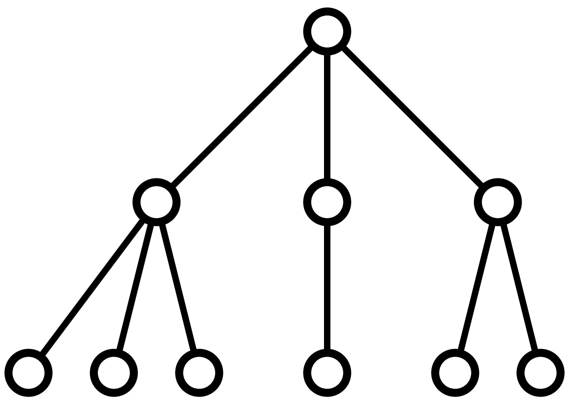
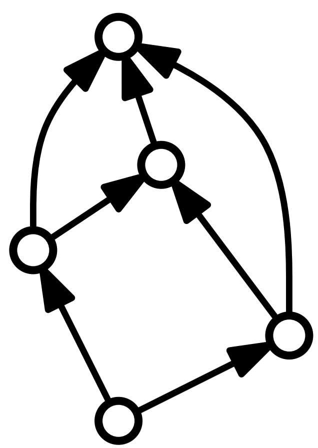
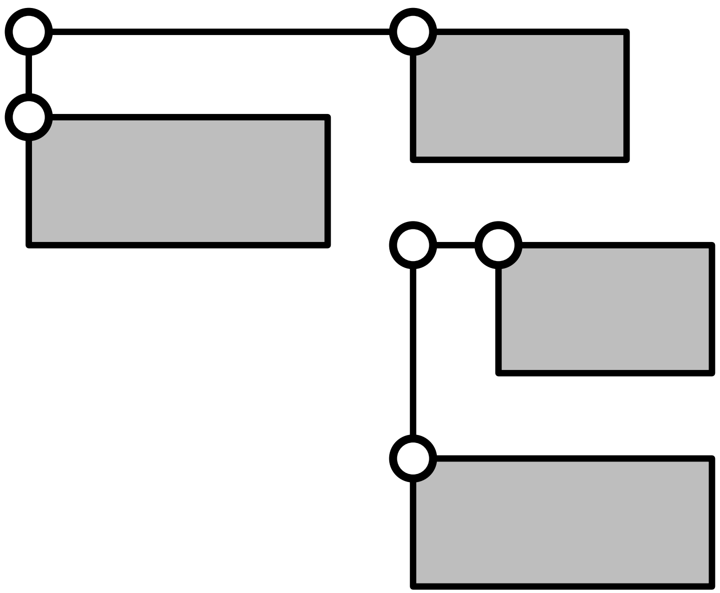
Erste Übung

Algorithmen zu Visualisierung von Graphen
Teile-und-Herrsche und s-t-Ordnungen

Ignaz Rutter (basierend auf Folien von Thomas Bläsius)

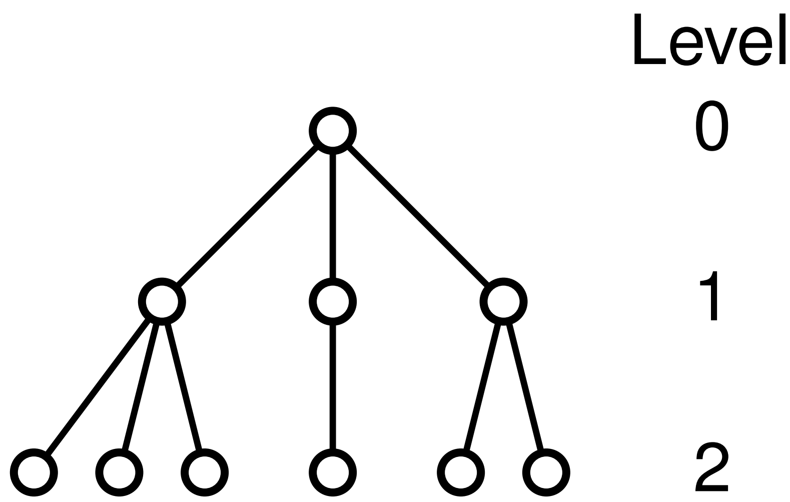
INSTITUTE OF THEORETICAL INFORMATICS
KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY (KIT)

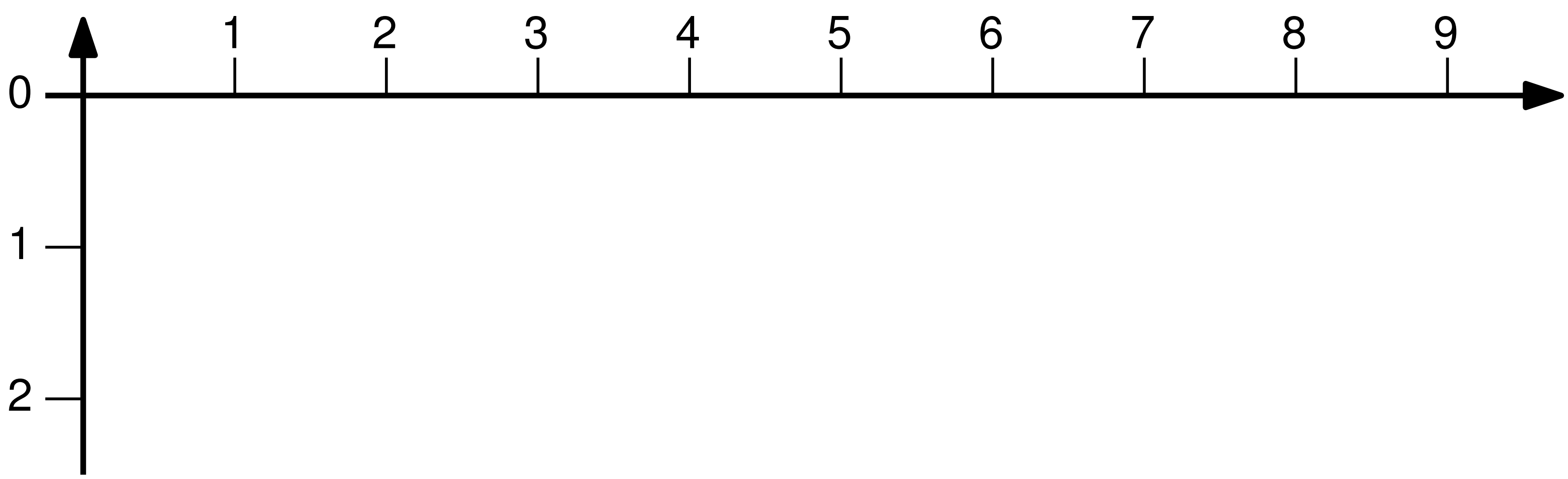




Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

In der Vorlesung wurde ein einfaches Verfahren zum Zeichnen von Bäumen vorgestellt, das jedem Knoten v die Koordinaten $x(v) =$ pre-/in-/postorder(v) und $y(v) = -$tiefe(v) zuordnet. Garantiert dieses Verfahren auch dann noch eine geradlinige Gitterzeichnung, wenn man für die x-Koordinaten die sogenannte *levelorder*-Nummerierung verwendet, die nacheinander in einer Breitensuche alle Knoten der gleichen Tiefe von links nach rechts besucht?

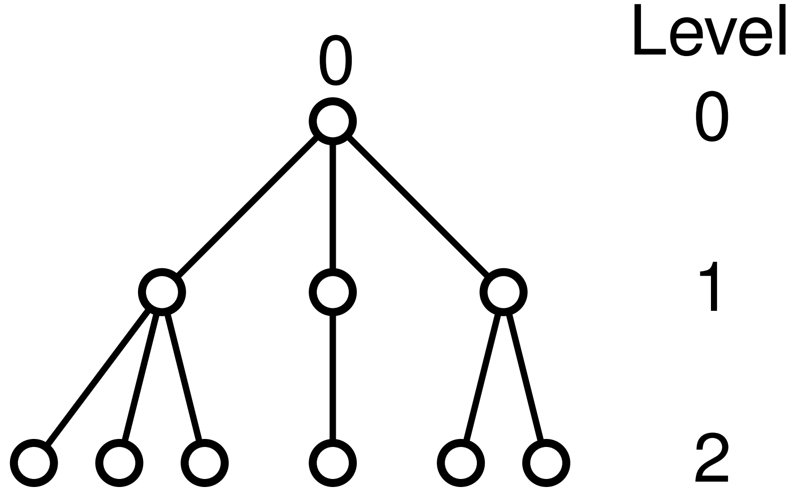
Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

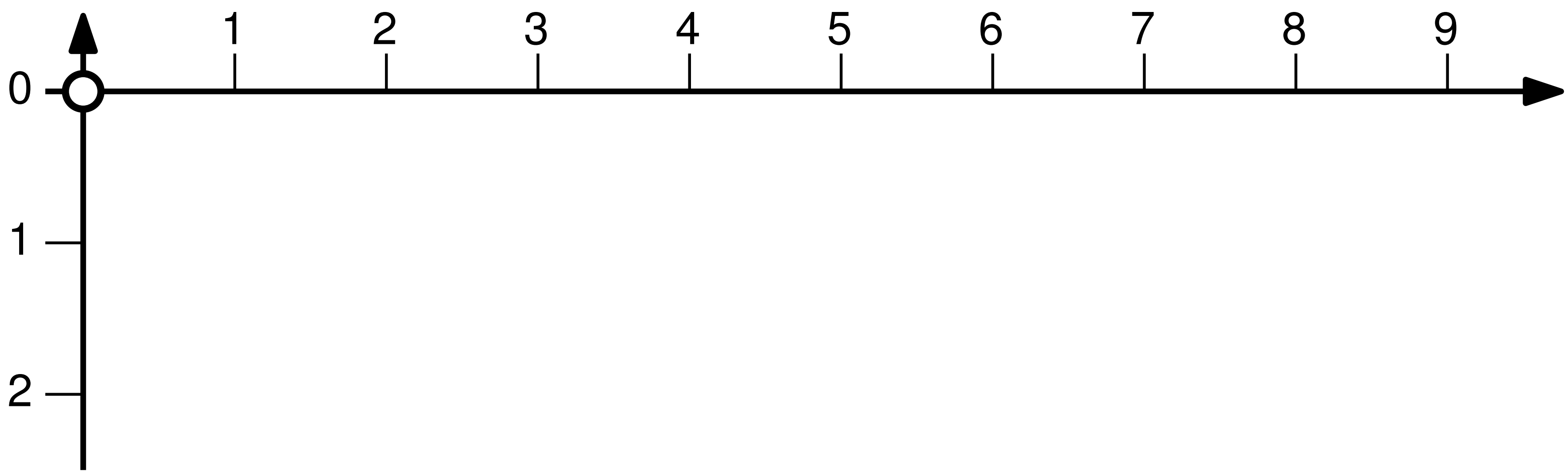




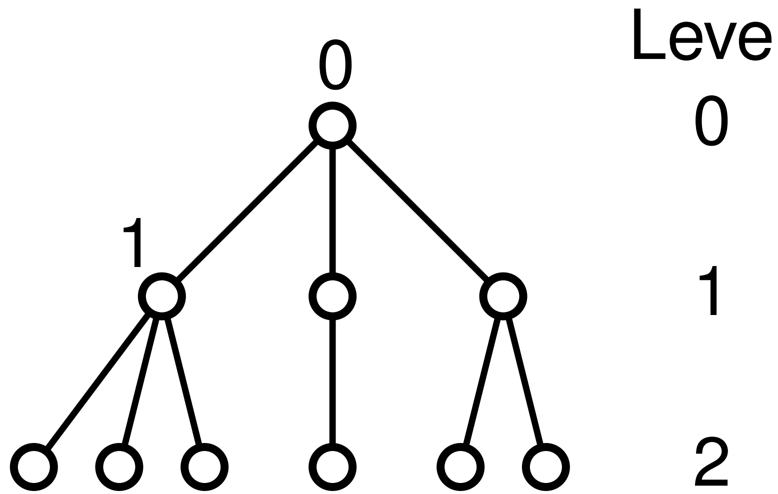
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

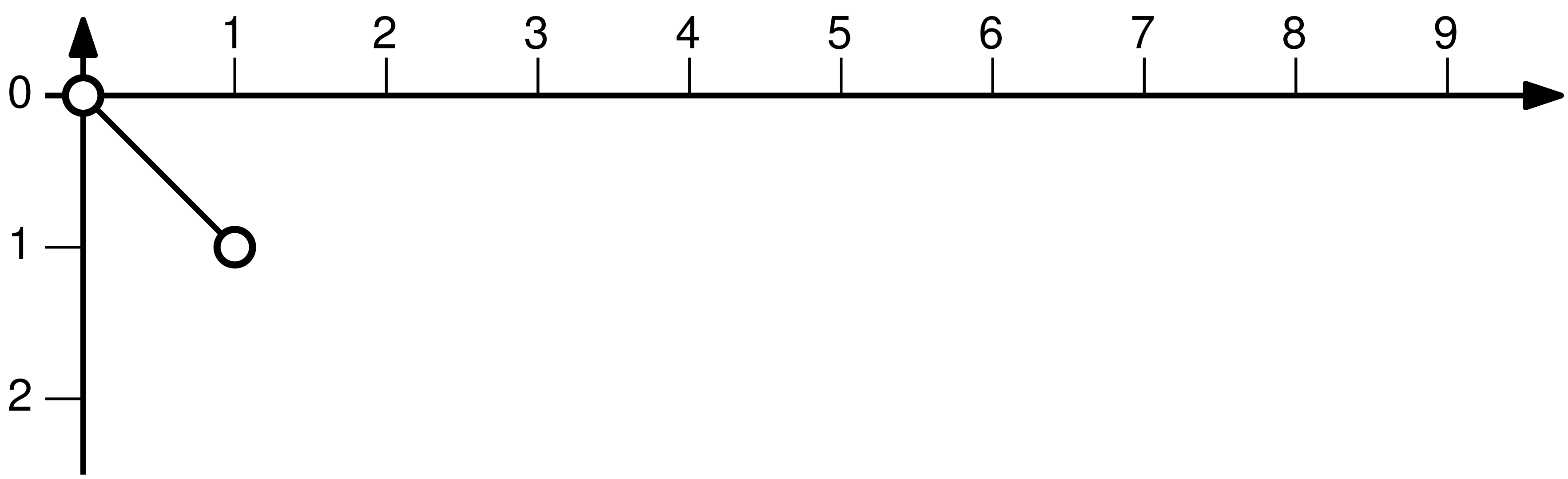
Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



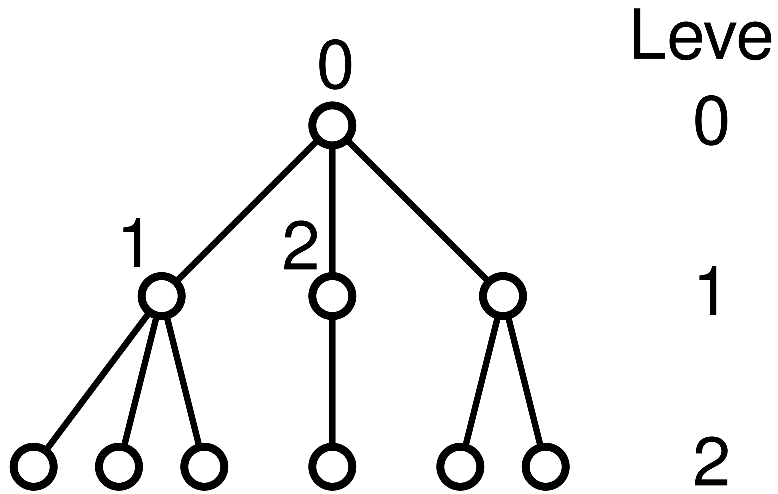


Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



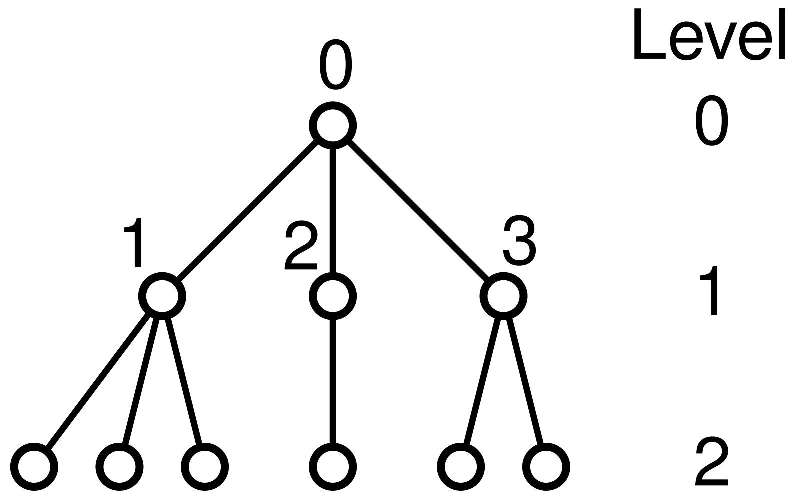


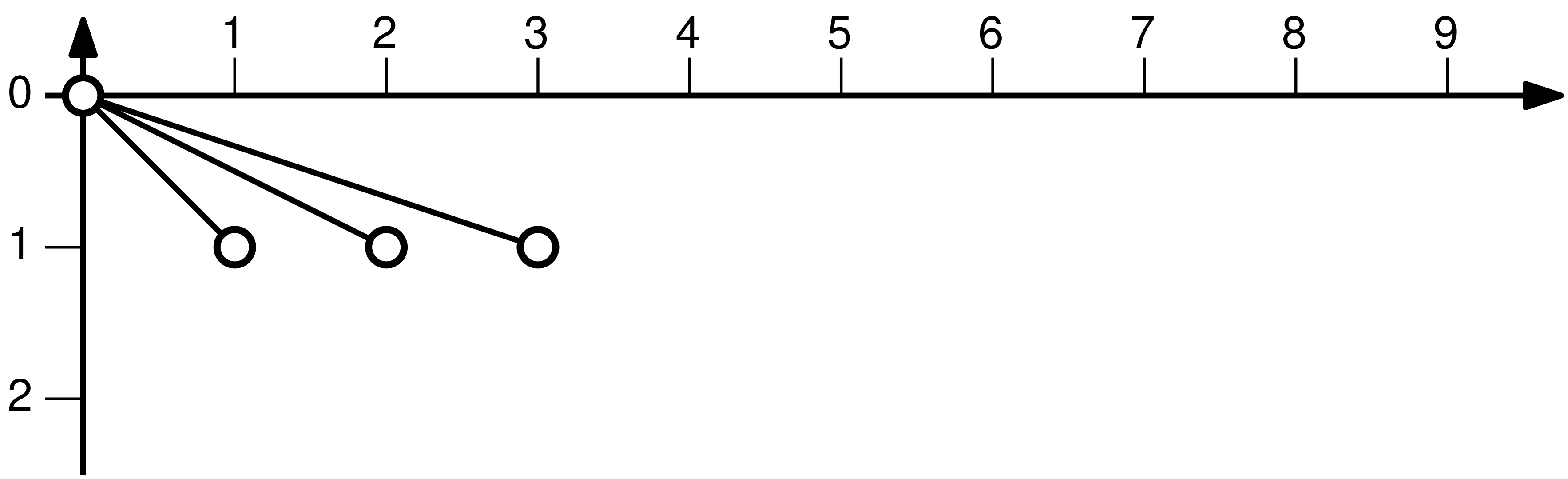
Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



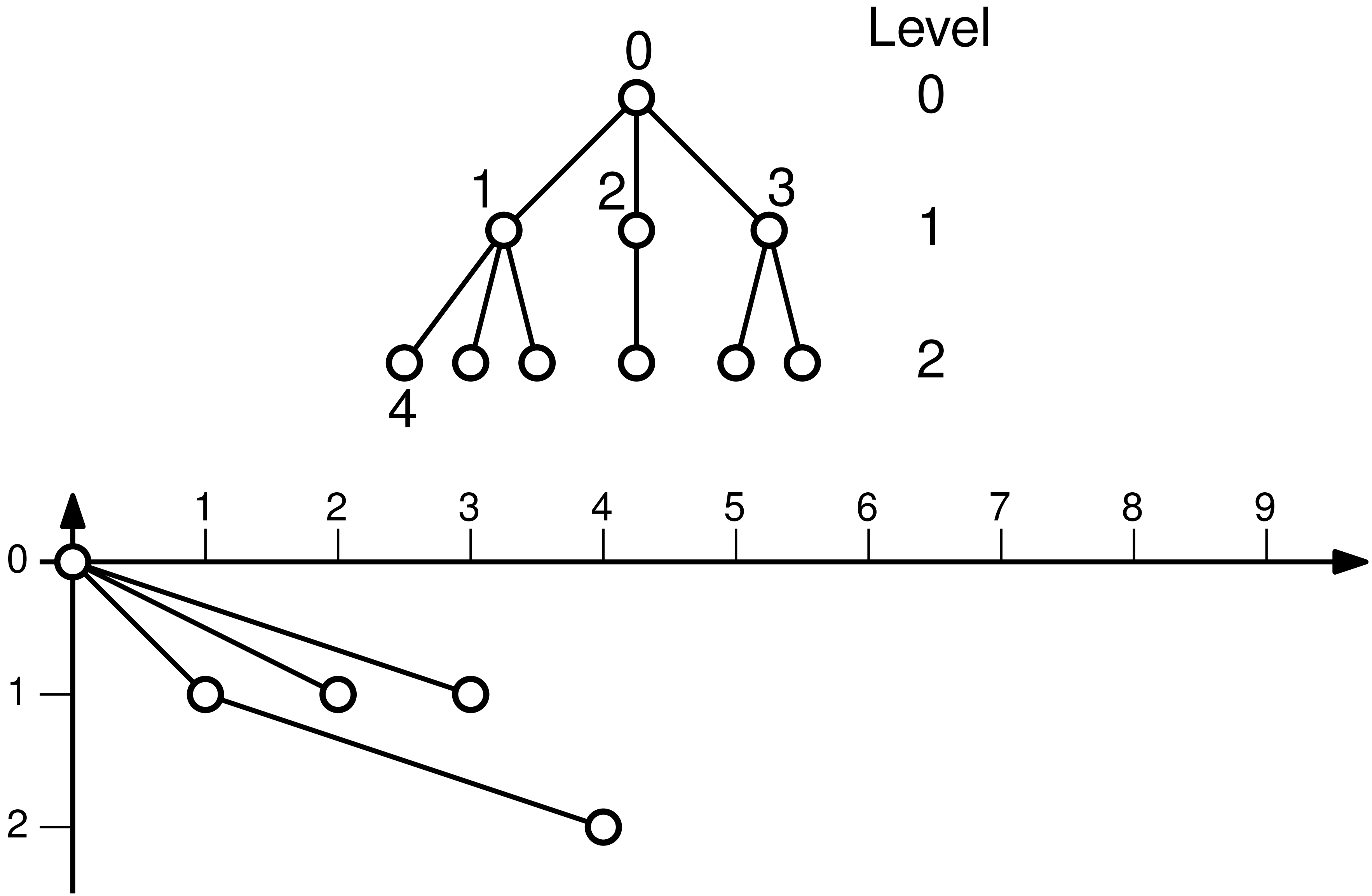
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

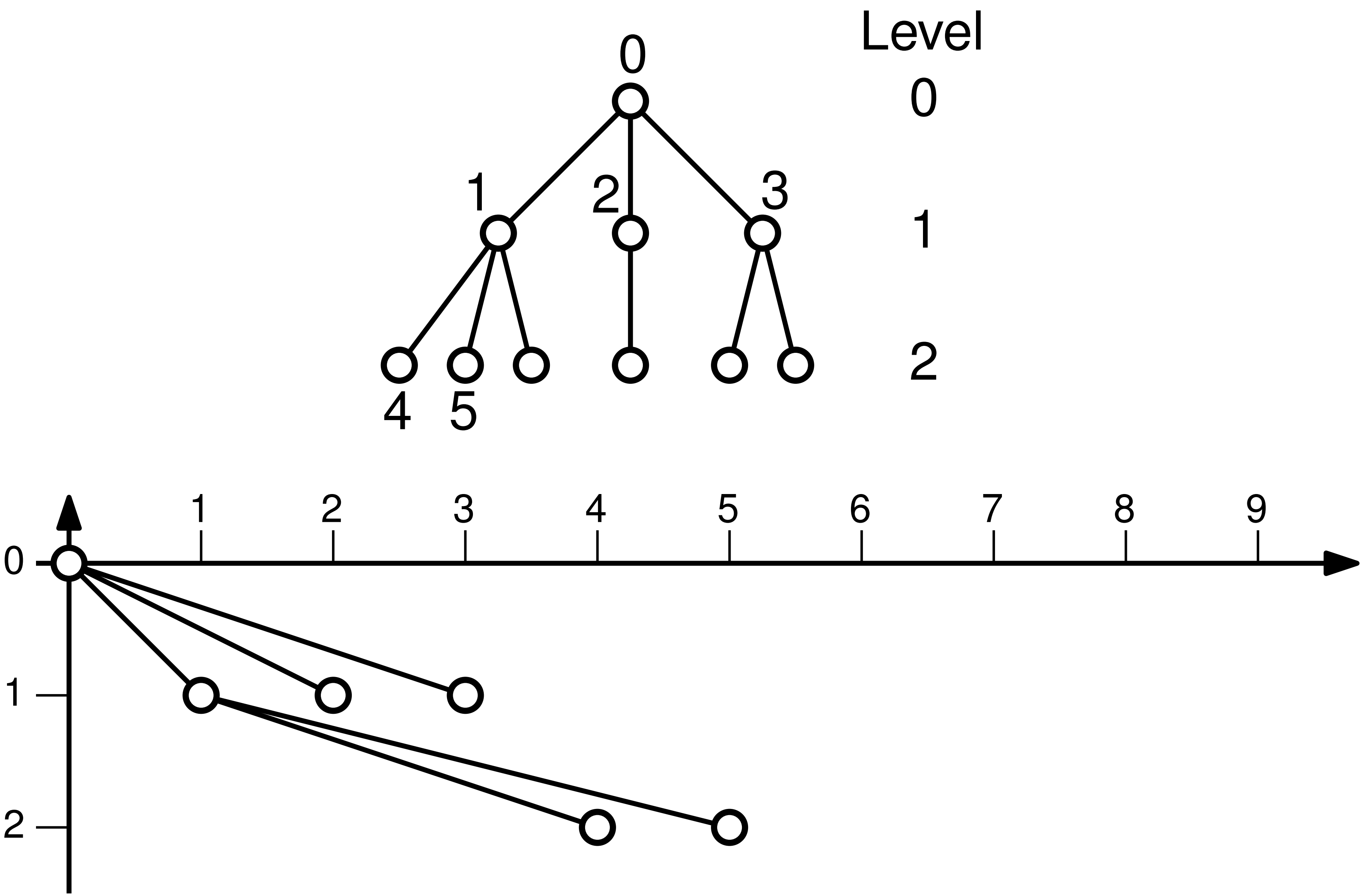




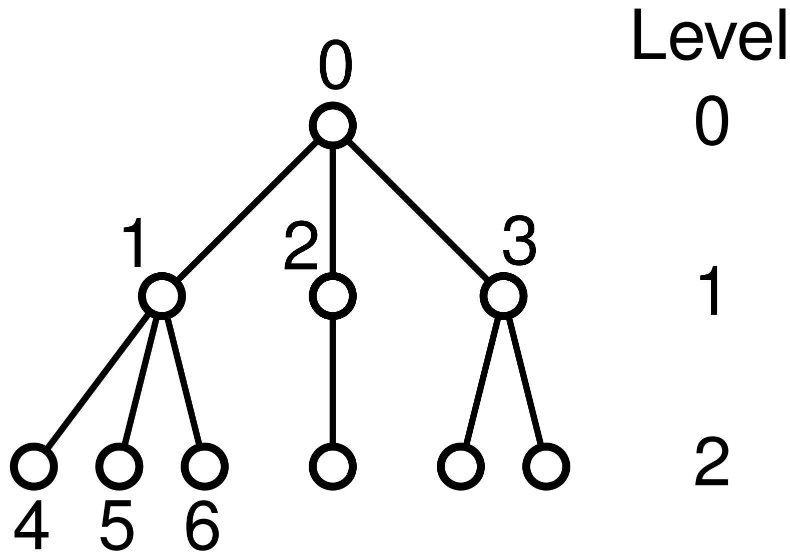
Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

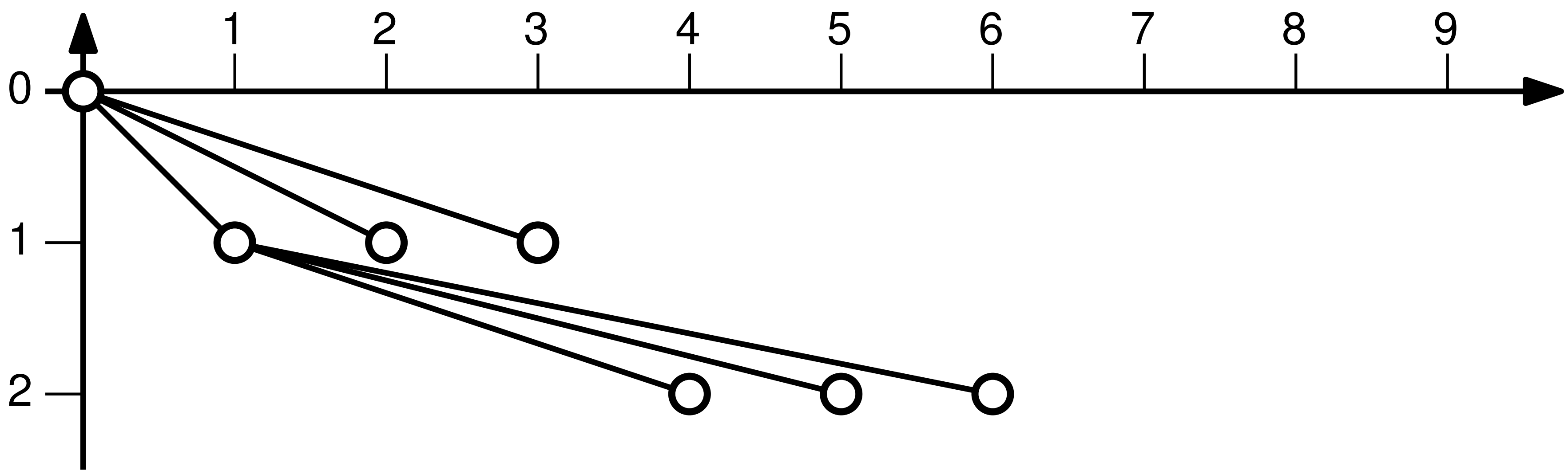


Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

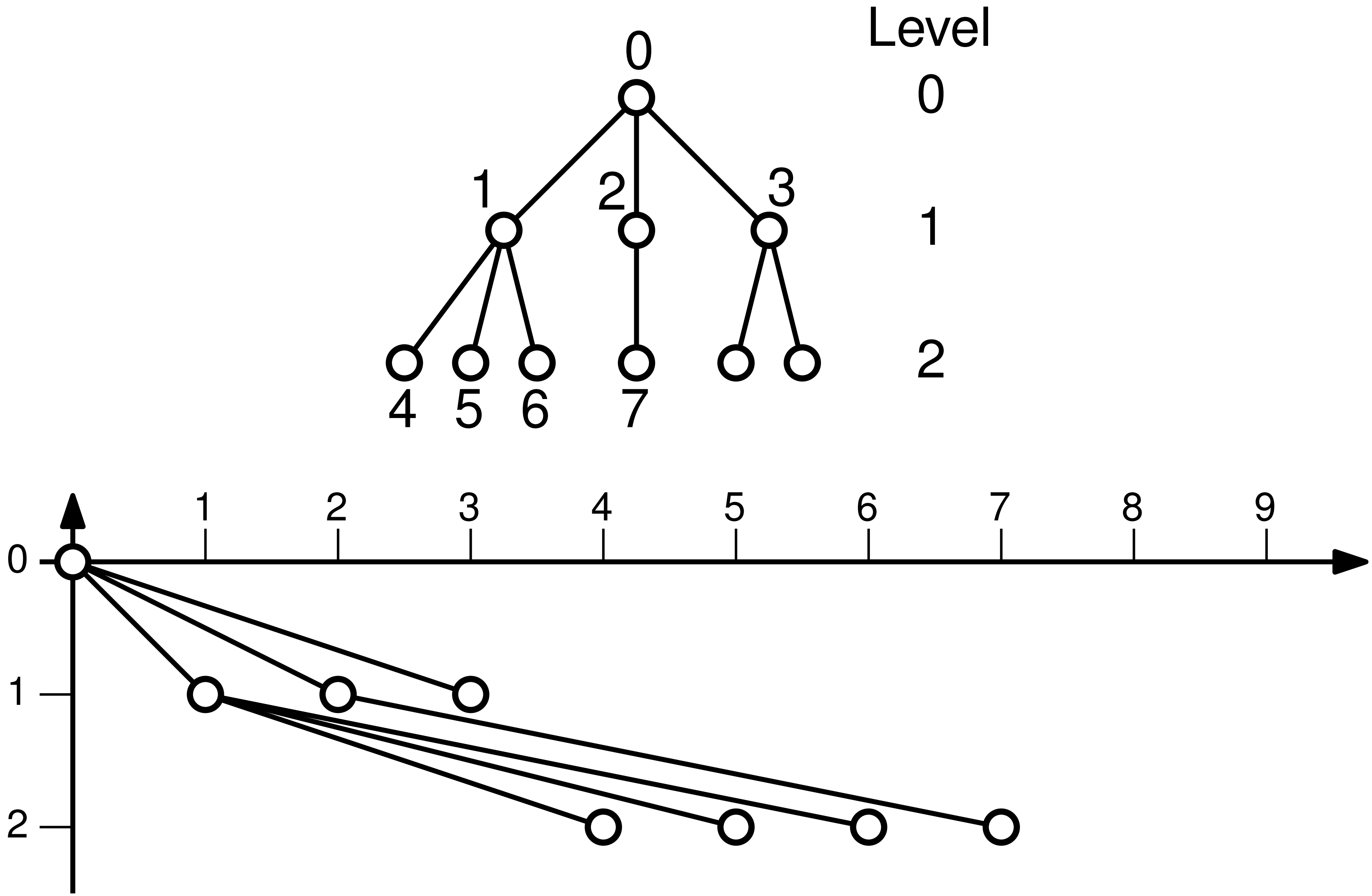


Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

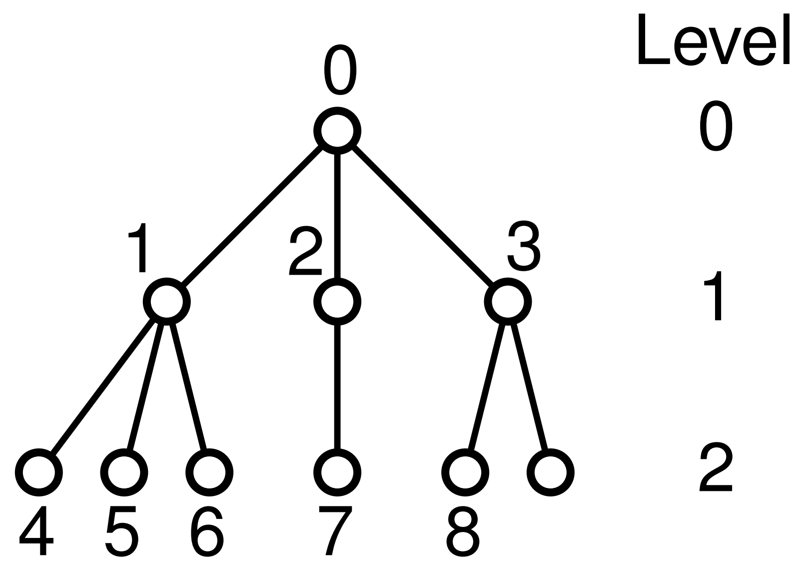


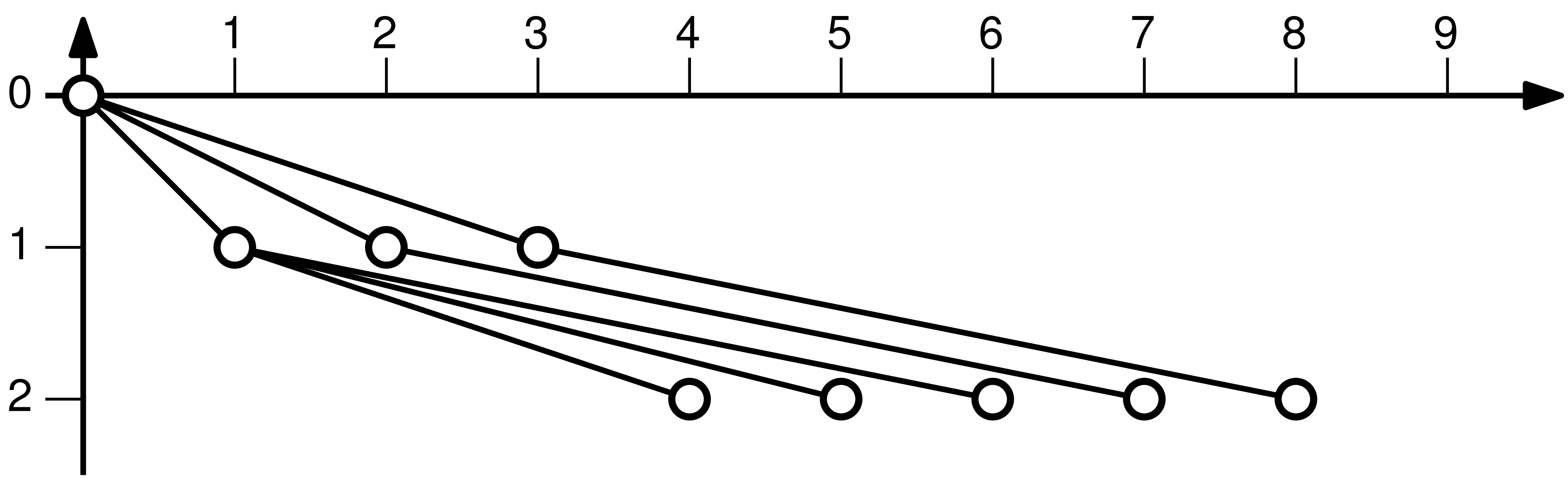


Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

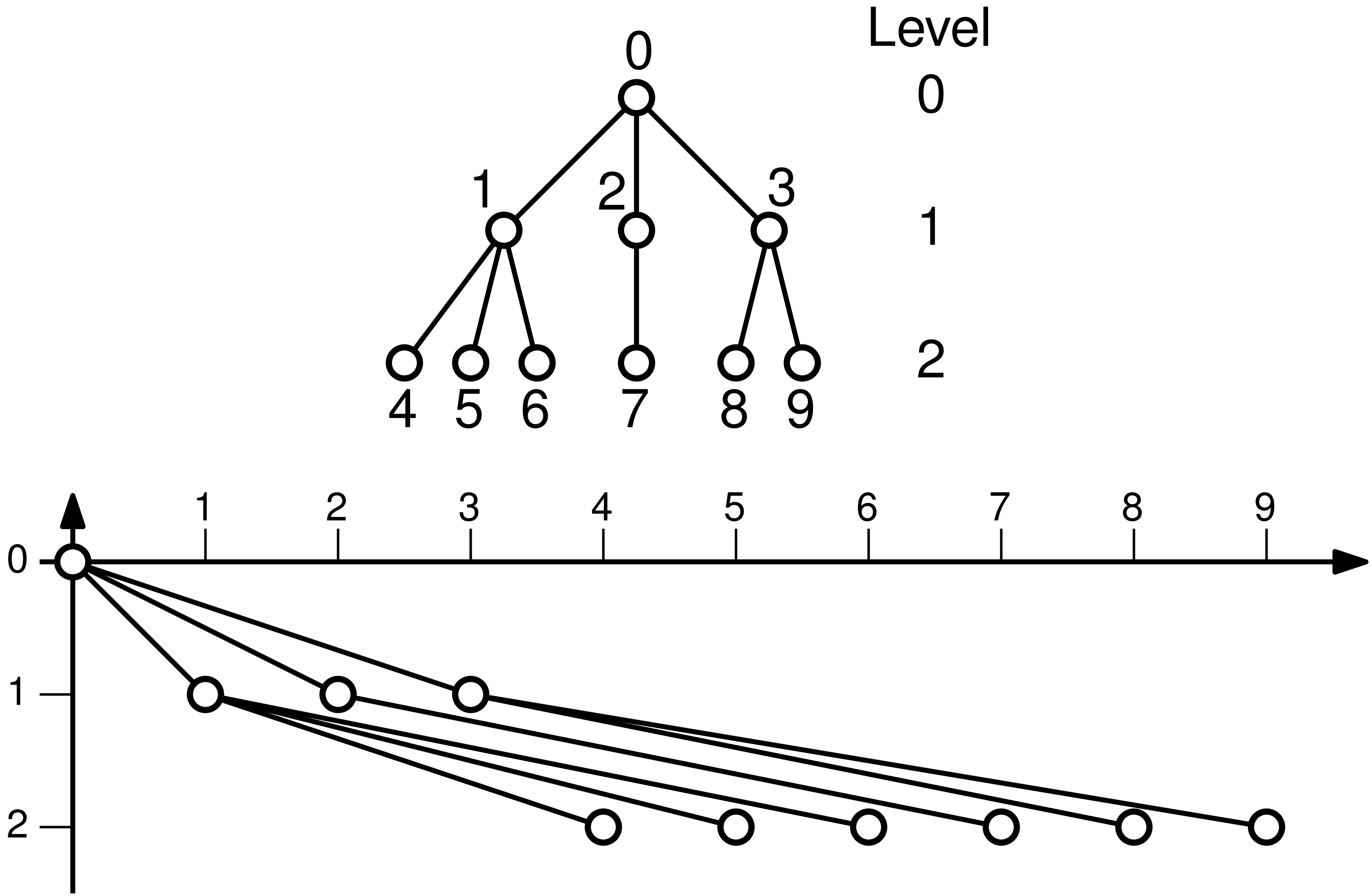


Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout





Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



Aufgabe 2 – HV-Layouts

Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Binärbaum in $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit ein HV-Layout minimaler Fläche berechnet. Betrachten Sie dabei sowohl feste als auch variable Einbettung.

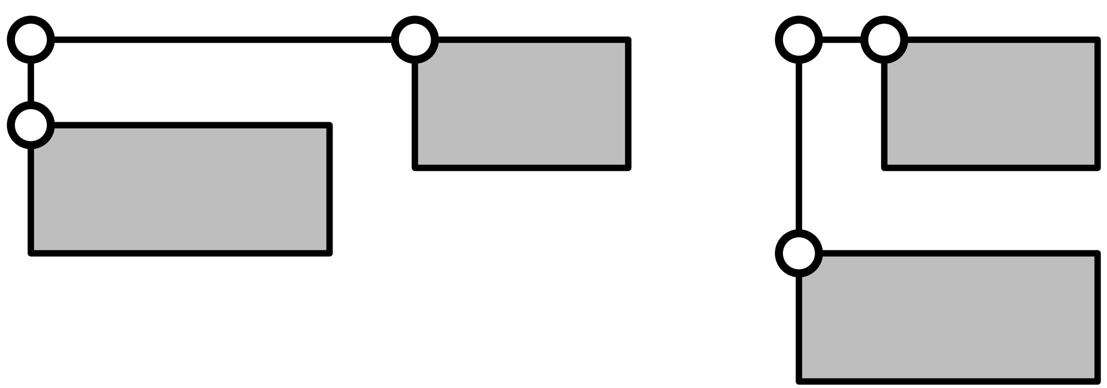
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Aufgabe 2 – HV-Layouts

Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Binärbaum in $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit ein HV-Layout minimaler Fläche berechnet. Betrachten Sie dabei sowohl feste als auch variable Einbettung.

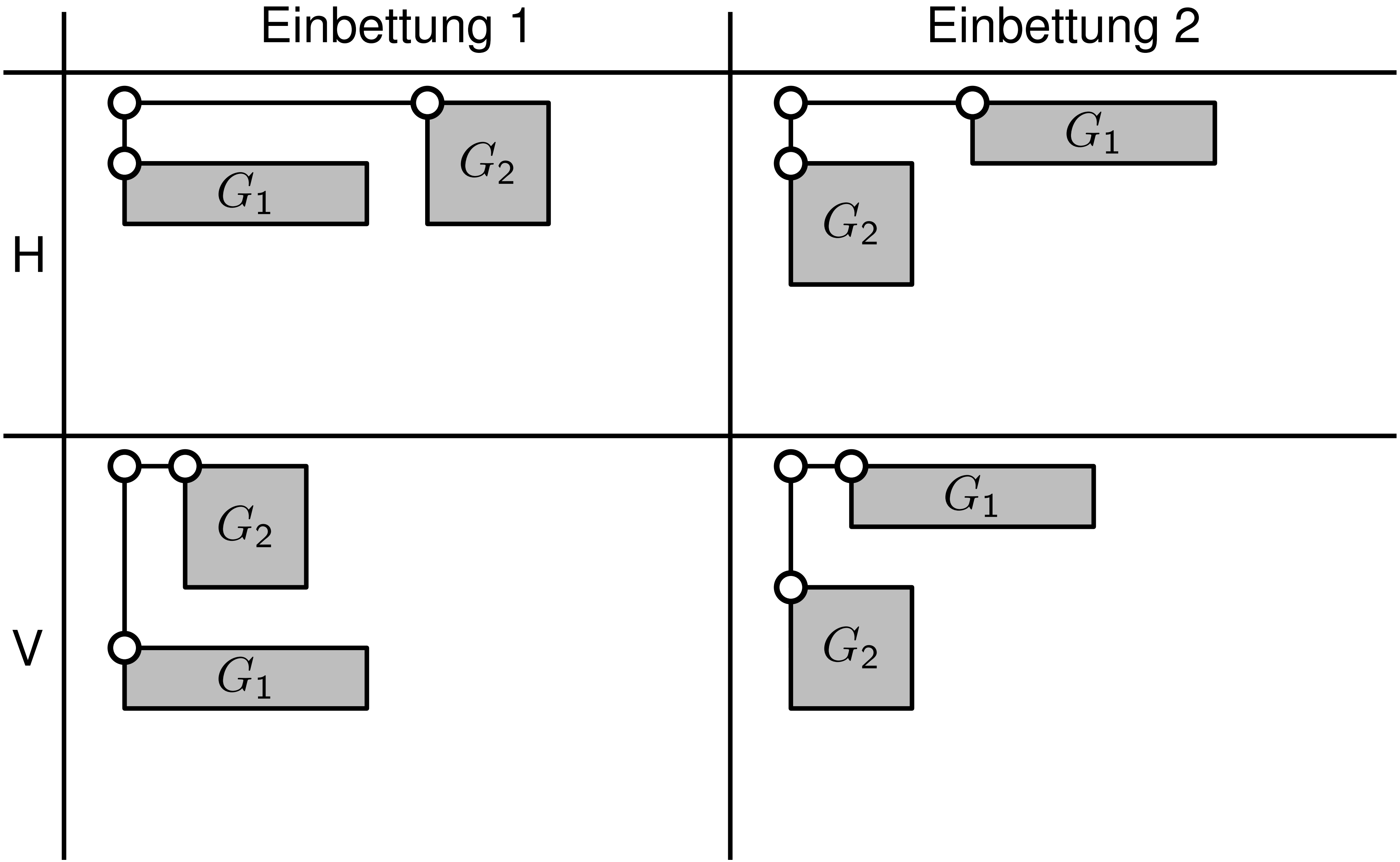
zur Erinnerung:

- Zeichne rechten und linken Teilbaum in Rechteck mit der Wurzel links oben
- Kombiniere Teilbäume horizontal oder vertikal
- Minimiere die benötigte Fläche $\rightarrow$ Dynamisches Programm

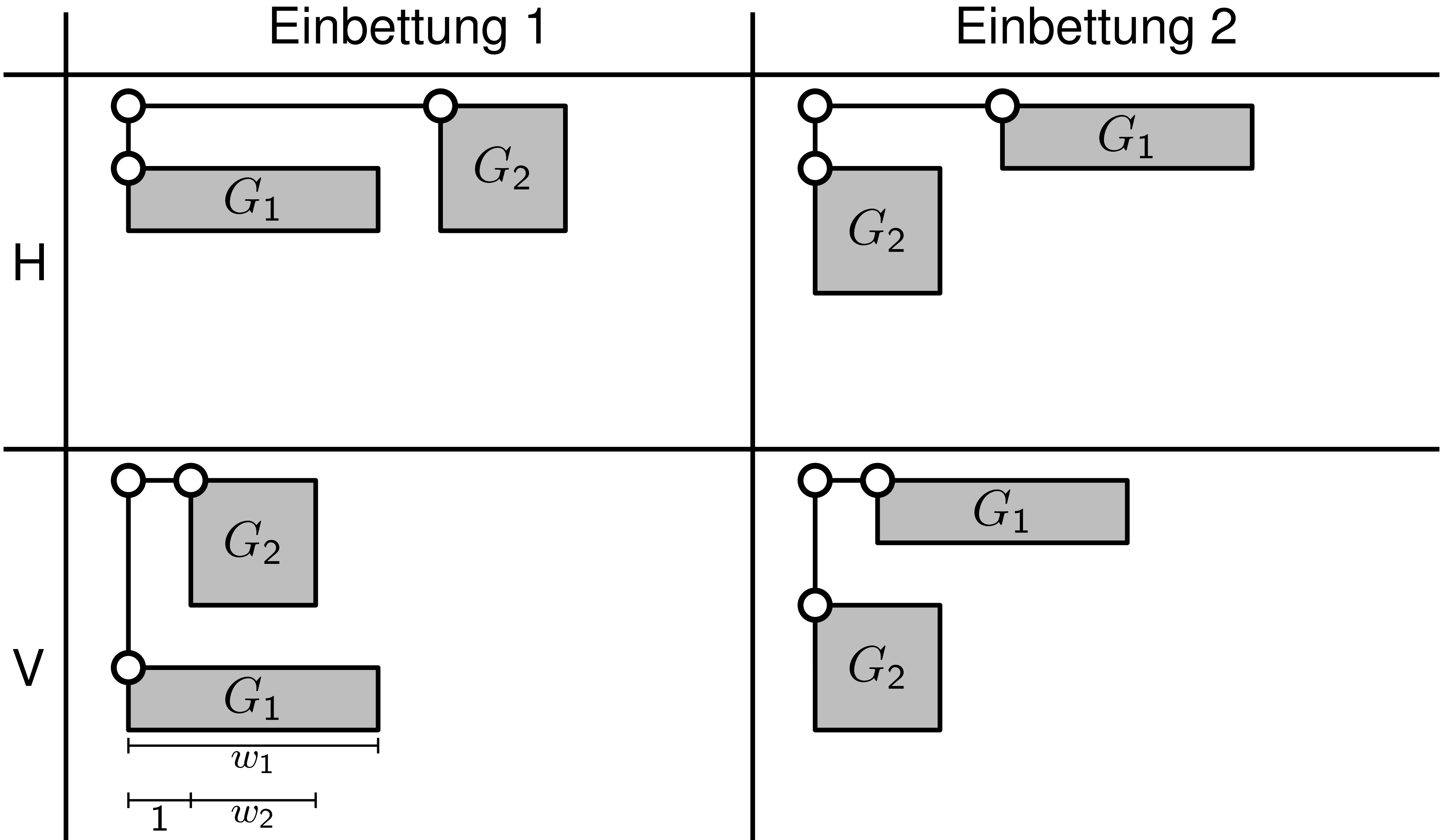


HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)

Karlsruhe Institute of Technology

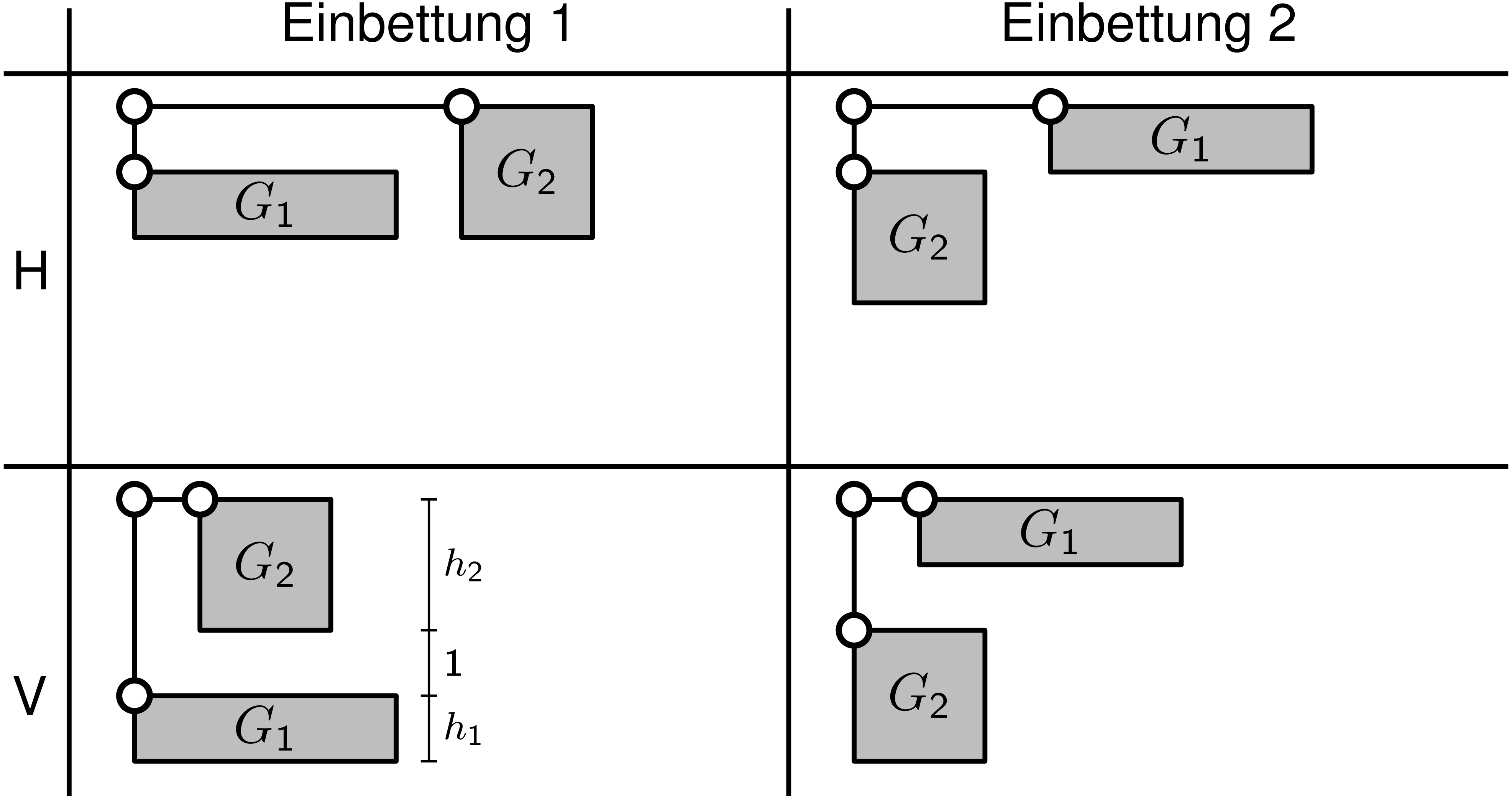


HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)



$w = \max(w_1, w_2 + 1)$

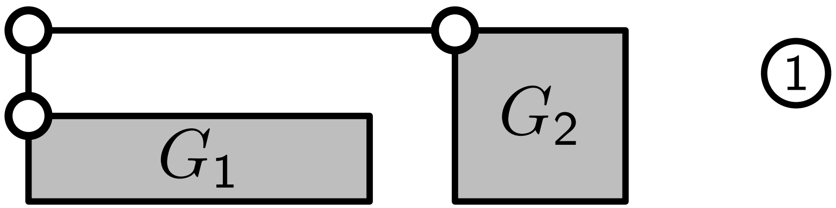
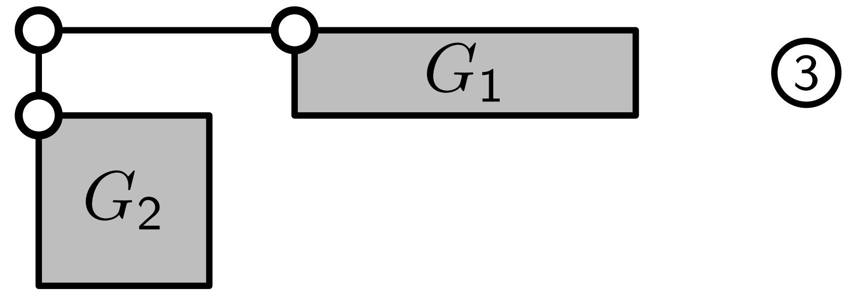
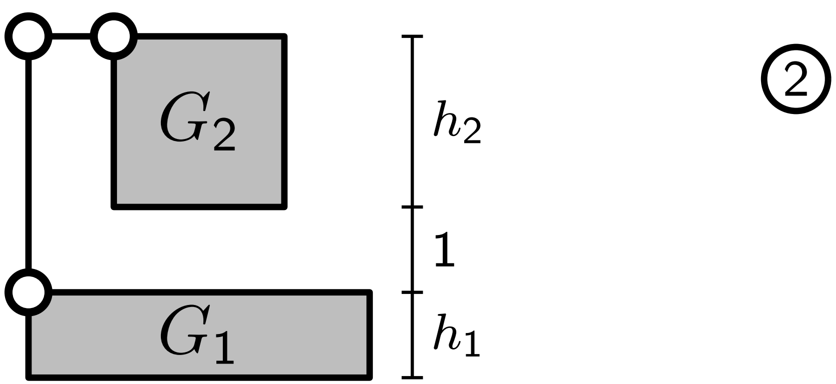
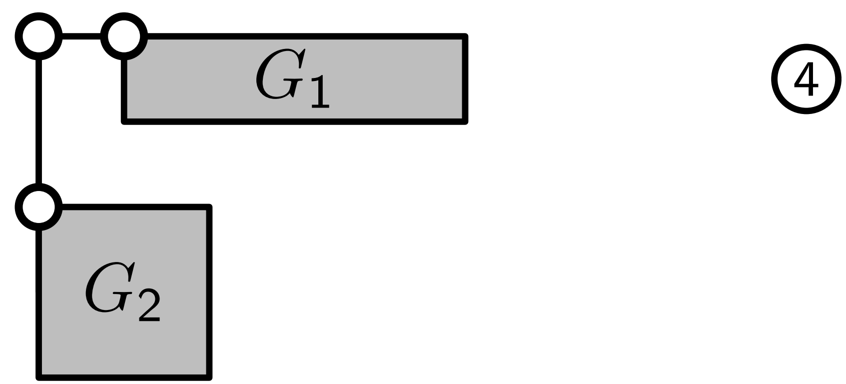
HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)



$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)

	Einbettung 1	Einbettung 2
H	 $h = \max(h_1 + 1, h_2)$ $w = w_1 + w_2 + 1$	 $h = \max(h_1, h_2 + 1)$ $w = w_1 + w_2 + 1$
V	 $h = h_1 + h_2 + 1$ $w = \max(w_1, w_2 + 1)$	 $h = h_1 + h_2 + 1$ $w = \max(w_1 + 1, w_2)$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

1	2	3	4
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination

HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare $((w, h)$ dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

1	2	3	4
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare ((w, h) dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h'$)

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare $((w, h)$ dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①
$(w, h) = (7, 2)$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Dynamisches Programm

1	2	3	4
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare ((w, h) dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h'$)

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

1	2
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

1	2	3	4
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare $((w, h)$ dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

1	2	3
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$	$(w, h) = (7, 3)$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare ((w, h) dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h'$)

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①	②	③	④
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$	$(w, h) = (7, 3)$	$(w, h) = (5, 4)$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

1	2	3	4
$h = \max(h_1+1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2+1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2+1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1+1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare ((w,h) dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h'$)

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

1	2	3	4
$(w,h) = (7,2)$	$(w,h) = (4,4)$	$(w,h) = (7,3)$	$(w,h) = (5,4)$

HV-Layouts – Dynamisches Programm

1	2	3	4
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare ((w, h) dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h'$)

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

1	2	3	4
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$	$(w, h) = (7, 3)$	$(w, h) = (5, 4)$

Können mehr als zwei Kombinationen übrig bleiben?

HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt: $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne (w, h) für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare ((w, h) dom. $(w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h'$)

Beispiel: $(w_1, h_1) = (4, 1)$ und $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①	②	③	④
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$	$(w, h) = (7, 3)$	$(w, h) = (5, 4)$

Können mehr als zwei Kombinationen übrig bleiben?

Wie geht man im nächsten Schritt vor, wenn beide Kinder mehrere Paare anbieten?

HV-Layouts – Paretomenge

G_1 und G_2 haben nicht jeweils ein optimales Paar (w_1, h_1) bzw. (w_2, h_2) sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren P_1 und P_2 (*Paretomengen*).

HV-Layouts – Paretomenge

G_1 und G_2 haben nicht jeweils ein optimales Paar (w_1, h_1) bzw. (w_2, h_2) sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren P_1 und P_2 (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge P von G

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Paretomenge

G_1 und G_2 haben nicht jeweils ein optimales Paar (w_1, h_1) bzw. (w_2, h_2) sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren P_1 und P_2 (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge P von G

- Für jedes Paar $(w_1, h_1) \in P_1$ wähle jedes Paar $(w_2, h_2) \in P_2$ und berechne (w, h) für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

HV-Layouts – Paretomenge

G_1 und G_2 haben nicht jeweils ein optimales Paar (w_1, h_1) bzw. (w_2, h_2) sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren P_1 und P_2 (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge P von G

- Für jedes Paar $(w_1, h_1) \in P_1$ wähle jedes Paar $(w_2, h_2) \in P_2$ und berechne (w, h) für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

Offensichtlich erhält man die korrekte Paretomenge P

HV-Layouts – Paretomenge

G_1 und G_2 haben nicht jeweils ein optimales Paar (w_1, h_1) bzw. (w_2, h_2) sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren P_1 und P_2 (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge P von G

- Für jedes Paar $(w_1, h_1) \in P_1$ wähle jedes Paar $(w_2, h_2) \in P_2$ und berechne (w, h) für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

Offensichtlich erhält man die korrekte Paretomenge P

Wie groß kann P werden?

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Paretomenge

G_1 und G_2 haben nicht jeweils ein optimales Paar (w_1, h_1) bzw. (w_2, h_2) sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren P_1 und P_2 (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge P von G

- Für jedes Paar $(w_1, h_1) \in P_1$ wähle jedes Paar $(w_2, h_2) \in P_2$ und berechne (w, h) für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

Offensichtlich erhält man die korrekte Paretomenge P

Wie groß kann P werden?

Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit n Knoten enthält maximal n Paare.

HV-Layouts – Paretomenge

Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit n Knoten enthält maximal n Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar $(w, h) \in P$ gilt $w \in \{0, \ldots, n-1\}$

HV-Layouts – Paretomenge

Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit n Knoten enthält maximal n Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar $(w, h) \in P$ gilt $w \in \{0, \ldots, n-1\}$
- Für zwei Paare (w, h) und (w', h') gilt $w \neq w'$, andernfalls dominiert (w, h) das Paar (w', h') oder umgekehrt

HV-Layouts – Paretomenge

Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit n Knoten enthält maximal n Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar $(w, h) \in P$ gilt $w \in \{0, \ldots, n-1\}$
- Für zwei Paare (w, h) und (w', h') gilt $w \neq w'$, andernfalls dominiert (w, h) das Paar (w', h') oder umgekehrt
- $\Rightarrow$ Die Paretomenge enthält maximal n Paare

$\square$

HV-Layouts – Paretomenge

Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit n Knoten enthält maximal n Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar $(w, h) \in P$ gilt $w \in \{0, \dots, n-1\}$
- Für zwei Paare (w, h) und (w', h') gilt $w \neq w'$, andernfalls dominiert (w, h) das Paar (w', h') oder umgekehrt
- $\Rightarrow$ Die Paretomenge enthält maximal n Paare

$\square$

Damit benötigen wir $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit pro Schritt also insgesamt $\mathcal{O}(n^3)$

Geht es schneller?

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \setminus P_1$	$\binom{8}{1}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{3}{7}$
$\binom{3}{7}$						
$\binom{6}{1}$						
$\binom{5}{5}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{8}{1}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{3}{7}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{12}{7}$					
$\binom{6}{1}$						
$\binom{5}{5}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{8}{1}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{3}{7}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{12}{7}$	$\binom{5}{9}$				
$\binom{6}{1}$						
$\binom{5}{5}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{8}{1}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{3}{7}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{12}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{8}{7}$			
$\binom{6}{1}$						
$\binom{5}{5}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{8}{1}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{3}{7}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{12}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{10}{7}$		
$\binom{6}{1}$						
$\binom{5}{5}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \setminus P_1$	$\binom{8}{1}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{3}{7}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{12}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{11}{7}$	$\binom{7}{8}$
$\binom{6}{1}$	$\binom{15}{2}$	$\binom{8}{9}$	$\binom{11}{7}$	$\binom{13}{5}$	$\binom{14}{3}$	$\binom{10}{8}$
$\binom{5}{5}$	$\binom{14}{5}$	$\binom{7}{9}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{12}{5}$	$\binom{13}{5}$	$\binom{9}{8}$

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

P_2 \ P_1	$\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$	$\cancel{\begin{pmatrix}12\\7\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$	$\cancel{\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}15\\2\end{pmatrix}$	$\cancel{\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}14\\3\end{pmatrix}$	$\cancel{\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}}$
$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$	$\cancel{\begin{pmatrix}14\\5\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$	$\cancel{\begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}}$

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{1}{8}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$
$\binom{3}{7}$						
$\binom{5}{5}$						
$\binom{6}{1}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

1

$w = w_1 + w_2 + 1$

$h = \max(h_1 + 1, h_2)$

P_2 \ P_1	$\binom{1}{8}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{7}{8}$				
$\binom{5}{5}$						
$\binom{6}{1}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

1

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \setminus P_1$	$\binom{1}{8}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{7}{8}$	$\binom{8}{7}$			
$\binom{5}{5}$						
$\binom{6}{1}$						

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

1

$w = w_1 + w_2 + 1$

$h = \max(h_1 + 1, h_2)$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{1}{8}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{7}{8}$	$\binom{8}{7}$	$\cancel{\binom{10}{7}}$	$\cancel{\binom{11}{7}}$	$\cancel{\binom{12}{7}}$
$\binom{5}{5}$						
$\binom{6}{1}$						

restliche Zeile wird dominiert nach Eintrag mit $h_1 + 1 \leq h_2$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

1

$w = w_1 + w_2 + 1$

$h = \max(h_1 + 1, h_2)$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{1}{8}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{7}{8}$	$\binom{8}{7}$	$\cancel{\binom{10}{7}}$	$\cancel{\binom{11}{7}}$	$\cancel{\binom{12}{7}}$
$\binom{5}{5}$	$\cancel{\binom{7}{9}}$	$\cancel{\binom{9}{8}}$	$\cancel{\binom{10}{7}}$			
$\binom{6}{1}$	$\cancel{\binom{8}{9}}$	$\cancel{\binom{10}{8}}$	$\cancel{\binom{11}{7}}$			

restliche Spalten werden dominiert bis Eintrag mit $h_1 + 1 \leq h_2$

restliche Zeile wird dominiert nach Eintrag mit $h_1 + 1 \leq h_2$

HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

1

$w = w_1 + w_2 + 1$

$h = \max(h_1 + 1, h_2)$

$P_2 \backslash P_1$	$\binom{1}{8}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{1}$
$\binom{3}{7}$	$\binom{5}{9}$	$\binom{7}{8}$	$\binom{8}{7}$	$\cancel{\binom{10}{7}}$	$\cancel{\binom{11}{7}}$	$\cancel{\binom{12}{7}}$
$\binom{5}{5}$	$\cancel{\binom{7}{9}}$	$\cancel{\binom{9}{8}}$	$\cancel{\binom{10}{7}}$	$\binom{12}{5}$	$\cancel{\binom{13}{5}}$	$\cancel{\binom{14}{5}}$
$\binom{6}{1}$	$\cancel{\binom{8}{9}}$	$\cancel{\binom{10}{8}}$	$\cancel{\binom{11}{7}}$	$\cancel{\binom{13}{5}}$	$\binom{14}{3}$	$\binom{15}{2}$

restliche Spalten werden dominiert bis Eintrag mit $h_1 + 1 \leq h_2$

restliche Zeile wird dominiert nach Eintrag mit $h_1 + 1 \leq h_2$

HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge P aus den beiden Paretomengen der Kinder P_1 und P_2 zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere P_1 und P_2 aufsteigend nach der Breite

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge P aus den beiden Paretomengen der Kinder P_1 und P_2 zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

1

- Sortiere P_1 und P_2 aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über P_1 bis $h_1 + 1 \leq h_2$ (einschließlich)

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge P aus den beiden Paretomengen der Kinder P_1 und P_2 zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

1

- Sortiere P_1 und P_2 aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über P_1 bis $h_1 + 1 \leq h_2$ (einschließlich)
- Nimm nächstes Paar aus P_2 und starte Iteration über P_1 bei aktuellem Element in P_1 (einschließlich)

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge P aus den beiden Paretomengen der Kinder P_1 und P_2 zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere P_1 und P_2 aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über P_1 bis $h_1 + 1 \leq h_2$ (einschließlich)
- Nimm nächstes Paar aus P_2 und starte Iteration über P_1 bei aktuellem Element in P_1 (einschließlich)

$\Rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(|P_1| + |P_2|) \in \mathcal{O}(n)$

HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge P aus den beiden Paretomengen der Kinder P_1 und P_2 zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

1

- Sortiere P_1 und P_2 aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über P_1 bis $h_1 + 1 \leq h_2$ (einschließlich)
- Nimm nächstes Paar aus P_2 und starte Iteration über P_1 bei aktuellem Element in P_1 (einschließlich)

$\Rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(|P_1| + |P_2|) \in \mathcal{O}(n)$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^2)$

Aufgabe 3 – Außenplanar / Serienparallel

Ein Graph G heißt außenplanar, wenn er eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt, in der alle Knoten an der äußeren Facette liegen. Zeigen Sie, dass jeder zweifach zusammenhängende außenplanare Graph serienparallel ist.

Aufgabe 4 – Sichtbarkeitsrepräsentation

Zeigen Sie, dass jeder serienparallele Graph eine Sichtbarkeits-repräsentation hat.