Exercise Sheet 7

Assignment: January 25, 2013
Delivery: None, Discussion on January 30, 2013

1 Metro Maps

(a) Beim Zeichnen von Metro Maps können neben Knickzahl, Kantenlänge und Erhaltung der relativen Lage andere Optimierungskriterien relevant sein. Modifizieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte ILP so, dass zusätzlich der Umfang der Bounding-Box bzw. die Breite bei festgelegter Höhe minimiert wird. Warum ist die Fläche der Zeichnung kein geeignetes Optimierungskriterium?

(b) Zur Minimierung der Knickkosten entlang von Metrolinien wurde folgende Kostenfunktion definiert:
$$\mathrm{cost}_{\mathrm{bend}} = \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{uv, vw \in L} \mathrm{bend}(u, v, w).$$
Dabei steigt die Kostenfunktion $\mathrm{bend}(u, v, w)$ mit steigendem Knickwinkel zwischen den Kanten uv und vw linear an $(45° : 1, 90° : 2, 135° : 3)$. Überlegen Sie sich, wie man diese Kostenfunktion im ILP-Modell umsetzen kann. Sie können dazu z.B. die für jede Kante uv definierte Richtungsvariable $\mathrm{dir}(u, v)$ verwenden. Wie lässt sich eine beliebige monoton steigende Kostenfunktion modellieren?

(c) Zur Minimierung der Kantenlänge wurde in der Vorlesung die folgende Kostenfunktion definiert:
$$\mathrm{cost}_{\mathrm{length}} = \sum_{\{u,v\} \in E} \mathrm{length}(\{u, v\})$$
Geben Sie lineare Nebenbedingungen an, die sicherstellen, dass die Variable $\mathrm{length}(\{u, v\})$ der Länge der Kante $\{u, v\}$ bezüglich der Normen L_1, L_∞ und L_2 entspricht. Verwenden sie dazu nur die Positionen $(x(u), y(u))$ und $(x(v), y(v))$ von u bzw. v.

2 Extended Canonical Ordering for 4-Connected Graphs

A planar graph $G = (V, E)$ is called *proper triangular planar* (PTP, for short) if the following coditions hold:

- Every interior face of G is a triangle and the exterior face of G is a quadrangle;
- G has no separating triangles.

Let $G = (V, E)$ be a PTP graph with vertices a, b, c, d on the outer face. A labeling $v_1 = a, v_2 = c, v_3, \ldots, v_n = d$ of the vertices of G is called an *extended canonical ordering* of G if for every $4 \le k \le n$:

- The subgraph G_{k-1} induced by $v_1, \ldots, v_{k-1}$ is biconnected and the boundary C_{k-1} of G_{k-1} contains the edge (a, b);
- v_k is in the exterior face of G_{k-1}, and its neighbors in G_{k-1} form (at least 2-element) subinterval of the path $C_{k-1} \setminus (a, b)$. If $k \leq k-2$, v_k has at least 2 neighbors in $G \setminus G_{k-1}$.

Let $G = (V, E)$ be a PTP graph with vertices a, b, c, d on the outer face.

(a) Prove that the graph obtained from G by removal of vertices c, d and all edges incident to them is biconnected.
(b) Let $C = \{a = u_1, \ldots, u_k = b, a\}$ be a simple cycle of G such that $c, d \notin C$. Let G_C denote the graph induced by the vertices of G laying inside C (including the vertices of C). Let $v_i \in C$, $2 \leq i \leq k-1$ such that no internal chord of C is incident to v_i. Show that $G \setminus \{v_i\}$ is biconnected.
(c) Let C be as above and let (v_i, v_j), $1 \leq i < j \leq k$, be an internal chord of C. Show that there exists a vertex v_l, $i < l < j$, which is adjacent to at least two vertices of $G \setminus G_C$.
(d) Using (a-c) prove that G has an extended canonical ordering such that $v_1 = a, v_2 = b, v_{n-1} = c, v_n = d$.

3 Construction of Regular Edge Labeling

Let $G = (V, E)$ be a PTP graphs and let $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be an extended canonical ordering of G. *Basis edge* of a vertex v_p is the edge (v_q, v_p) for which $q < p$ is minimal. Let $v_l \in V$ and let $v_{l_1}, \ldots, v_{l_t}$ (indicies are given according to their extended canonical ordering) be the vertices adjacent to v_l with $l_i > l$, $1 \leq i \leq t$.

(a) Prove that (v_l, v_{l_i}), $1 \leq i \leq t$, is the basis edge of v_{l_i}.
(b) Let $l_f = \max\{l_i | 1 \leq i \leq t\}$. Prove that $l_1 < l_2 < \cdots < l_f$ and $l_t > l_{t+1} > \ldots l_f$.

4 Property of a Path Decomposition

Let $G = (V, E)$ be a PTP graphs and consider the S-N net G_{S-N} and W-E net G_{W-E} of G, constructed from a regular edge labeling of G. Let $G^{\star}_{S-N}$ ($G^{\star}_{W-E}$) be the dual of G_{S-N} (resp. G_{W-E}). Let $f_1, \ldots, f_k$ be the faces of $G^{\star}_{S-N}$ (resp. $G^{\star}_{W-E}$), enumerated according to an *st*-numbering f_{sn} (resp. f_{we}). Let G^i_{S-N} (resp. G^i_{W-E}) denote the subgraph of G, induced by vertices and edges of $f_1, \ldots, f_i$. Denote by P_i (reps. Q_i) the right (resp. top) boundary of G^i_{S-N} (resp. G^i_{W-E}). Show that paths P_i and Q_j for any i, j (except for (a) $i = 0, j = 0$, (b) $i = \max f_{sn} - 1, j = 0$, (c) $i = 0, j = \max f_{we} - 1$, (d) $i = \max f_{sn} - 1, j = \max f_{we} - 1$) cross at exactly one vertex.