Algorithmen II
Vorlesung am 15.11.2012

Kreisbasen, Matroide & Algorithmen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Das Kreismatroid – Wiederholung

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Kreismatroid

Karlsruher Institut für Technologie

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$.
Dann bildet $(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ ein **Unabhängigkeitssystem**.

1. $\emptyset \in U$
2. $I_1 \in \mathcal{U}$, $I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$

Definition: Matroid
Ein Unabhängigkeitssystem $(M, \mathcal{U})$ heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Satz: Das Unabhängigkeitssystem $(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ ist ein Matroid, genannt Kreismatroid von G.

Folgt aus dem Austausschsatz von Steinitz (Übung).

Greedy-Lösung

In letzter Vorlesung gezeigt: Greedy-Methode optimal für Optimierungsprobleme auf Matroiden.

GREEDY-METHODE für MCB

Eingabe: Menge $\mathcal{C}$ aller Kreise in $G = (V, E)$.
Ausgabe: Kreisbasis minimalen Gewichts von G.

Sortiere $\mathcal{C}$ aufsteigend nach Gewicht zu $C_1, \dots, C_k$.

$\mathcal{B}^\star \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** k **do**
  if $\mathcal{B}^\star \cup \{C_i\}$ *linear unabhängig* **then**
    $B^\star \leftarrow B^\star \cup \{C_i\}$

Liefert optimale Lösung (siehe vorherige Vorlesung), allerdings ist die Anzahl der Kreise in einem Graphen im Allgemeinen exponentiell in $m + n$ (siehe Übung).

Idee: Versuche Kandidatenmenge mit polynomieller Größe zu finden.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Algorithmus von Horton

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

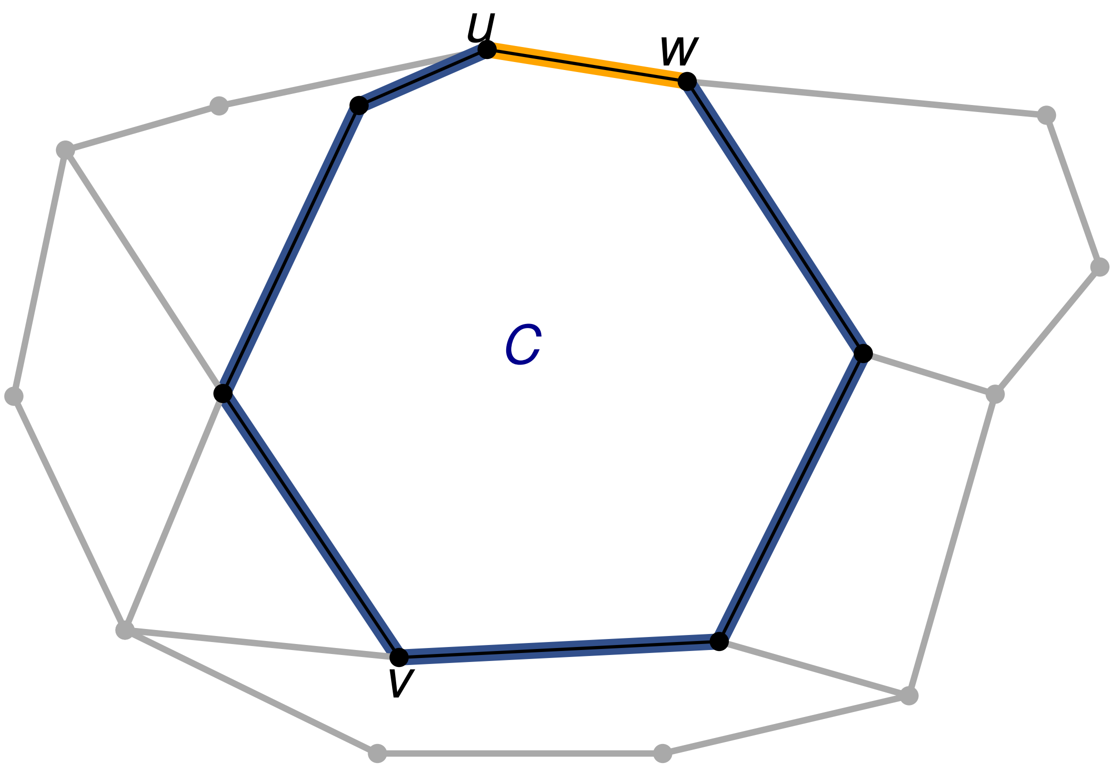
Algorithmus von Horton

Satz 5.7 Für jeden Kreis C aus einer MCB von G existiert zu jedem beliebigen Knoten v aus C eine Kante $\{u, w\}$ auf C, sodass gilt:

$$C = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\},$$

wobei $\mathrm{SP}(u, v)$ bzw. $\mathrm{SP}(w, v)$ ein kürzester Weg von u bzw. w nach v in G ist.

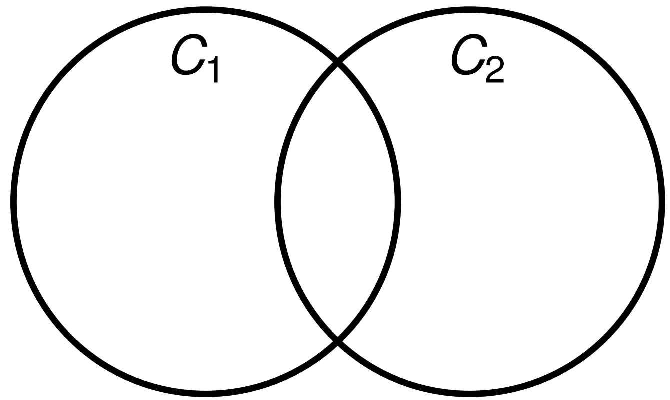
Beweis mithilfe der folgenden Lemmata.



Algorithmus von Horton

Lemma 5.8
Falls $\mathcal{B}$ eine Kreisbasis ist, $C \in \mathcal{B}$ und $C = C_1 \oplus C_2$, dann ist entweder $\mathcal{B} \setminus \{C\} \cup \{C_1\}$ oder $\mathcal{B} \setminus \{C\} \cup \{C_2\}$ wieder eine Kreisbasis.

Beweis:



$C = C_1 \oplus C_2$

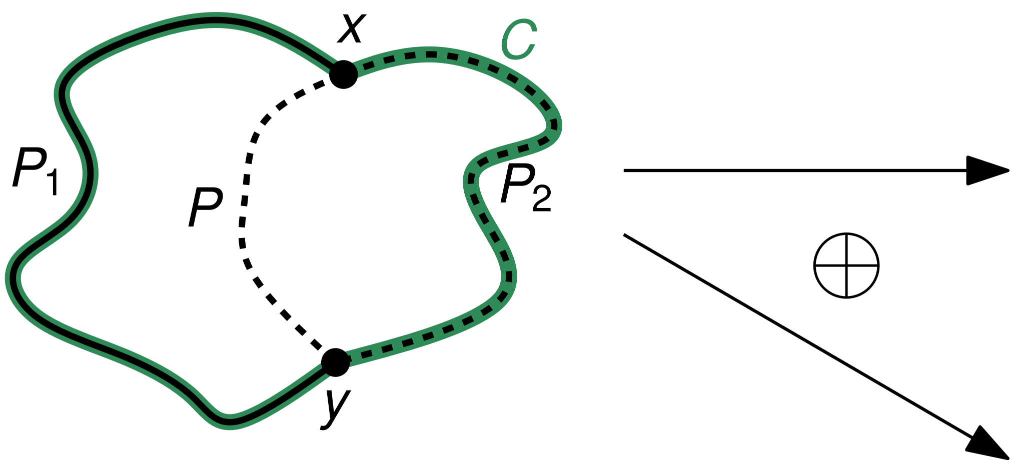
(i) Ist der Kreis C_1 darstellbar als Linearkombination von Kreisen aus $\mathcal{B} \setminus \{C\}$, so ist offenbar $\mathcal{B} \setminus \{C\} \cup \{C_2\}$ wieder eine Basis.

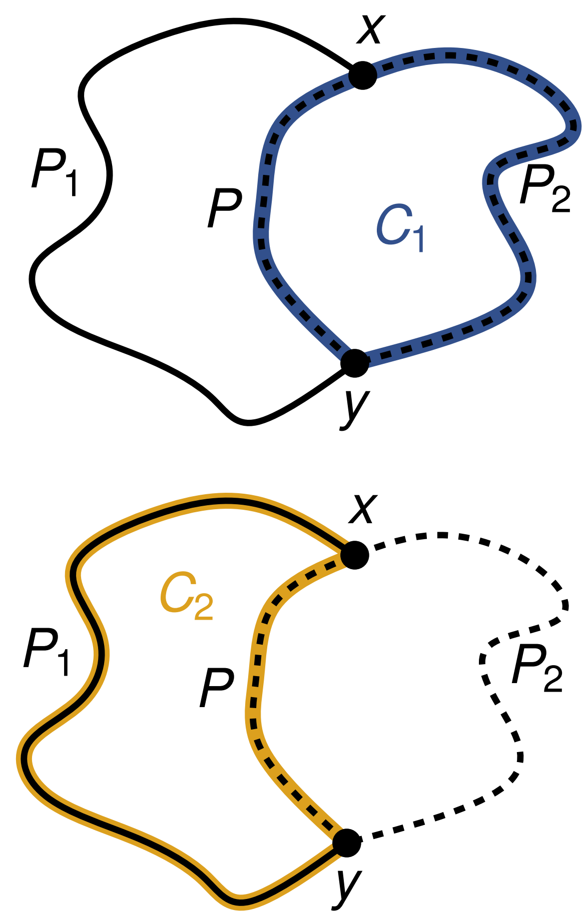
(ii) Ist der Kreis C_1 nur darstellbar als Linearkombination von C und Kreisen aus $\mathcal{B} \setminus \{C\}$, so ist C_2 darstellbar als Linearkombination von Kreisen aus $\mathcal{B} \setminus \{C\}$. Somit ist dann $\mathcal{B} \setminus \{C\} \cup \{C_1\}$ wieder eine Basis.

Algorithmus von Horton

Lemma 5.9
Sei $\mathcal{B}$ eine Kreisbasis von G. Für zwei Knoten $x, y \in V$ und einen Weg P in G von x nach y kann jeder Kreis $C \in \mathcal{B}$, der x und y enthält, ersetzt werden durch einen Kreis C', der P enthält.

Beweis:

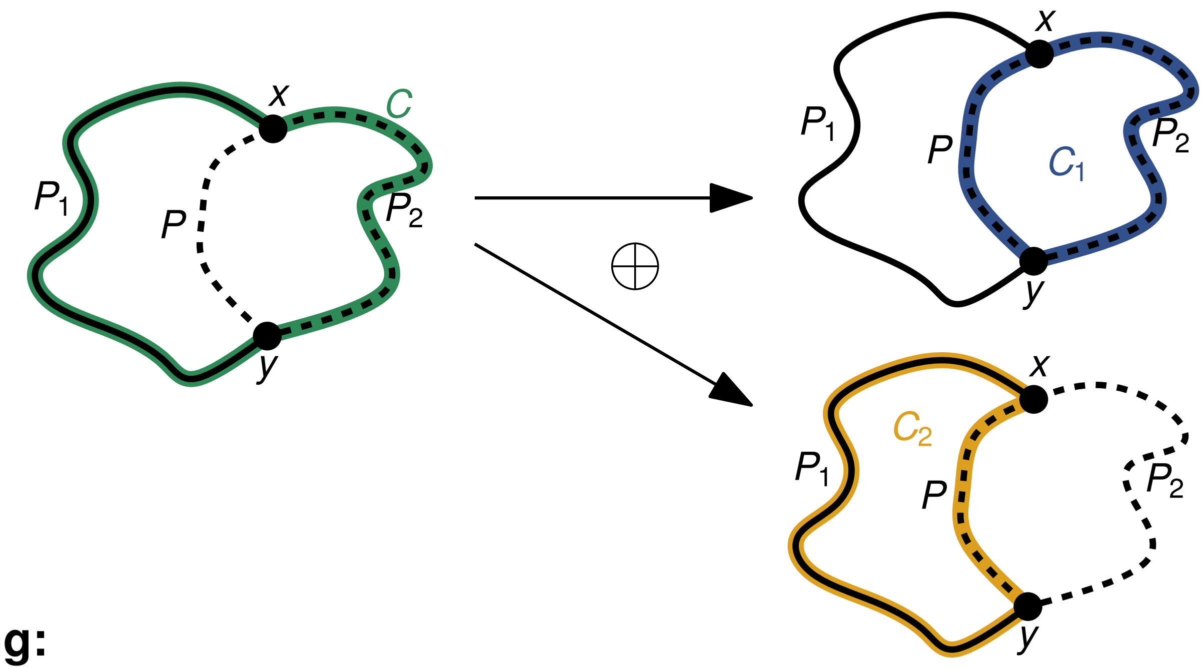




Es gilt $C = C_1 \oplus C_2$ und somit nach Lemma 5.8, dass entweder $\mathcal{B} \setminus \{C\} \cup \{C_1\}$ oder $\mathcal{B} \setminus \{C\} \cup \{C_2\}$ wieder eine Basis ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Algorithmus von Horton



Folgerung:
Seien weder P_1 noch P_2 kürzeste Wege zwischen x und y und sei P kürzester Weg zwischen x und y

$\Rightarrow$ $w(C_1) < w(C)$ und $w(C_2) < w(C)$

$\Rightarrow$ Jede Basis $\mathcal{B}$, die C enthält, kann in Basis $\mathcal{B}'$ umgewandelt werden, die anstatt C entweder C_1 oder C_2 enthält (Lemma 5.9).

$\Rightarrow$ $w(\mathcal{B}') < w(\mathcal{B})$

Wenn $\mathcal{B}$ eine MCB ist, dann enthält jeder Kreis in $\mathcal{B}$, der $x, y \in V$ enthält, auch einen kürzesten Weg zwischen x und y.

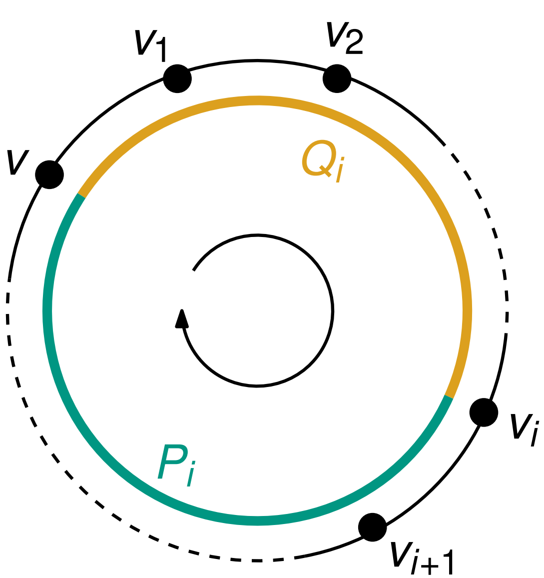
Algorithmus von Horton

Satz 5.7: Für jeden Kreis C aus einer MCB von G existiert zu jedem beliebigen Knoten v aus C eine Kante $\{u, w\}$ auf C, so dass gilt:

$$C = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\},$$

wobei $\mathrm{SP}(u, v)$ bzw. $\mathrm{SP}(w, v)$ ein kürzester Weg von u bzw. w nach v in G ist.

Beweis:



Betrachte beliebigen Kreis C der MCB, sowie einen belibiegen Knoten v auf C:

- Indizierung der Knoten auf Kreis sei $v = v_0, \ldots, v_\ell = v$.
- Q_i := Weg auf C von v nach v_i in Richtung der Indizierung.
- P_i := Weg auf C von v_i nach v in Richtung der Indizierung.

$\Rightarrow$ Entweder P_i oder Q_i ist kürzester Weg von v nach v_i (vorherige Folie).

- Sei i der größte Index, sodass Q_i kürzester Weg von v nach v_i ist.

$\Rightarrow$ $C = Q_i \oplus \{v_i, v_{i+1}\} \oplus P_{i+1}$ ist gewünschte Darstellung.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Algorithmus von Horton

Algorithmus von Horton für MCB

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: Kreisbasis minimalen Gewichts von G.

$\mathcal{H} \leftarrow \emptyset$

for $v \in V$ *und* $\{u, w\} \in E$ **do**

  Berechne $C_v^{uw} := SP(u, v) + SP(w, v) + \{u, w\}$

  if C_v^{uw} *ist einfach* **then**

    $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} \cup \{C_v^{uw}\}$

Sortiere Elemente aus $\mathcal{H}$ aufsteigend zu $C_1, \ldots, C_k$

$\mathcal{B}^\star \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** k **do**

  if $\mathcal{B}^\star \cup \{C_i\}$ *linear unabhängig* **then**

    $B^\star \leftarrow B^\star \cup \{C_i\}$

Algorithmus von Horton

Algorithmus von Horton für MCB

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: Kreisbasis minimalen Gewichts von G.

$\mathcal{H} \leftarrow \emptyset$

for $v \in V$ *und* $\{u, w\} \in E$ **do** — $\mathcal{O}(n \cdot m)$, weil $|\mathcal{H}| \leq m \cdot n$ wobei $m \in \mathcal{O}(n^2)$

  Berechne $C_v^{uw} := SP(u, v) + SP(w, v) + \{u, w\}$

  if C_v^{uw} *ist einfach* **then**

    $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} \cup \{C_v^{uw}\}$

Sortiere Elemente aus $\mathcal{H}$ aufsteigend zu $C_1, \ldots, C_k$ — $\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log n)$

$\mathcal{B}^\star \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** k **do** — $\mathcal{O}(m^3 \cdot n)$

  if $\mathcal{B}^\star \cup \{C_i\}$ *linear unabhängig* **then** — $\mathcal{O}(m^2)$

    $B^\star \leftarrow B^\star \cup \{C_i\}$

$\rightarrow |B^\star| \leq m - n + \mathcal{K}(G)$

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(m^3 \cdot n)$

Algorithmus von de Pina

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Algorithmus von de Pina

Sei T ein aufspannender Baum (bzw. Wald) in G und $e_1, \ldots, e_N$ die Nichtbaumkanten aus $G \setminus T$ in einer beliebigen Ordnung, wobei gilt $N = m - n + \mathcal{K}(G)$.

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: MCB von G

for $j = 1$ *bis* N **do**

  Initialisiere $S_{1,j} \leftarrow \{e_j\}$

for $k = 1$ *bis* N **do**

  Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält

  for $j = k + 1$ *bis* N **do**

$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Ausgabe ist: $\{C_1, \ldots, C_N\}$

Algorithmus von de Pina

Sei T ein aufspannender Baum (bzw. Wald) in G und $e_1, \dots, e_N$ die Nichtbaumkanten aus $G \setminus T$ in einer beliebigen Ordnung, wobei gilt $N = m - n + \mathcal{K}(G)$.

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: MCB von G

for $j = 1$ *bis* N **do** $\qquad \mathcal{O}(m)$
  Initialisiere $S_{1,j} \leftarrow \{e_j\}$

for $k = 1$ *bis* N **do** $\qquad \mathcal{O}(m^3 + c \cdot m)$
  Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält
  for $j = k + 1$ *bis* N **do**

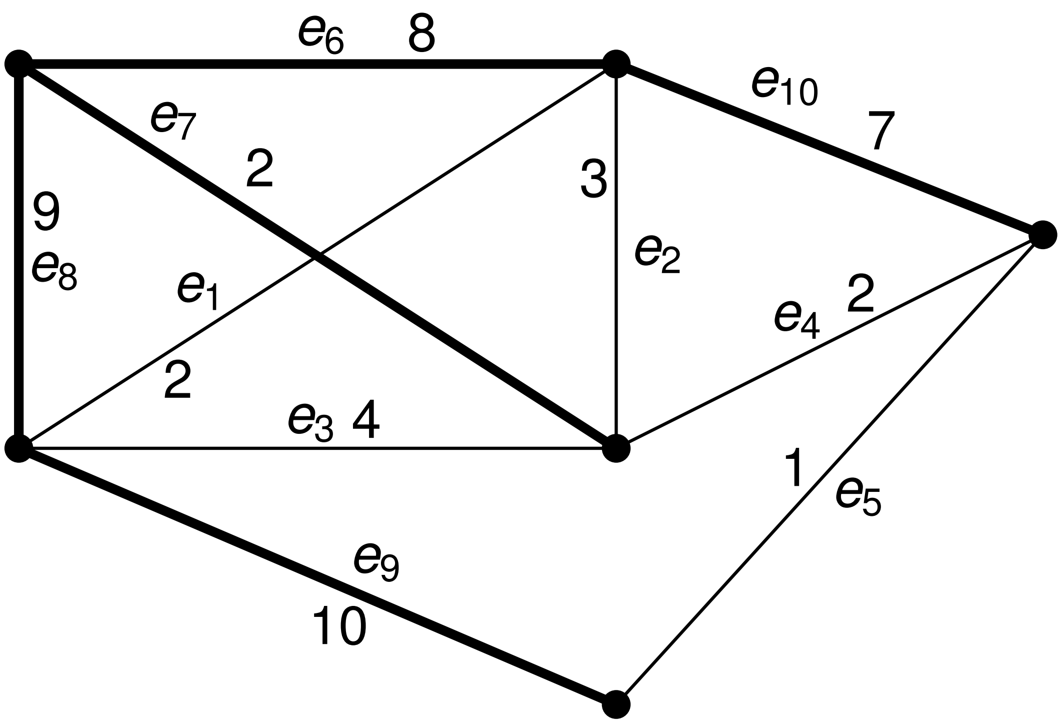
$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Ausgabe ist: $\{C_1, \dots, C_N\}$

Annahme: Berechnung von C_k kann in $\mathcal{O}(c)$ durchgeführt werden.
Es gilt (ohne Beweis): $c \in \mathcal{O}(m^2 + n^2 \log n)$

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(m^3 + m \cdot n^2 \log n)$
vgl. Horton: $\mathcal{O}(m^3 \cdot n)$

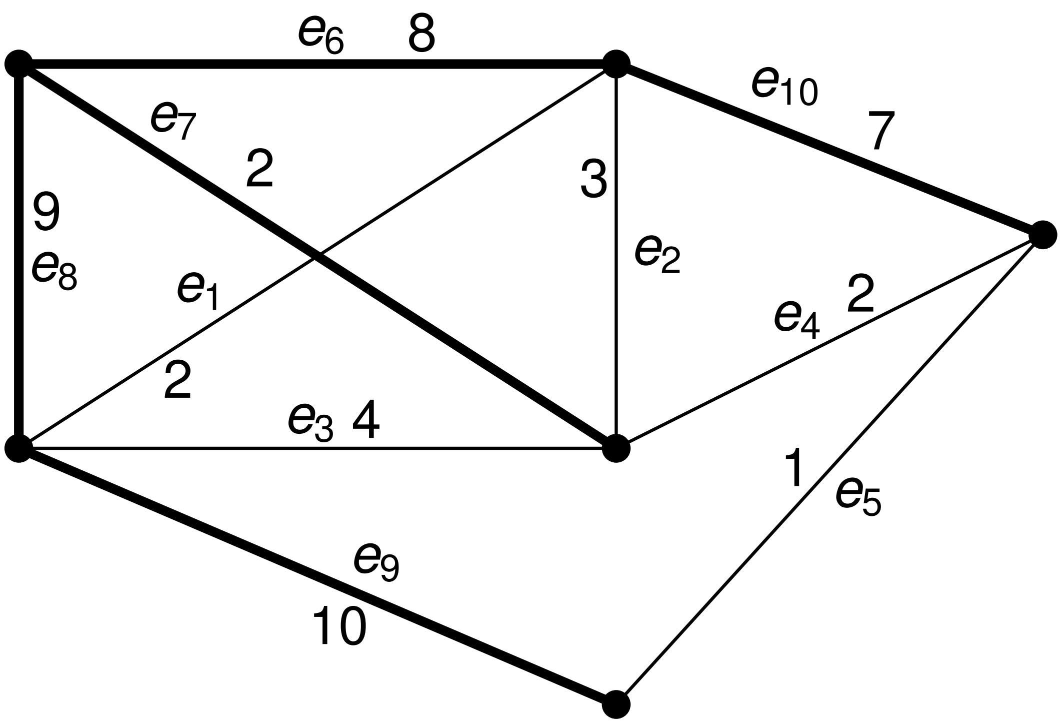
Beispiel



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beispiel

KIT
Karlsruher Institut für Technologie



Initialisierung:

for j = 1 *bis* N **do**
  Initialisiere $S_{1,j} \leftarrow \{e_j\}$

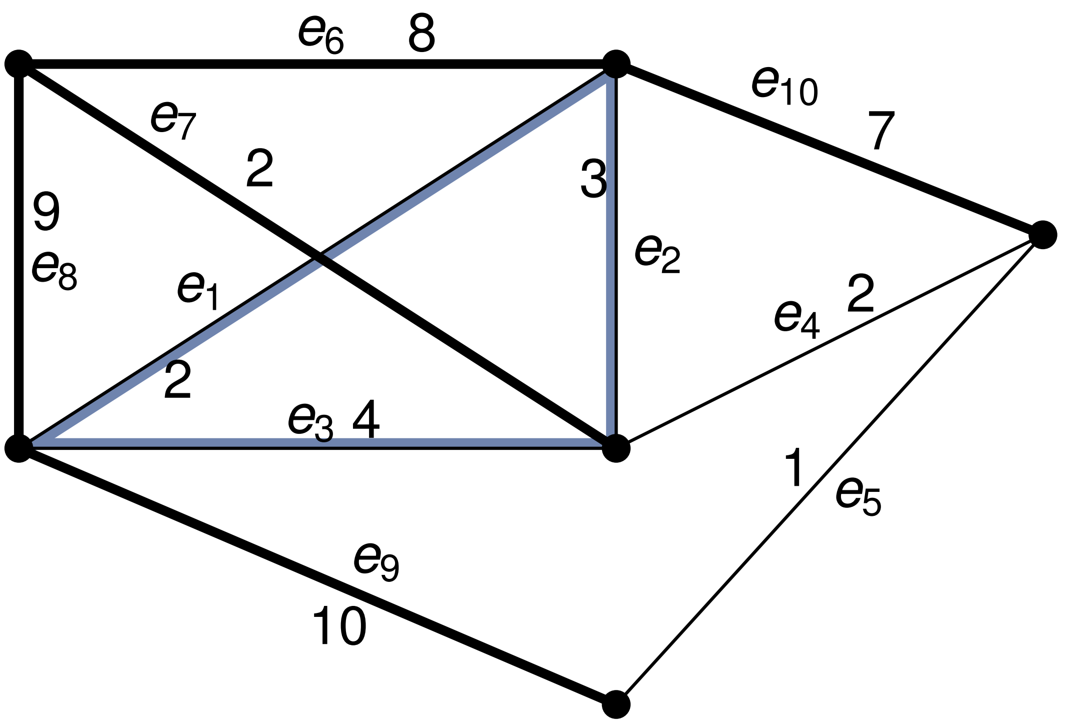
Ergebnis:

$S_{1,1} = \{e_1\}$, $S_{1,2} = \{e_2\}$, $S_{1,3} = \{e_3\}$,
$S_{1,4} = \{e_4\}$, $S_{1,5} = \{e_5\}$

Beispiel

$S_{1,1} = \{e_1\}$, $S_{1,2} = \{e_2\}$, $S_{1,3} = \{e_3\}$,
$S_{1,4} = \{e_4\}$, $S_{1,5} = \{e_5\}$

Karlsruher Institut für Technologie



$\mathbf{k} = 1$: $S_{2,2} := S_{1,2} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_2\}$

$S_{2,3} := S_{1,3} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_3\}$

$S_{2,4} := \{e_4\}$

$S_{2,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_1) = 9$

for $k = 1$ *bis* N **do**

Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält

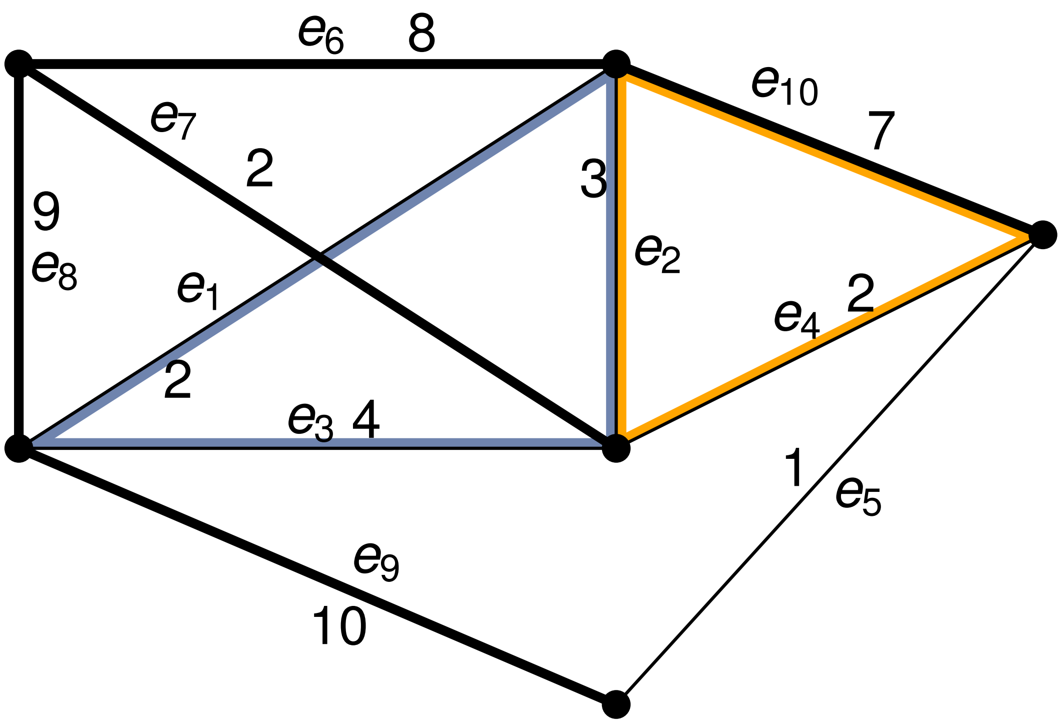
for $j = k + 1$ *bis* N **do**

$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beispiel

$S_{1,1} = \{e_1\}$, $S_{1,2} = \{e_2\}$, $S_{1,3} = \{e_3\}$,
$S_{1,4} = \{e_4\}$, $S_{1,5} = \{e_5\}$



k = 1: $S_{2,2} := S_{1,2} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_2\}$

$S_{2,3} := S_{1,3} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_3\}$

$S_{2,4} := \{e_4\}$

$S_{2,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_1) = 9$

k = 2: $S_{3,3} := S_{2,3} = \{e_1, e_3\}$

$S_{3,4} := S_{2,2} \oplus S_{2,4} = \{e_1, e_2, e_4\}$

$S_{3,5} := S_{2,5} = \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_2) = 12$

for $k = 1$ *bis* N **do**

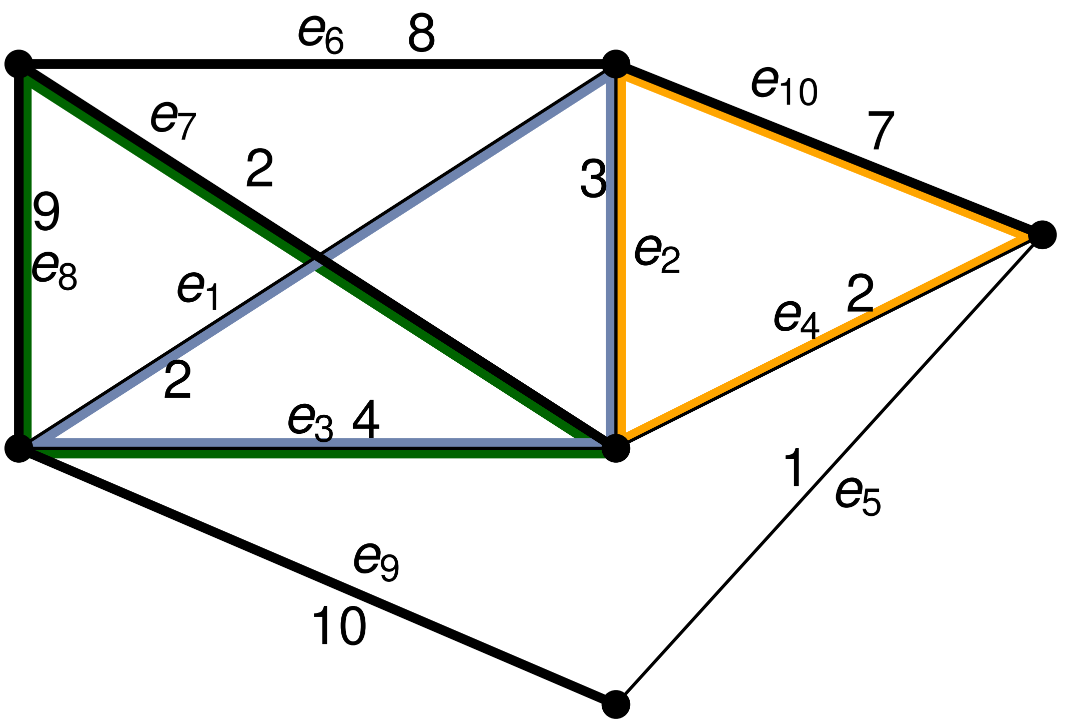
Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält

for $j = k + 1$ *bis* N **do**

$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Beispiel

$S_{1,1} = \{e_1\}$, $S_{1,2} = \{e_2\}$, $S_{1,3} = \{e_3\}$,
$S_{1,4} = \{e_4\}$, $S_{1,5} = \{e_5\}$



k $= 1$: $S_{2,2} := S_{1,2} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_2\}$

$S_{2,3} := S_{1,3} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_3\}$

$S_{2,4} := \{e_4\}$

$S_{2,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_1) = 9$

k $= 2$: $S_{3,3} := S_{2,3} = \{e_1, e_3\}$

$S_{3,4} := S_{2,2} \oplus S_{2,4} = \{e_1, e_2, e_4\}$

$S_{3,5} := S_{2,5} = \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_2) = 12$

k $= 3$: $S_{4,4} := \{e_1, e_2, e_4\}$

$S_{4,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_3) = 15$

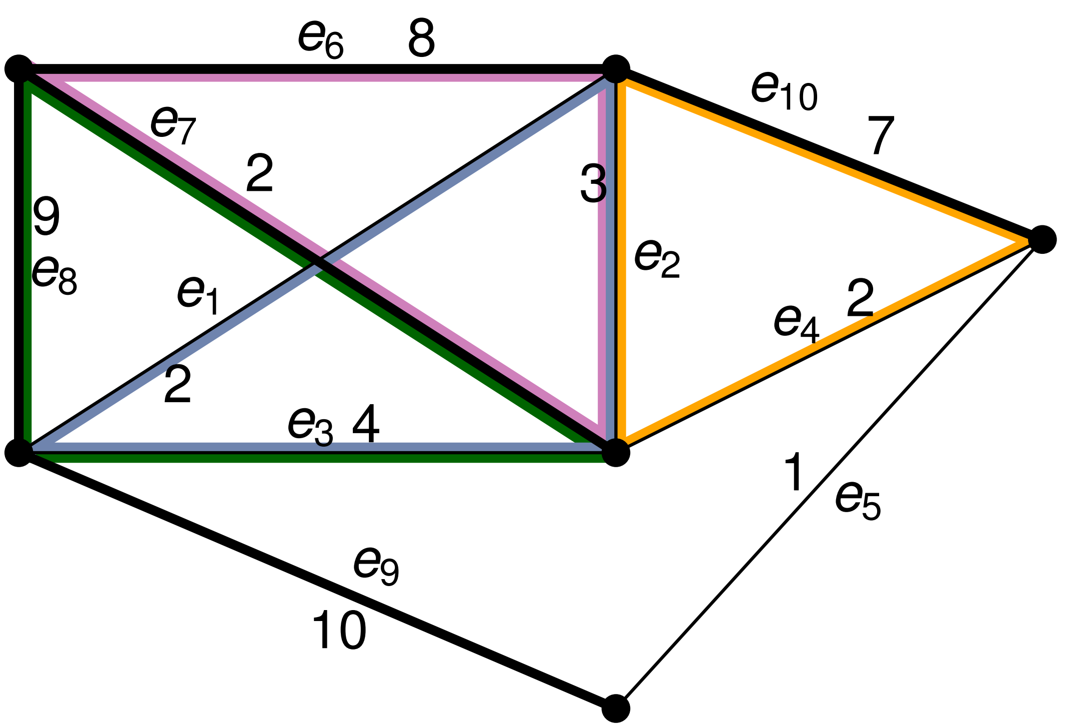
for $k = 1$ *bis* N **do**
  Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält
  for $j = k + 1$ *bis* N **do**

$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beispiel

$S_{1,1} = \{e_1\}$, $S_{1,2} = \{e_2\}$, $S_{1,3} = \{e_3\}$,
$S_{1,4} = \{e_4\}$, $S_{1,5} = \{e_5\}$



k = 1: $S_{2,2} := S_{1,2} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_2\}$
$S_{2,3} := S_{1,3} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_3\}$
$S_{2,4} := \{e_4\}$
$S_{2,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_1) = 9$

k = 2: $S_{3,3} := S_{2,3} = \{e_1, e_3\}$
$S_{3,4} := S_{2,2} \oplus S_{2,4} = \{e_1, e_2, e_4\}$
$S_{3,5} := S_{2,5} = \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_2) = 12$

k = 3: $S_{4,4} := \{e_1, e_2, e_4\}$
$S_{4,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_3) = 15$

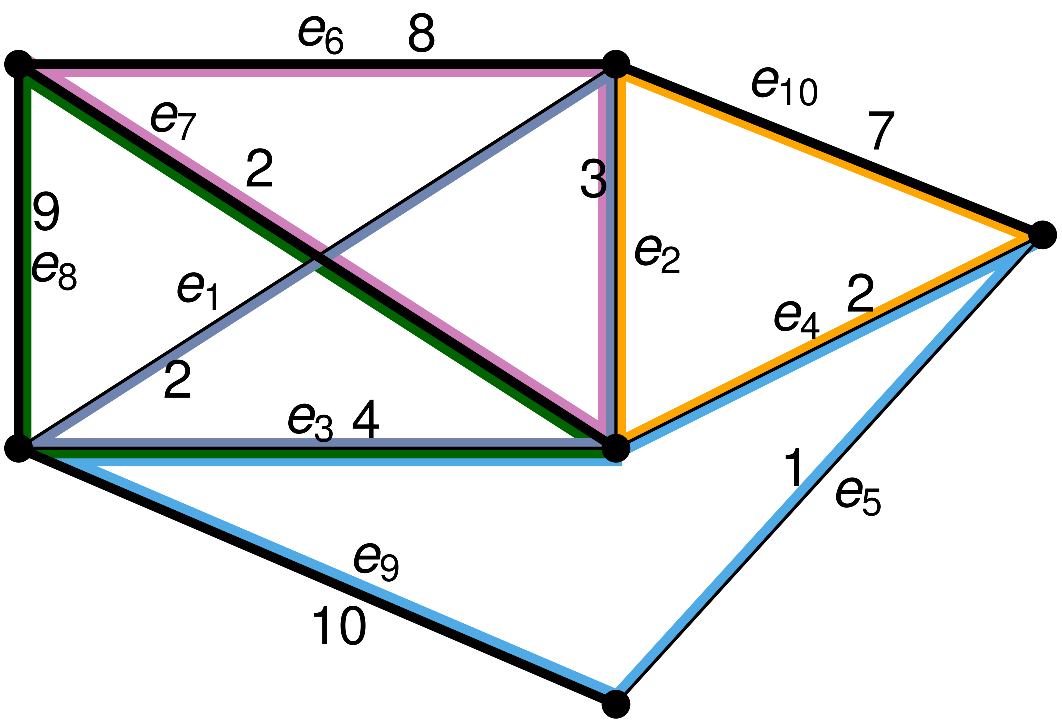
k = 4: $S_{5,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_4) = 13$

for $k = 1$ *bis* N **do**
  Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält
  for $j = k + 1$ *bis* N **do**

$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Beispiel

$S_{1,1} = \{e_1\}$, $S_{1,2} = \{e_2\}$, $S_{1,3} = \{e_3\}$,
$S_{1,4} = \{e_4\}$, $S_{1,5} = \{e_5\}$



k = 1: $S_{2,2} := S_{1,2} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_2\}$

$S_{2,3} := S_{1,3} \oplus S_{1,1} = \{e_1, e_3\}$

$S_{2,4} := \{e_4\}$

$S_{2,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_1) = 9$

k = 2: $S_{3,3} := S_{2,3} = \{e_1, e_3\}$

$S_{3,4} := S_{2,2} \oplus S_{2,4} = \{e_1, e_2, e_4\}$

$S_{3,5} := S_{2,5} = \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_2) = 12$

k = 3: $S_{4,4} := \{e_1, e_2, e_4\}$

$S_{4,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_3) = 15$

k = 4: $S_{5,5} := \{e_5\}$ $\quad w(\mathbf{C}_4) = 13$

k = 5: $\quad w(\mathbf{C}_5) = 17$

for $k = 1$ *bis* N **do**
- Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält
- **for** $j = k + 1$ *bis* N **do**
  - $$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Korrektheit des Algorithmus von de Pina

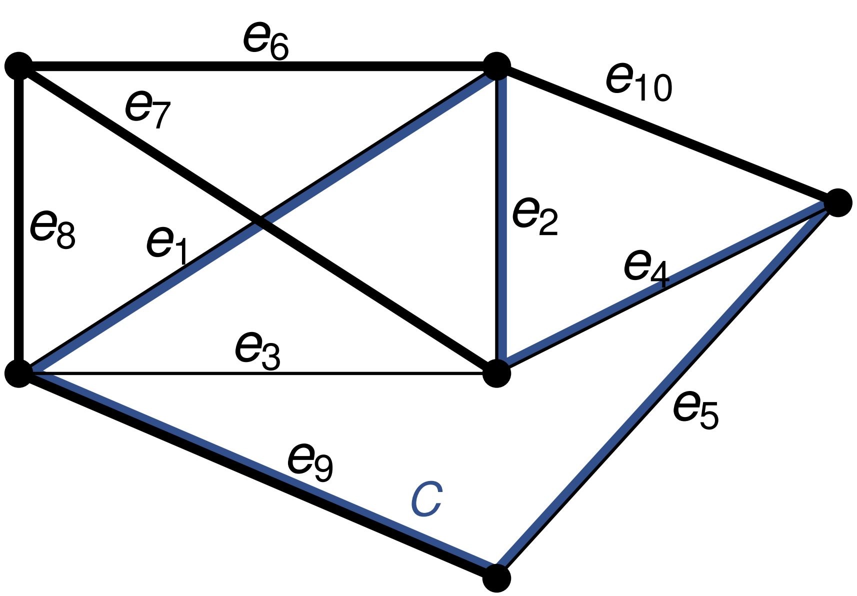
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Vektorenschreibweise

Betrachte algebraische Interpretation des Algorithmus:

Betrachte Kreise als Inzidenzvektoren über E mit Einschränkung auf die Nichtbaumkanten $\{e_1, \ldots, e_N\}$.

Beispiel: Kreise werden mithilfe der Nichtbaumkanten e_1, e_2, e_3, e_4 und e_5 beschrieben.



$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ \\ \vdots \\ \\ e_5 \end{array}$$

Kreis C kann mithilfe der Fundamentalkreise C_i (C_i=Fundamentalkreis der Nichtbaumkante e_i) rekonstruiert werden.

$$C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus C_5$$

Bilinearform

Karlsruher Institut für Technologie

for $k = 1$ *bis* N **do**

Finde einen kürzesten Kreis C_k, der eine ungerade Anzahl von Kanten aus $S_{k,k}$ enthält

for $j = k + 1$ *bis* N **do**

$$S_{k+1,j} \leftarrow \begin{cases} S_{k,j} & \text{, falls } C_k \text{ eine gerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \\ S_{k,j} \oplus S_{k,k} & \text{, falls } C_k \text{ eine ungerade Anzahl Kanten aus } S_{k,j} \text{ enthält} \end{cases}$$

Betrachte $S_{k,k}$ nach k-ten Durchlauf ebenfalls als Vektor über $\{e_1, \ldots, e_N\}$, der Menge der Nichtbaumkanten.

Definiere Bilinearform zweier Vektoren C und S: $\langle C, S\rangle := \sum_{i=1}^{N}(c_i \cdot s_i)$

Produkt und Summe sind über GF(2) definiert.

C und S sind *orthogonal* zueinander genau dann, wenn $\langle C, S\rangle = 0$.

$\langle C, S\rangle = 1$ genau dann, wenn C eine ungerade Anzahl Einträge mit S gemeinsam hat.

Algebraische Variante

Karlsruher Institut für Technologie

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: MCB von G

for $i = 1$ *bis* N **do**
  $S_i \leftarrow \{e_i\}$

for $k = 1$ *bis* N **do**
  Finde einen kürzesten Kreis C_k mit $\langle C_k, S_k \rangle = 1$
  for $i = k + 1$ *bis* N **do**
    if $\langle C_k, S_i \rangle = 1$ **then**
      $S_i \leftarrow S_i \oplus S_k$

Ausgabe ist: $\{C_1, \ldots, C_N\}$

Hinweis: Schreibe S_k abkürzend für $S_{k,k}$

Lemma 5.12 Die zweite äußere Schleife des Algorithmus erhält die Invariante $\langle C_i, S_{j+1} \rangle = 0$ für alle i, $1 \leq i \leq j \leq N$.

Vereinfachende Schreibweise

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: MCB von G

$S_1 \leftarrow \{e_1\}$

$C_1 \leftarrow$ kürzester Kreis mit $\langle C_1, S_1 \rangle = 1$

for $k = 2$ *bis* N **do**

> Berechne beliebigen Vektor S_k, der eine nichttriviale Lösung des Systems $\langle C_i, X \rangle = 0$ für $i = 1$ bis $k - 1$ ist.
>
> Finde einen kürzesten Kreis C_k mit $\langle C_k, S_k \rangle = 1$.

Ausgabe ist: $\{C_1, \ldots, C_N\}$

Satz 5.13

Der Algorithmus SIMPLE MCB berechnet eine MCB.

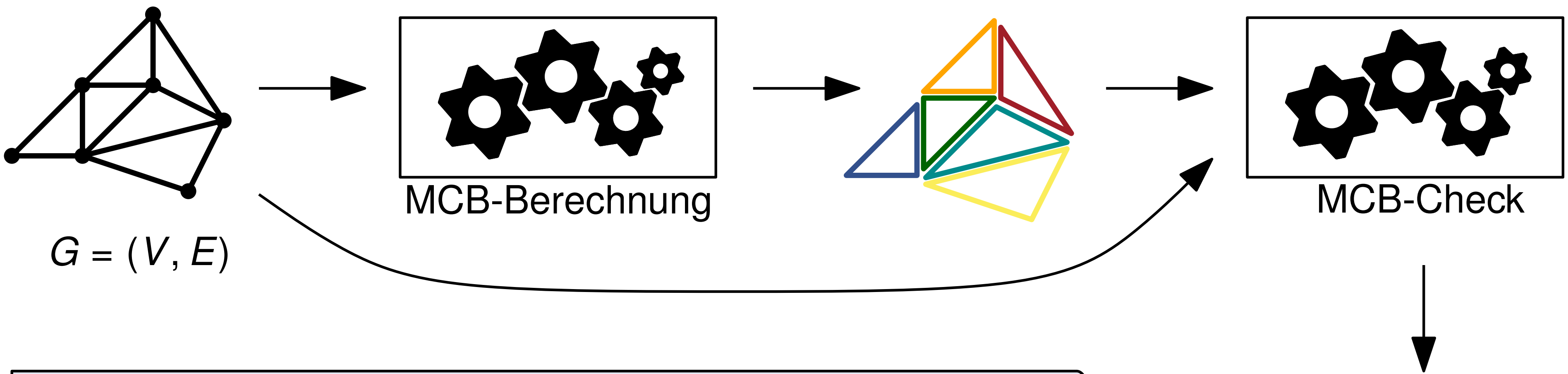
Bemerkungen

- Die Laufzeit kann auf $\mathcal{O}(m^2 \cdot n + m \cdot n^2 \cdot \log n)$ reduziert werden.
- Empirische Verbesserung: *Verheiratung* von Horton und de Pina.
  - Berechne Kandiatenmenge $\mathcal{H}$ von Horton.
  - Suche kürzesten Kreis C_k ausschließlich in dieser Kandiatenmenge $\rightarrow$ Lösungsraum wird verkleinert.
- Algorithmus von Horton kann mithilfe schneller Matrix-Multiplikation auf eine Laufzeit $\mathcal{O}(m^\omega n)$ reduziert werden (Bekannt: $\omega < 2.376$).

Zertifikat für MCB

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zertifikat



Problem: Zertifikat für MCB-Algorithmus
Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ und eine Menge von Kreisen $\mathcal{A}$ von G. Gib ein Zertifikat dafür an, dass $\mathcal{A}$ eine MCB von G ist.

Zertifikat

Die gegebenen Kreise bilden eine

minimale Kreisbasis

in $G = (V, E)$.

Zertifikat-Erstellung

Karlsruher Institut für Technologie

MCB-CHECKER

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Kreise $C_1, \dots C_N$

Ausgabe: Zertifikat zur Prüfung, ob $C_1, \dots C_N$ eine MCB von G sind.

1. Berechne aufspannenden Wald T, dabei seien $\{e_1, \dots, e_N\}$ die Nichtbaumkanten.
2. Definiere $A := (C_1 \dots C_N)$ als $N \times N$-Matrix, deren i-te Spalte der Inzidenzvektor von C_i mit $\{e_1, \dots, e_N\}$ ist.
3. Berechne A^{-1}.

- A ist genau dann invertierbar, wenn $C_1, \dots, C_N$ linear unabhängig.
- $S_1, \dots, S_N$ von A^{-1} bilden das Zertifikat.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zertifikat-Erstellung

MCB-CHECKER

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Kreise $C_1, \dots C_N$

Ausgabe: Zertifikat zur Prüfung, ob $C_1, \dots C_N$ eine MCB von G sind.

1. Berechne aufspannenden Wald T, dabei seien $\{e_1, \dots, e_N\}$ die Nichtbaumkanten.
2. Definiere $A := (C_1 \dots C_N)$ als $N \times N$-Matrix, deren i-te Spalte der Inzidenzvektor von C_i mit $\{e_1, \dots, e_N\}$ ist.
3. Berechne A^{-1}.

- A ist genau dann invertierbar, wenn $C_1, \dots, C_N$ linear unabhängig.
- $S_1, \dots, S_N$ von A^{-1} bilden das Zertifikat.

Lemma 5.16 Seien $S_1, \dots, S_N$ und $C_1, \dots, C_N$ linear unabhängig. Falls C_i ein kürzester Kreis mit $\langle S_i, C_i \rangle = 1$ für alle $1 \leq i \leq N$ ist, dann ist $C_1, \dots, C_N$ eine MCB.
Allgemeiner: für die Matrix mit Spalten $A_1 \dots A_N$, wobei A_i jeweils ein kürzester Kreis mit $\langle S_i, A_i \rangle = 1$ ist, gilt: $\sum_{i=1}^{N} w(A_i) \leq w(\mathcal{B})$ für jede Kreisbasis $\mathcal{B}$.