

Algorithmen II

Vorlesung am 08.11.2012

Kreisbasen, Matroide & Greedy Algorithmen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

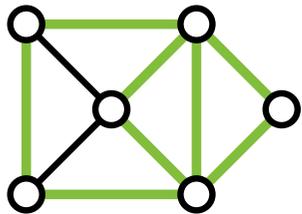


Kreisbasen

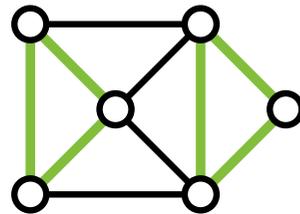
Definition: Kreis

(Definition 5.1)

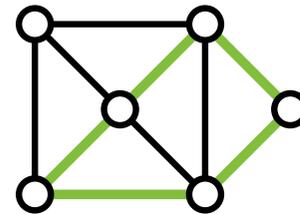
Ein Teilgraph $C = (V_C, E_C)$ von $G = (V, E)$ (d.h. $V_C \subseteq V, E_C \subseteq E$) heißt *Kreis* in G , falls alle Knoten aus V_C in C geraden Grad haben. Falls C zusammenhängend ist und alle Knoten aus V_C Grad zwei haben, so heißt C *einfacher Kreis*.



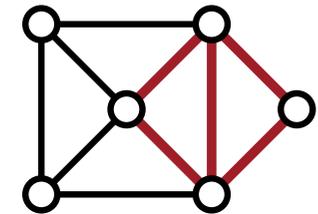
Kreis



Kreis



einfacher Kreis

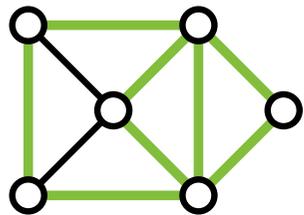


kein Kreis

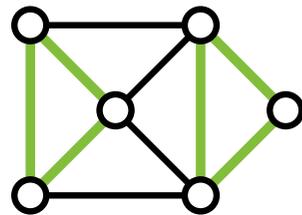
Definition: Kreis

(Definition 5.1)

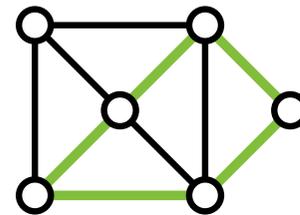
Ein Teilgraph $C = (V_C, E_C)$ von $G = (V, E)$ (d.h. $V_C \subseteq V, E_C \subseteq E$) heißt *Kreis* in G , falls alle Knoten aus V_C in C geraden Grad haben. Falls C zusammenhängend ist und alle Knoten aus V_C Grad zwei haben, so heißt C *einfacher Kreis*.



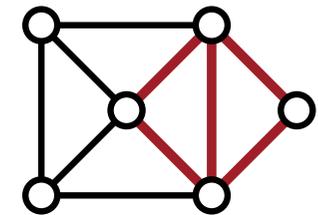
Kreis



Kreis



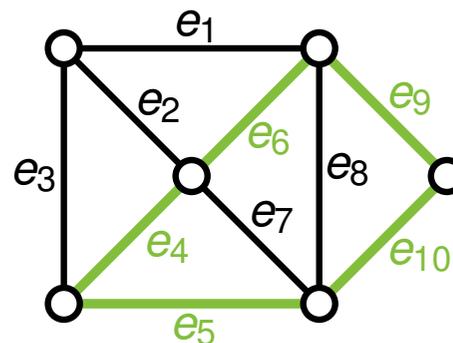
einfacher Kreis



kein Kreis

Fasse Kreis als Kantenmenge $E' \subseteq E = \{e_1, \dots, e_m\}$ auf und kodiere E' als Vektor $X^{E'}$ mit

$$X_i^{E'} := \begin{cases} 1, & \text{falls } e_i \in E' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



$$X^{E'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{matrix}$$

Definition: Kreisraum

Sei \mathcal{C} die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$. Dann induziert \mathcal{C} den Vektorraum der Vektoren X^c , $c \in \mathcal{C}$ über dem Körper $GF(2)$, genannt *Kreisraum* von G .

Erinnerung: $GF(2)$ ist der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$ und den Verknüpfungen $+$ und \cdot mit

$+$	0	1	\cdot	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Definition: Kreisraum

Sei \mathcal{C} die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$. Dann induziert \mathcal{C} den Vektorraum der Vektoren $X^c, c \in \mathcal{C}$ über dem Körper $GF(2)$, genannt *Kreisraum* von G .

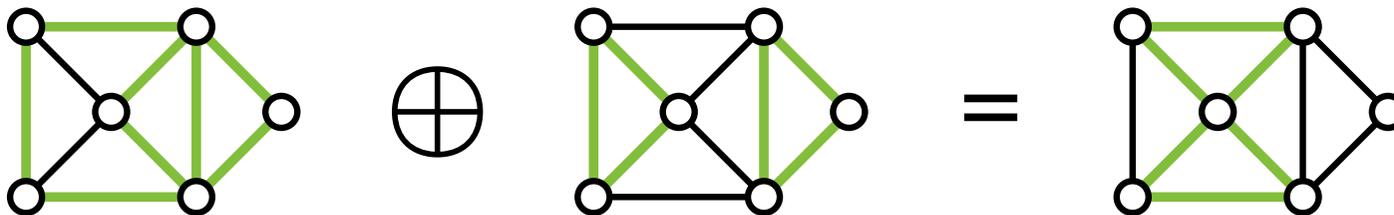
Erinnerung: $GF(2)$ ist der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$ und den Verknüpfungen $+$ und \cdot mit

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

Definition: Summe von Kreisen – symmetrische Differenz

Die Addition im Kreisraum von G induziert eine Operation \oplus auf \mathcal{C} durch $c_1 \oplus c_2 = (E_{c_1} \cup E_{c_2}) \setminus (E_{c_1} \cap E_{c_2})$. Dies ist die *symmetrische Differenz* beider Kantenmengen.



Ist wieder ein Kreis!

- Die Begriffe *Dimension des Kreisraums*, *linear unabhängige* bzw. *abhängige* Menge von Kreisen sowie der Begriff der *Kreisbasis* ergeben sich in kanonischer Weise.

- Die Begriffe *Dimension des Kreisraums*, *linear unabhängige* bzw. *abhängige* Menge von Kreisen sowie der Begriff der *Kreisbasis* ergeben sich in kanonischer Weise.

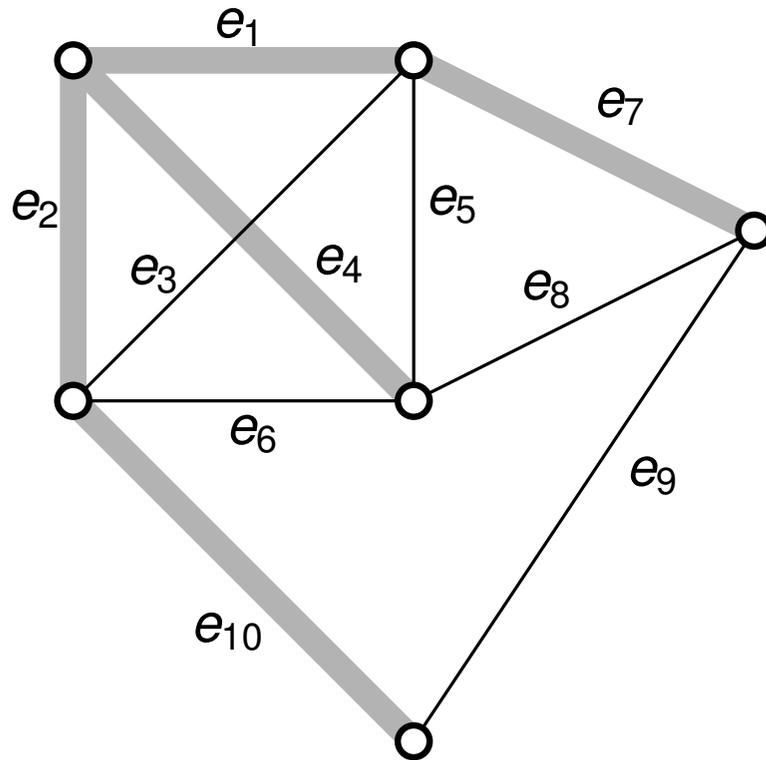
- Man kann eine Kreisbasis wie folgt erhalten:
 - (i) Betrachte aufspannenden Baum T von G (bzw. aufspannenden Wald, falls G unzusammenhängend ist).
 - (ii) Für jede Nichtbaumkante $e_i = \{u, v\} \in E$ sei $C_i = P(u, v) \cup \{\{u, v\}\}$ der *Fundamentalkreis* zu e_i , wobei $P(u, v)$ der einfache Weg von u zu v in T ist.
 - (iii) Die Menge aller Fundamentalkreise heißt *Fundamentalebasis* zu T und ist eine Kreisbasis.

- Die Begriffe *Dimension des Kreisraums*, *linear unabhängige* bzw. *abhängige* Menge von Kreisen sowie der Begriff der *Kreisbasis* ergeben sich in kanonischer Weise.

- Man kann eine Kreisbasis wie folgt erhalten:
 - (i) Betrachte aufspannenden Baum T von G (bzw. aufspannenden Wald, falls G unzusammenhängend ist).
 - (ii) Für jede Nichtbaumkante $e_i = \{u, v\} \in E$ sei $C_i = P(u, v) \cup \{\{u, v\}\}$ der *Fundamentalkreis* zu e_i , wobei $P(u, v)$ der einfache Weg von u zu v in T ist.
 - (iii) Die Menge aller Fundamentalkreise heißt *Fundamentalebasis* zu T und ist eine Kreisbasis.

- Die Dimension des Kreisraums von $G = (V, E)$ ist $m - n + \mathcal{K}(G)$, wobei $n = |V|$, $m = |E|$ und $\mathcal{K}(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in G ist.

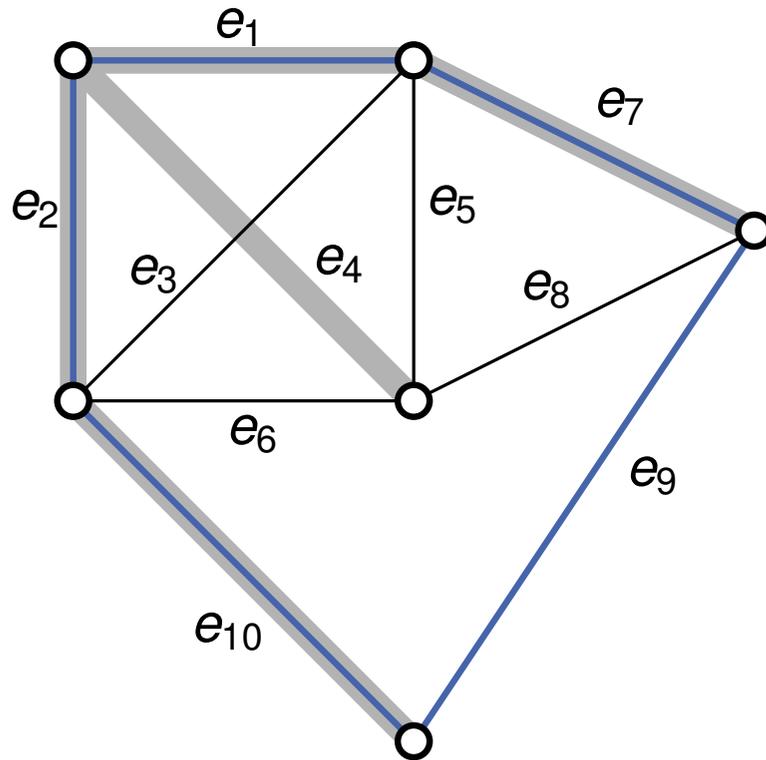
Beispiel



Spannbaum T :



Beispiel

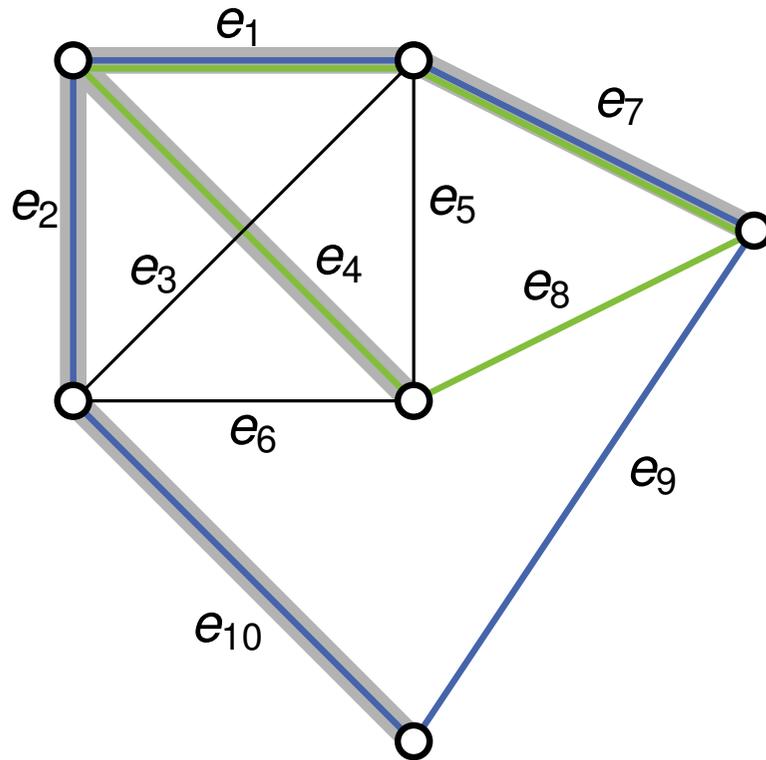


Spannbaum T :

Kante e_9 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_9 - e_{10} - e_2$

Beispiel



Spannbaum T :

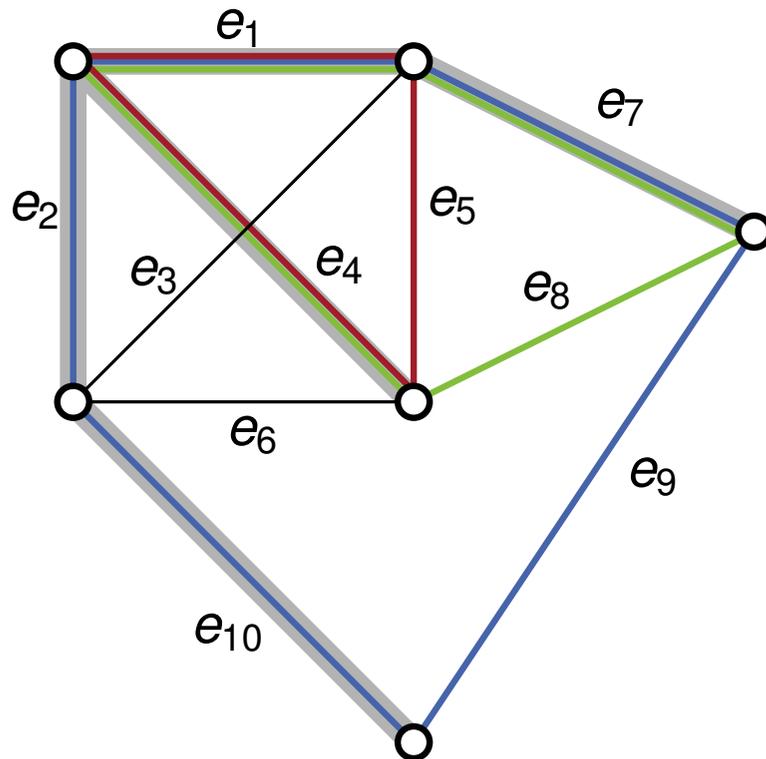
Kante e_9 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_9 - e_{10} - e_2$

Kante e_8 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_8 - e_4$

Beispiel



Spannbaum T :

Kante e_9 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_9 - e_{10} - e_2$

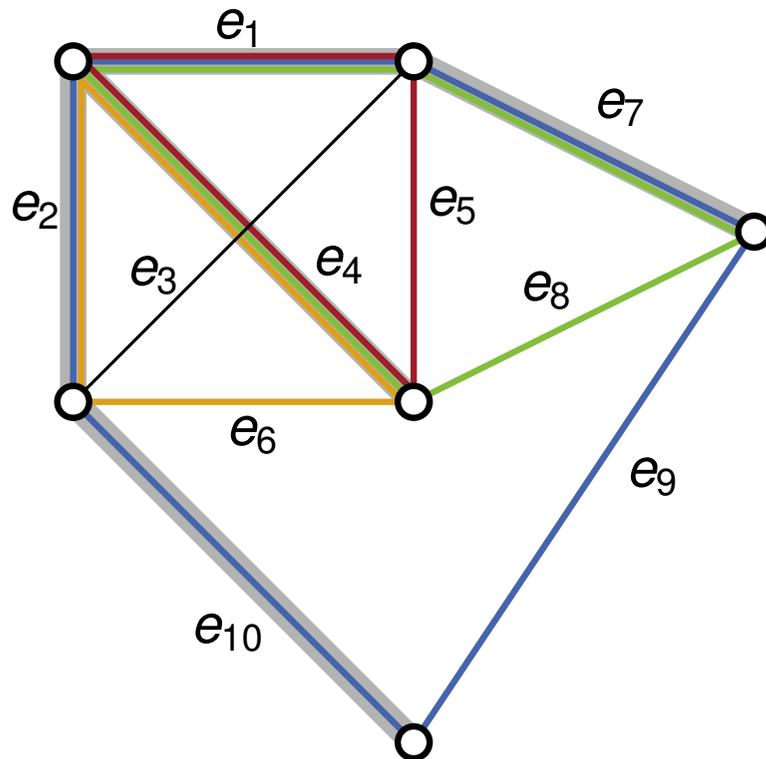
Kante e_8 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_8 - e_4$

Kante e_5 induziert Kreis:

$e_1 - e_5 - e_4$

Beispiel



Spannbaum T :

Kante e_9 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_9 - e_{10} - e_2$

Kante e_8 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_8 - e_4$

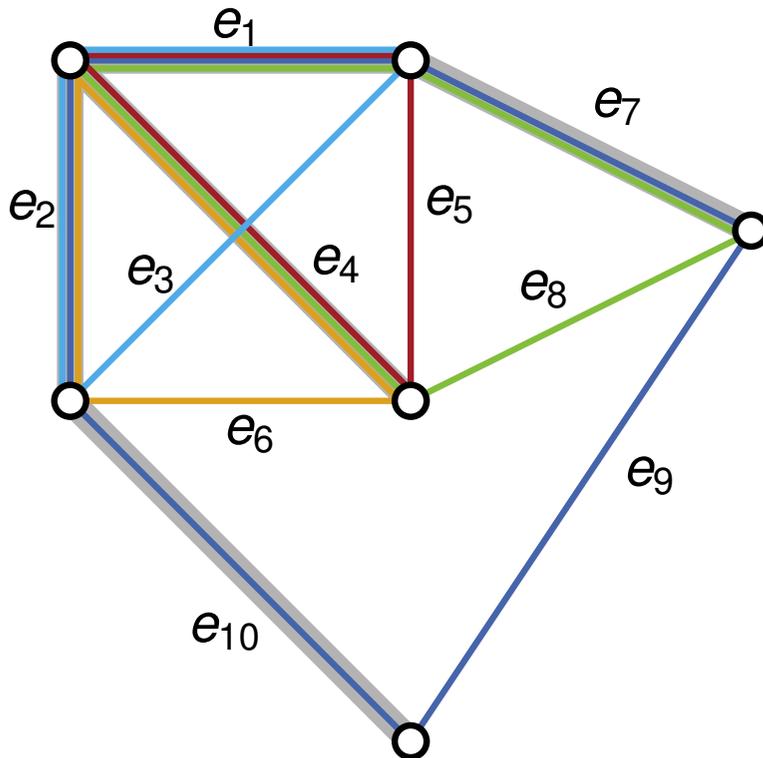
Kante e_5 induziert Kreis:

$e_1 - e_5 - e_4$

Kante e_6 induziert Kreis:

$e_2 - e_4 - e_6$

Beispiel



Spannbaum T :

Kante e_9 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_9 - e_{10} - e_2$

Kante e_8 induziert Kreis:

$e_1 - e_7 - e_8 - e_4$

Kante e_5 induziert Kreis:

$e_1 - e_5 - e_4$

Kante e_6 induziert Kreis:

$e_2 - e_4 - e_6$

Kante e_3 induziert Kreis:

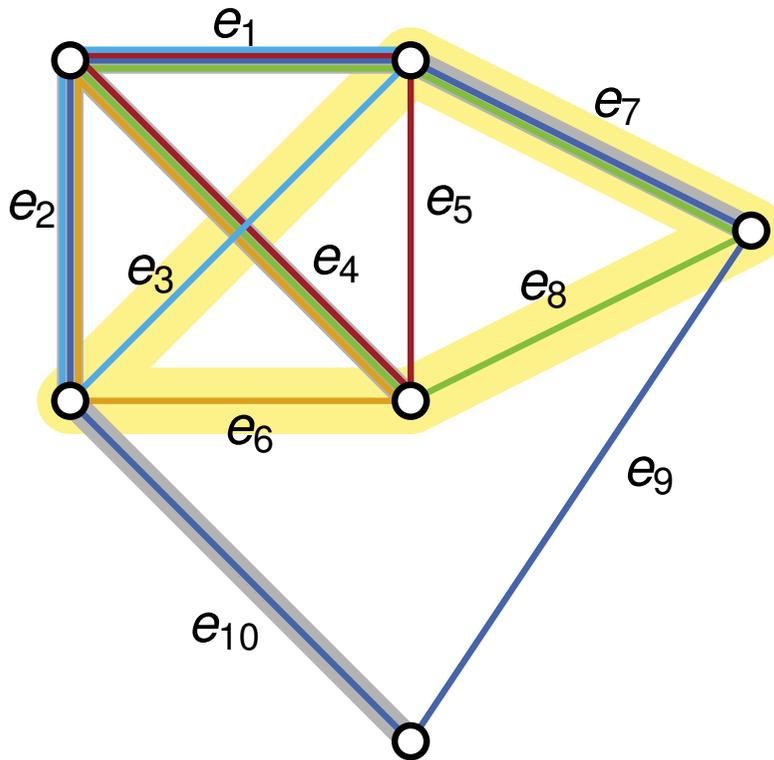
$e_1 - e_3 - e_2$

Kreisbasis

Dimension des
Kreisraums:

$$m - n + 1 = 5$$

Beispiel



Spannbaum T :

Kante e_9 induziert Kreis:

$$e_1 - e_7 - e_9 - e_{10} - e_2$$

Kante e_8 induziert Kreis:

$$e_1 - e_7 - e_8 - e_4$$

Kante e_5 induziert Kreis:

$$e_1 - e_5 - e_4$$

Kante e_6 induziert Kreis:

$$e_2 - e_4 - e_6$$

Kante e_3 induziert Kreis:

$$e_1 - e_3 - e_2$$

Kreisbasis

Dimension des
Kreisraums:

$$m - n + 1 = 5$$

Darstellung anderer Kreise bezüglich der gewählten Basis:

$$e_3 - e_7 - e_8 - e_6 = e_1 - e_7 - e_8 - e_4 \oplus e_2 - e_4 - e_6 \oplus e_1 - e_3 - e_2$$

Definition: Gewicht einer Kreisbasis

Sei zu $G = (V, E)$ die Kantengewichtsfunktion $w: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Das *Gewicht einer Kreisbasis* \mathcal{B} von G ist definiert als

$$w(\mathcal{B}) = \sum_{C \in \mathcal{B}} w(C) = \sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{e \in C} w(e)$$

Problem: MCB

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.
Finde eine Kreisbasis \mathcal{B} von G mit minimalem Gewicht.

Algorithmus zur Bestimmung einer MCB: \rightarrow nächste Vorlesung

Matroide & Greedy Algorithmen

Definition: Unabhängigkeitssystem

(Definition 2.8)

Ein Tupel (M, \mathcal{U}) , wobei $\mathcal{U} \subset 2^M$ ein Mengensystem über einer endlichen Menge M ist, heißt *Unabhängigkeitssystem*, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{U}$ und
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$.

Die Mengen $I \subseteq M$ mit $I \in \mathcal{U}$ werden *unabhängig*, alle anderen Mengen $I \subseteq M$ *abhängig* genannt.

Bemerkung: Für einen Vektorraum V und die Menge \mathcal{U} aller linear unabhängigen Teilmengen von V ist (V, \mathcal{U}) ein Unabhängigkeitssystem. (gilt auch für den Kreisraum)

Definition: Unabhängigkeitssystem

(Definition 2.8)

Ein Tupel (M, \mathcal{U}) , wobei $\mathcal{U} \subset 2^M$ ein Mengensystem über einer endlichen Menge M ist, heißt *Unabhängigkeitssystem*, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{U}$ und
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$.

Die Mengen $I \subseteq M$ mit $I \in \mathcal{U}$ werden *unabhängig*, alle anderen Mengen $I \subseteq M$ *abhängig* genannt.

Bemerkung: Für einen Vektorraum V und die Menge \mathcal{U} aller linear unabhängigen Teilmengen von V ist (V, \mathcal{U}) ein Unabhängigkeitssystem. (gilt auch für den Kreisraum)

Definition: Basis, Basissystem & Rang

(Definition 2.9)

Sei (M, \mathcal{U}) ein Unabhängigkeitssystem. Für $F \subseteq M$ ist jede unabhängige Menge $U \in \mathcal{U}, U \subseteq F$ die bezüglich \subseteq maximal ist eine *Basis* von F . Eine Basis von M wird auch *Basis des Unabhängigkeitssystems* genannt. Die Menge aller Basen von (M, \mathcal{U}) heißt *Basissystem* von (M, \mathcal{U}) .

Für $F \subseteq M$ heißt $r(F) := \max\{|B| : B \text{ ist Basis von } F\}$ der *Rang* von F . Der Rang von M wird auch *Rang des Unabhängigkeitssystems* genannt.

Optimierungsprobleme

Sei (M, \mathcal{U}) ein Unabhängigkeitssystem mit Basissystem \mathcal{B} und Gewichtsfunktion $w: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Problem: Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})

Finde unabhängige Menge $U^* \in \mathcal{U}$ sodass $w(U^*)$ maximal ist. **(Definition 2.11)**

Problem: Optimierungsproblem über dem Basissystem \mathcal{B}

Finde Basis $B^* \in \mathcal{B}$ sodass $w(B^*)$ minimal ist. **(Definition 2.11)**

Optimierungsprobleme

Sei (M, \mathcal{U}) ein Unabhängigkeitssystem mit Basissystem \mathcal{B} und Gewichtsfunktion $w: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Problem: Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})

Finde unabhängige Menge $U^* \in \mathcal{U}$ sodass $w(U^*)$ maximal ist. (Definition 2.11)

Problem: Optimierungsproblem über dem Basissystem \mathcal{B}

Finde Basis $B^* \in \mathcal{B}$ sodass $w(B^*)$ minimal ist. (Definition 2.11)

Mögliche Lösungsstrategie für diese Probleme: Greedy

GREEDY-METHODE für Optimierungsproblem Π

Sortiere M **aufsteigend** (**absteigend**), falls Π Optimierungsproblem über **Basissystem** (**Unabhängigkeitssystem**) ist, sei $l_1, \dots, l_{|M|}$ die Sortierung.

$I^* \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** $|M|$ **do**

if $I^* \cup \{l_i\} \in \mathcal{U}$ **then**

$I^* \leftarrow I^* \cup \{l_i\}$

Optimierungsprobleme

Sei (M, \mathcal{U}) ein Unabhängigkeitssystem mit Basissystem \mathcal{B} und Gewichtsfunktion $w: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Problem: Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})

Finde unabhängige Menge $U^* \in \mathcal{U}$ sodass $w(U^*)$ maximal ist. (Definition 2.11)

Problem: Optimierungsproblem über dem Basissystem \mathcal{B}

Finde Basis $B^* \in \mathcal{B}$ sodass $w(B^*)$ minimal ist. (Definition 2.11)

Mögliche Lösungsstrategie für diese Probleme: Greedy

GREEDY-METHODE für Optimierungsproblem Π

Sortiere M **aufsteigend** (**absteigend**), falls Π Optimierungsproblem über **Basissystem** (**Unabhängigkeitssystem**) ist, sei $l_1, \dots, l_{|M|}$ die Sortierung.

$I^* \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** $|M|$ **do**

if $I^* \cup \{l_i\} \in \mathcal{U}$ **then**

$I^* \leftarrow I^* \cup \{l_i\}$

Wann liefert das eine optimale Lösung?

Definition: Matroid

(Definition 2.13)

Ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Äquivalent kann statt $|I| < |J|$ auch $|I| = |J| + 1$ gefordert werden

Definition: Matroid

(Definition 2.13)

Ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Äquivalent kann statt $|I| < |J|$ auch $|I| = |J| + 1$ gefordert werden

Beispiel 1: Jeder Vektorraum ist ein Matroid, denn:

Falls I und J linear unabhängig mit $|I| < |J|$, dann kann nicht jeder Vektor in J als Linearkombination von Vektoren aus I dargestellt werden.

\Rightarrow Der Kreisraum eines Graphen G bildet einen Matroid, den *Kreismatroid* von G .

Definition: Matroid

(Definition 2.13)

Ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Äquivalent kann statt $|I| < |J|$ auch $|I| = |J| + 1$ gefordert werden

Beispiel 1: Jeder Vektorraum ist ein Matroid, denn:

Falls I und J linear unabhängig mit $|I| < |J|$, dann kann nicht jeder Vektor in J als Linearkombination von Vektoren aus I dargestellt werden.

\Rightarrow Der Kreisraum eines Graphen G bildet einen Matroid, den *Kreisatroid* von G .

Beispiel 2: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Das Mengensystem (E, \mathcal{U}) mit $\mathcal{U} = \{E' \subseteq E : E' \text{ induziert einen Wald in } G\}$ ist ein Matroid.

Definition: Matroid

(Definition 2.13)

Ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Äquivalent kann statt $|I| < |J|$ auch $|I| = |J| + 1$ gefordert werden

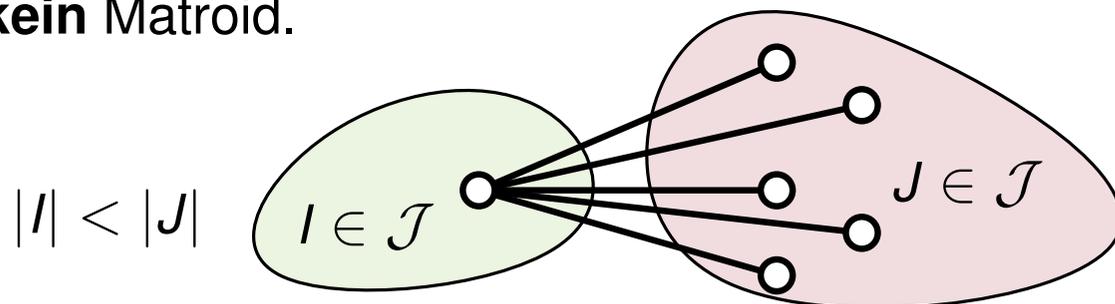
Beispiel 1: Jeder Vektorraum ist ein Matroid, denn:

Falls I und J linear unabhängig mit $|I| < |J|$, dann kann nicht jeder Vektor in J als Linearkombination von Vektoren aus I dargestellt werden.

\Rightarrow Der Kreisraum eines Graphen G bildet einen Matroid, den *Kreisimatroid* von G .

Beispiel 2: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Das Mengensystem (E, \mathcal{U}) mit $\mathcal{U} = \{E' \subseteq E : E' \text{ induziert einen Wald in } G\}$ ist ein Matroid.

Beispiel 3: Es sei $G = (V, E)$. Das Mengensystem (V, \mathcal{J}) , wobei $\mathcal{J} = \{V' \subseteq V \mid V' \text{ unabhängige Knotenmenge in } G, \text{ d.h. } \forall u, v \in V' \text{ gilt } \{u, v\} \notin E\}$ ist ein Unabhängigkeitssystem, aber **kein** Matroid.



Definition: Matroid

(Definition 2.13)

Ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Satz: Maximierungsprobleme auf Matroiden

(Satz 2.16)

Für ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Greedy-Methode liefert eine Optimallösung für das **Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})** .
- (b) (M, \mathcal{U}) ist ein Matroid.
- (c) Für eine beliebige Menge $F \subseteq M$ und beliebige inklusionsmaximale unabhängige Mengen $I_1, I_2 \subseteq F$ gilt: $|I_1| = |I_2|$.

Erinnerung:

Problem: Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})

Finde unabhängige Menge $U^* \in \mathcal{U}$ sodass $w(U^*)$ maximal ist.

Beweis: Wir zeigen: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$

Definition: Matroid

(Definition 2.13)

Ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) heißt *Matroid*, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, sodass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.

Satz: Minimierungsprobleme auf Matroiden

(Satz 2.17)

Für ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U}) mit Basissystem \mathcal{B} sind äquivalent:

- (a) Die Greedy-Methode liefert eine Optimallösung für das **Optimierungsproblem über dem Basissystem \mathcal{B}** .
- (b) (M, \mathcal{U}) ist ein Matroid.
- (c) Die Greedy-Methode liefert eine Optimallösung für das **Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})** .

Erinnerung:

Problem: Optimierungsproblem über dem Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{U})

Finde unabhängige Menge $U^* \in \mathcal{U}$ sodass $w(U^*)$ maximal ist.

Problem: Optimierungsproblem über dem Basissystem \mathcal{B}

Finde Basis $B^* \in \mathcal{B}$ sodass $w(B^*)$ minimal ist.

Beweis: $(b) \Leftrightarrow (c)$ wurde schon gezeigt. Wir zeigen: $(a) \Leftrightarrow (c)$.

Beispiel 1: Das Finden einer minimalen Kreisbasis eines Graphen G entspricht dem **Optimierungsproblem über dem Basissystem** des Kreismatroids:

Gesucht ist eine Kreisbasis minimalen Gewichts.

⇒ MCB kann mittels Greedy-Algorithmus gelöst werden

Beispiel 1: Das Finden einer minimalen Kreisbasis eines Graphen G entspricht dem **Optimierungsproblem über dem Basissystem** des Kreismatroids:

Gesucht ist eine Kreisbasis minimalen Gewichts.

⇒ MCB kann mittels Greedy-Algorithmus gelöst werden

Beispiel 2: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Das Mengensystem (E, \mathcal{U}) mit $\mathcal{U} = \{E' \subseteq E : E' \text{ induziert einen Wald in } G\}$ ist ein Matroid.

Die Basen dieses Matroids sind gerade Spannbäume.

⇒ Das **Optimierungsproblem über dem Basissystem** entspricht also dem Problem einen minimalen Spannbaum (MST) in G zu finden.

Die Korrektheit vieler MST-Algorithmen beruht darauf, dass die Greedy-Methode eine optimale Lösung liefert.