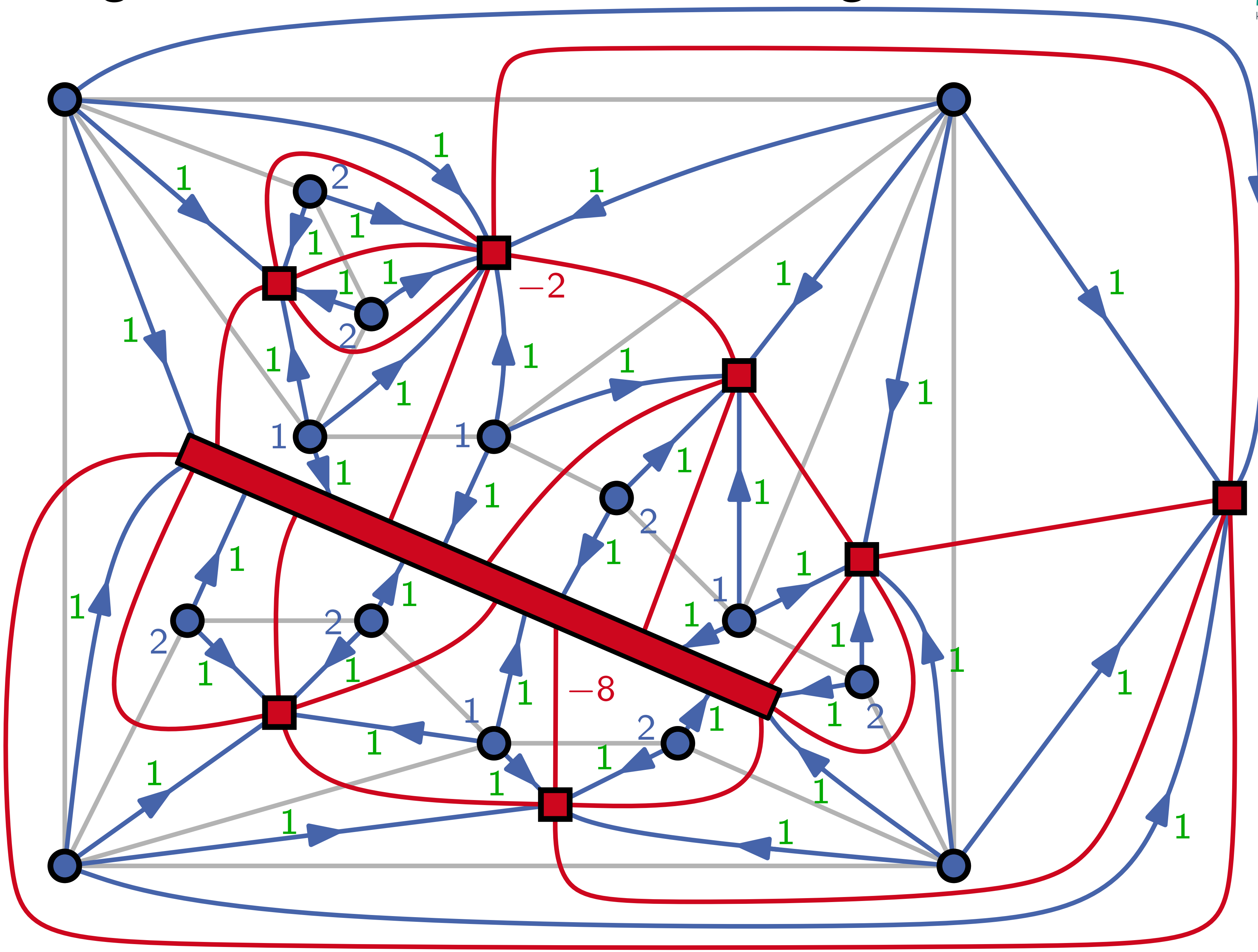
Karlsruhe Institute of Technology



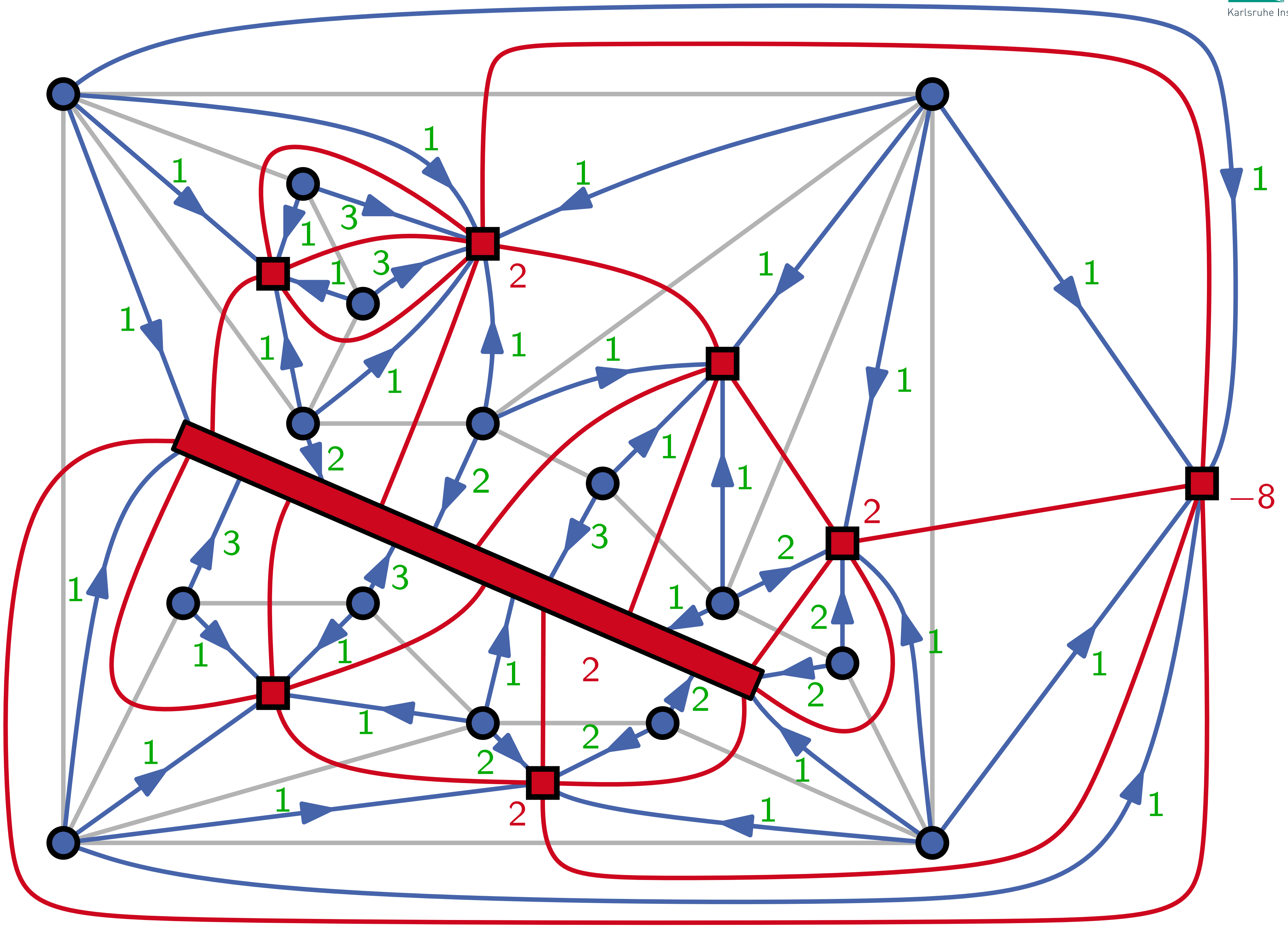
Aufgabe 3 – Knickminimierung



Aufgabe 3 – Knickminimierung

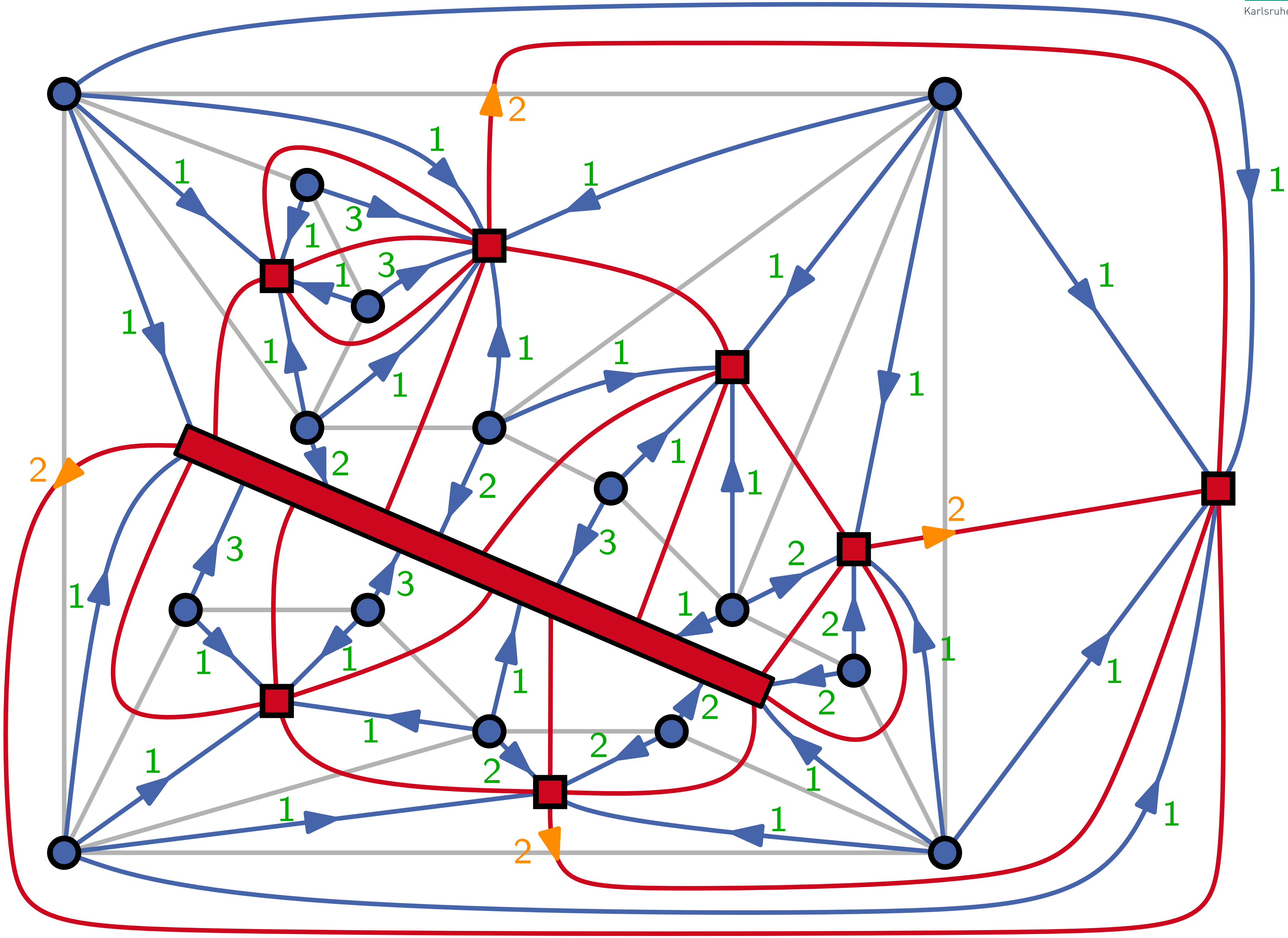


Aufgabe 3 – Knickminimierung

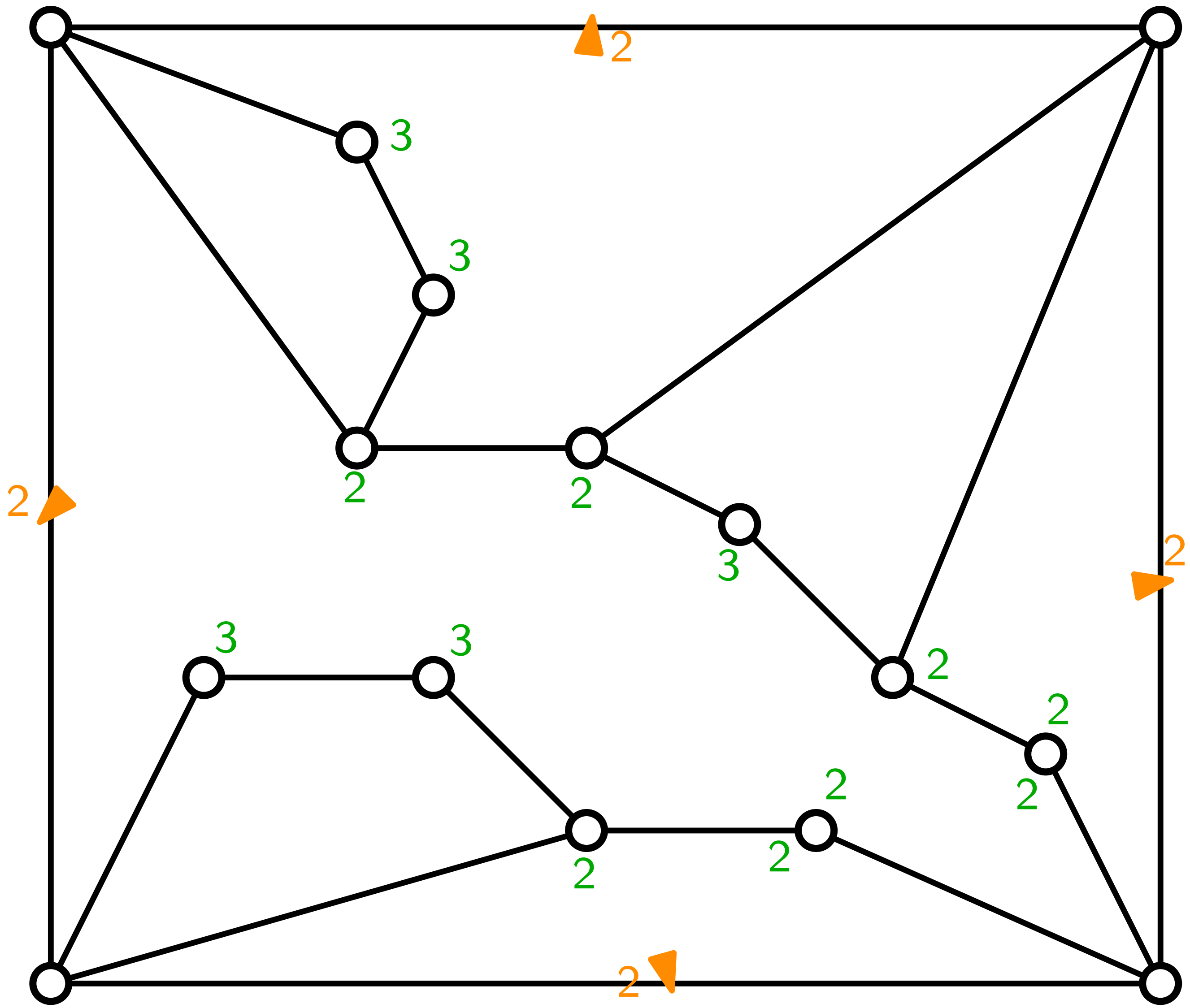


Aufgabe 3 – Knickminimierung

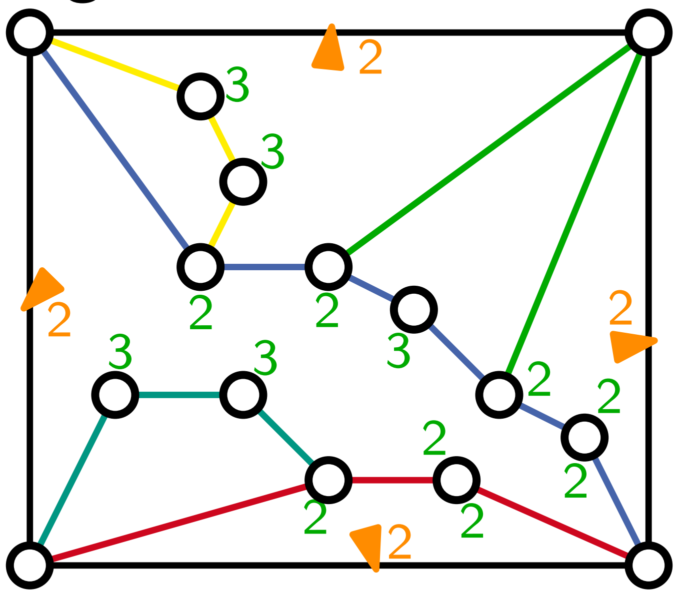
Karlsruhe Institute of Technology

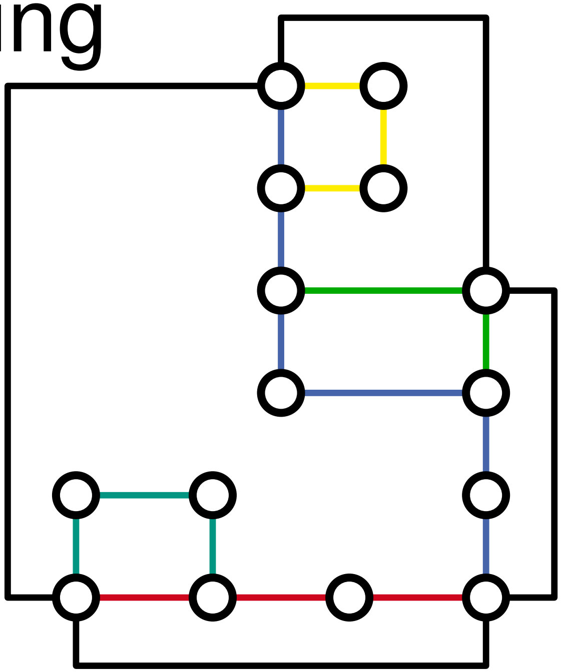


Aufgabe 3 – Knickminimierung

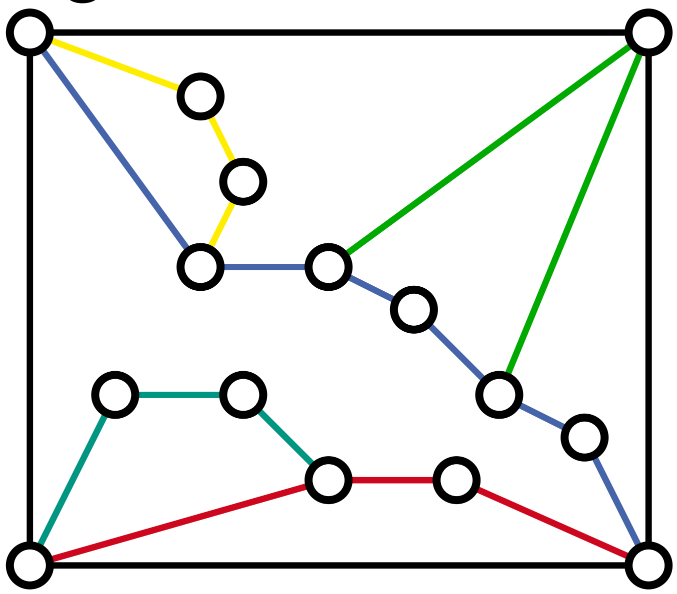


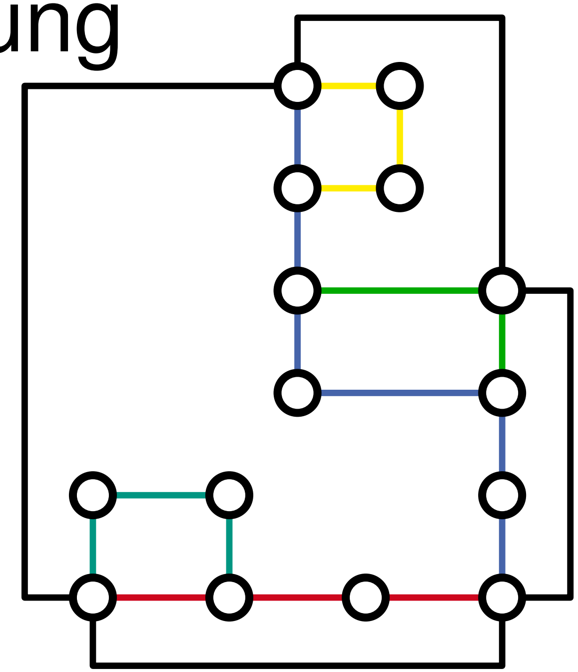
Aufgabe 3 – Knickminimierung

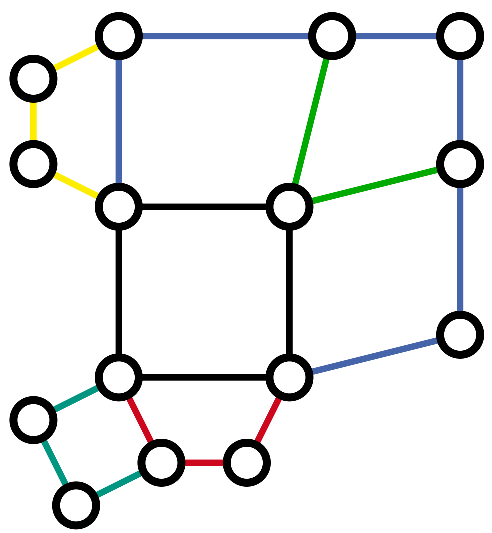


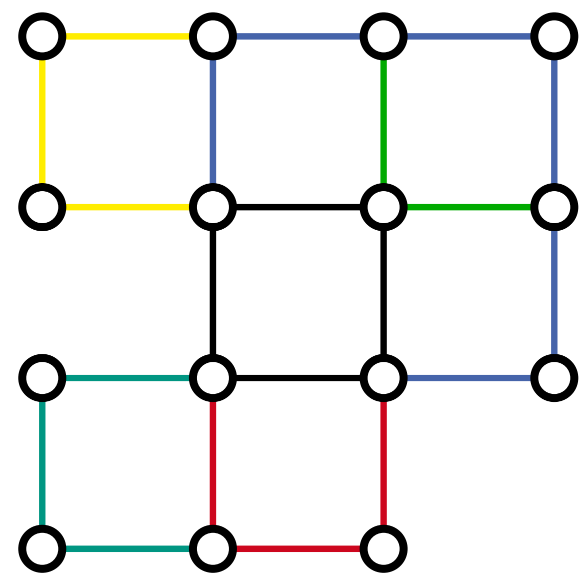


Aufgabe 3 – Knickminimierung









Aufgabe 4 – Knicke bei Oktaedern

Zeigen Sie, dass es in jeder kreuzungsfreien orthogonalen Zeichnung eines Oktaeder mindestens eine Kante gibt, die mehr als zwei Knicke hat. Bestimmen Sie dazu, wieviele Knicke die Kanten, die zur äußeren Facette inzident sind, insgesamt mindestens haben.

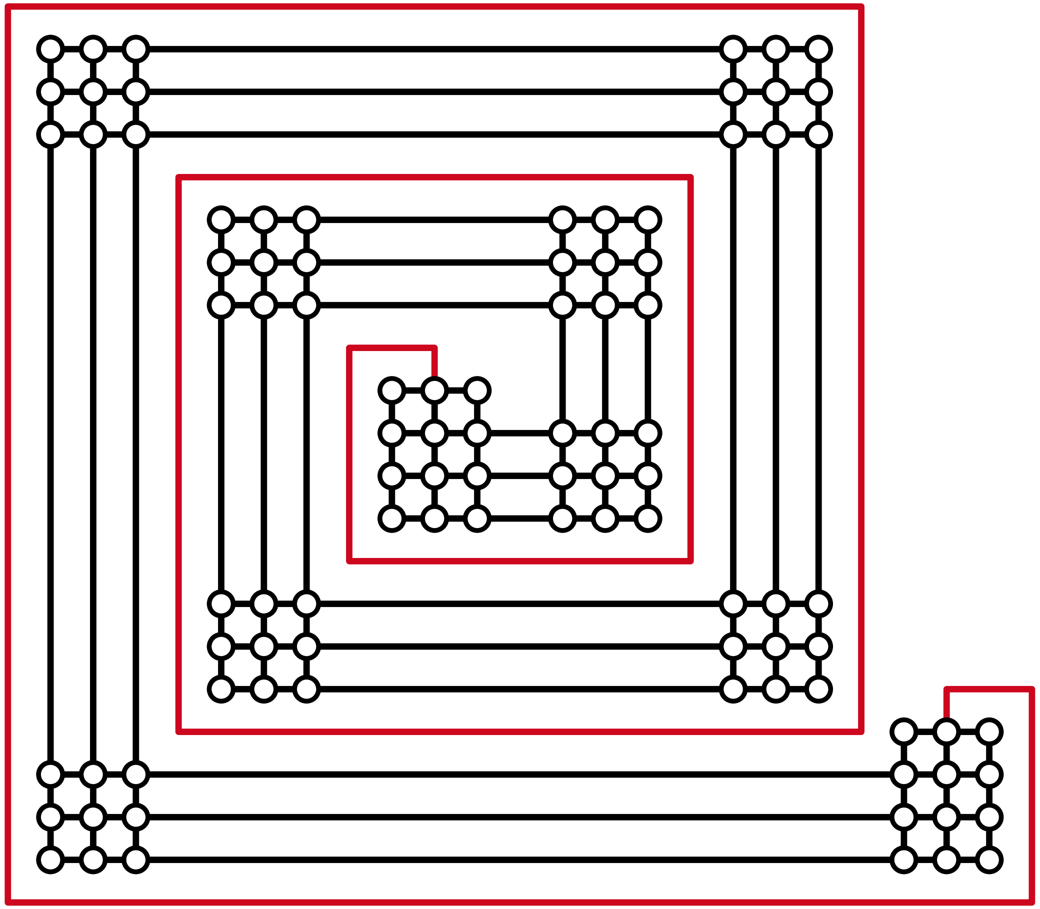
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 5 – Fürchterlich viele Knicke

Konstruieren Sie eine Familie von eingebetteten planaren Graphen mit Maximalgrad 4 und mit $\mathcal{O}(n)$ Knoten, für die es in jeder knickminimalen einbettungserhaltenden orthogonalen Zeichnung eine Kante mit $\Omega(n)$ Knicken gibt.

Aufgabe 5 – Fürchterlich viele Knicke

Konstruieren Sie eine Familie von eingebetteten planaren Graphen mit Maximalgrad 4 und mit $\mathcal{O}(n)$ Knoten, für die es in jeder knickminimalen einbettungserhaltenden orthogonalen Zeichnung eine Kante mit $\Omega(n)$ Knicken gibt.



Aufgabe 6 – Zusätzliche Forderungen

Gegeben sei ein zweifach-zusammenhängender planarer Graph mit Maximalgrad 4. Modifizieren Sie das Flussmodell zur Knickminimierung in orthogonalen Layouts, so dass

(a) keine Kante e mehr als $k(e)$ Knicke hat;

(b) keine innere Facette f mehr als $k(f)$ konkave Ecken (Innenwinkel von $3\pi/2$) auf ihrem Rand hat;

(c) statt der Anzahl der Knicke die Anzahl der konkaven Ecken in den inneren Facetten der Zeichnung minimiert wird.

Aufgabe 6 – Zusätzliche Forderungen

Karlsruhe Institute of Technology

Gegeben sei ein zweifach-zusammenhängender planarer Graph mit Maximalgrad 4. Modifizieren Sie das Flussmodell zur Knickminimierung in orthogonalen Layouts, so dass

(a) keine Kante e mehr als $k(e)$ Knicke hat;

(b) keine innere Facette f mehr als $k(f)$ konkave Ecken (Innenwinkel von $3\pi/2$) auf ihrem Rand hat;

(c) statt der Anzahl der Knicke die Anzahl der konkaven Ecken in den inneren Facetten der Zeichnung minimiert wird.

Aufgabe 6 – Zusätzliche Forderungen

Gegeben sei ein zweifach-zusammenhängender planarer Graph mit Maximalgrad 4. Modifizieren Sie das Flussmodell zur Knick-minimierung in orthogonalen Layouts, so dass

(a) keine Kante e mehr als $k(e)$ Knicke hat;

(b) keine innere Facette f mehr als $k(f)$ konkave Ecken (Innen-winkel von $3\pi/2$) auf ihrem Rand hat;

(c) statt der Anzahl der Knicke die Anzahl der konkaven Ecken in den inneren Facetten der Zeichnung minimiert wird.

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 7 – Fläche

Zeigen Sie:

(a) Für eine Zeichnung Γ eines Graphen G mit n Knoten, Minimalgrad 2 und einer orthogonalen Beschreibung H mit b Knicken ist die Zeichenfläche höchstens $\lfloor (n+b)/2 \rfloor \cdot \lceil (n+b)/2 \rceil$.

(b) Geben Sie eine Familie von Graphen an, die einerseits zeigt, dass die obige Schranke scharf ist, die aber andererseits auch jeweils eine Zeichnung mit linear beschränkter Fläche von $O(n+b)$ erlaubt.

Aufgabe 7 – Fläche

Zeigen Sie:

(a) Für eine Zeichnung Γ eines Graphen G mit n Knoten, Minimalgrad 2 und einer orthogonalen Beschreibung H mit b Knicken ist die Zeichenfläche höchstens $\lfloor(n+b)/2\rfloor \cdot \lceil(n+b)/2\rceil$.

(b) Geben Sie eine Familie von Graphen an, die einerseits zeigt, dass die obige Schranke scharf ist, die aber andererseits auch jeweils eine Zeichnung mit linear beschränkter Fläche von $O(n+b)$ erlaubt.