Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen II
Übung am 11.12.2012

Algorithmische Geometrie

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Karlsruher Institut für Technologie

Schnitte von Strecken

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

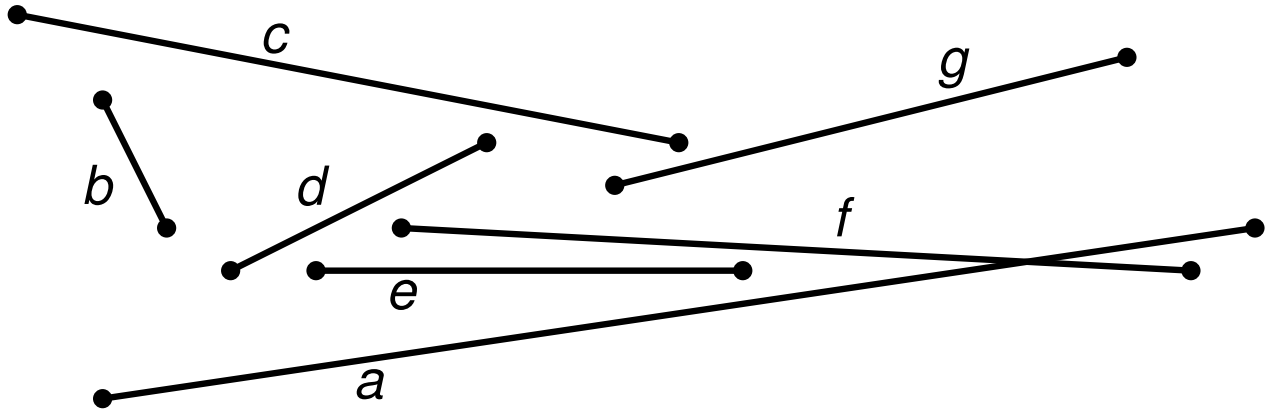
Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:

Sweep-Line Zustand



Event-Point Schedule →

c_1 a_1 b_2 d_1 e_1 f_1 d_2 g_1 c_2 e_2 g_2 f_2 a_2
b_1

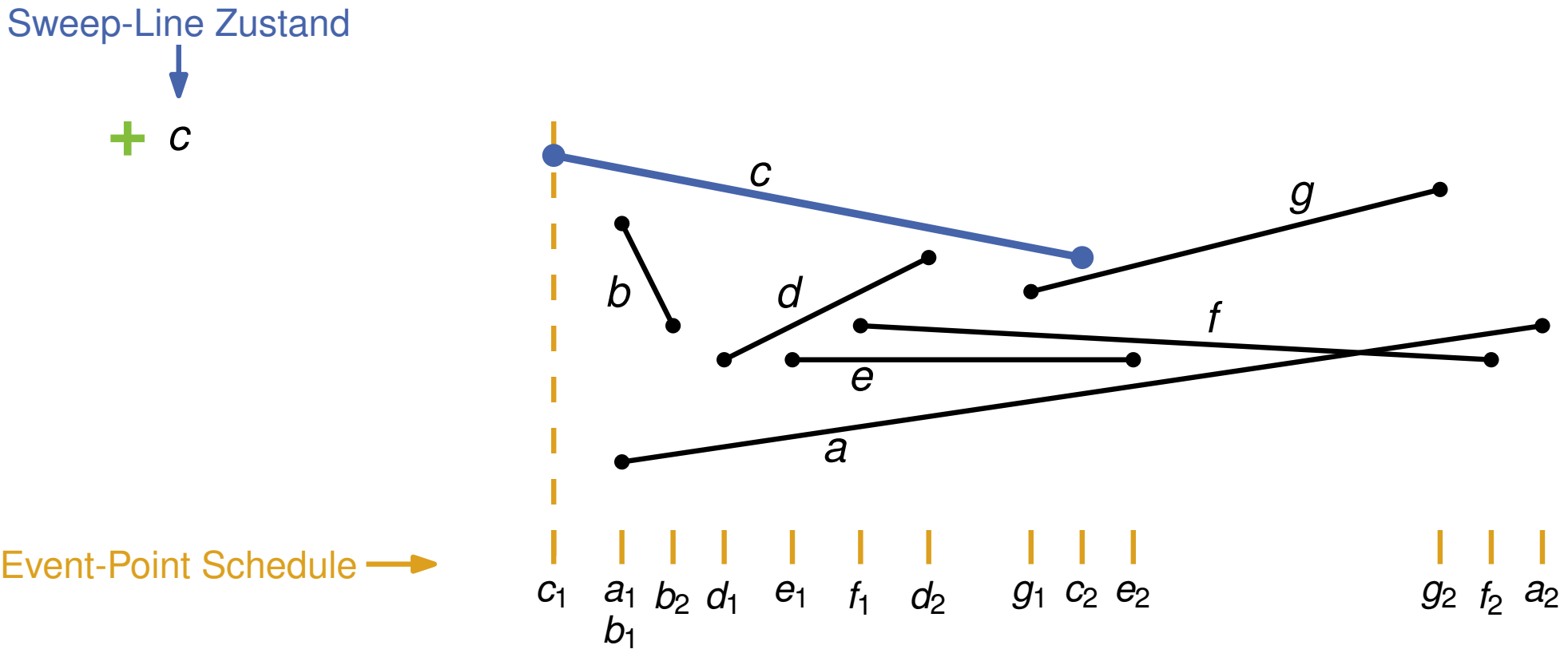
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



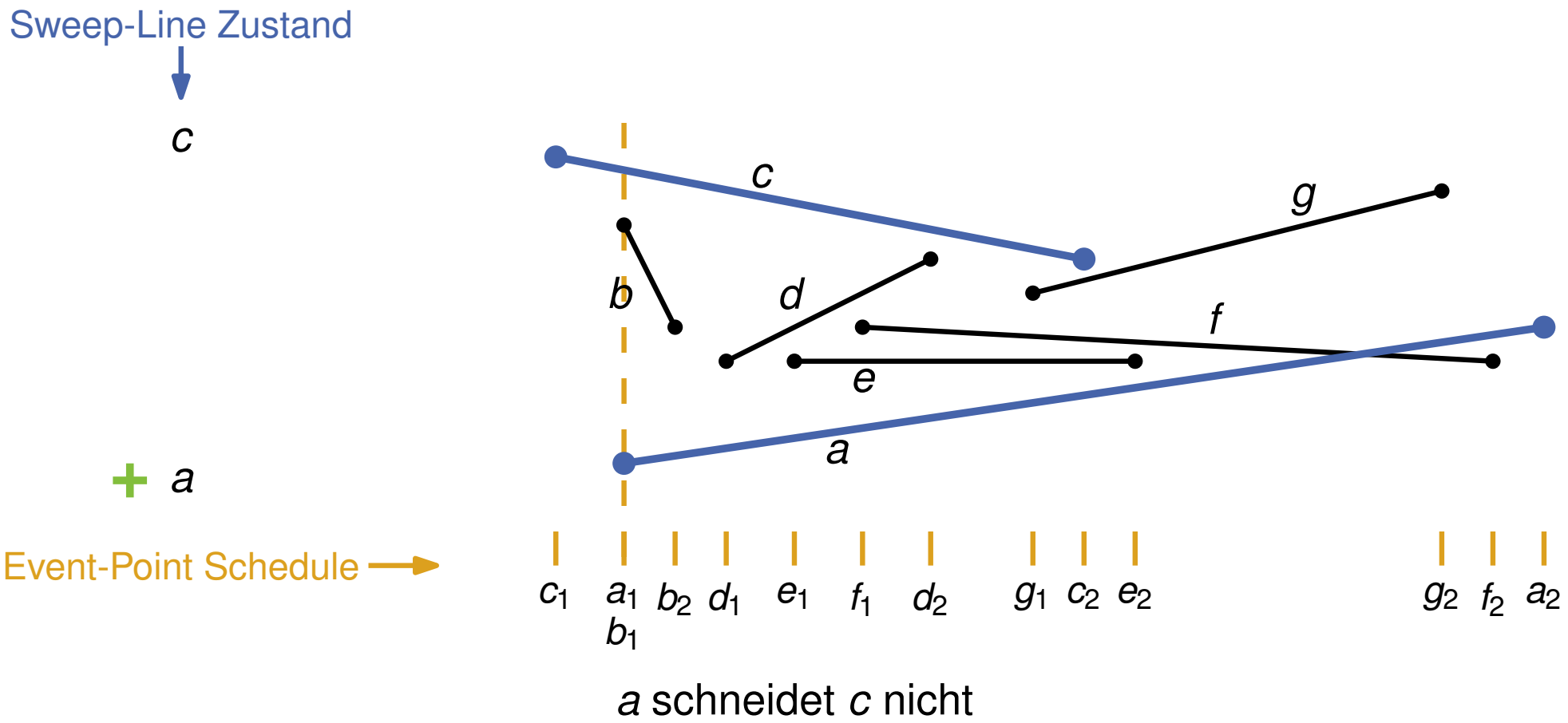
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



a schneidet *c* nicht

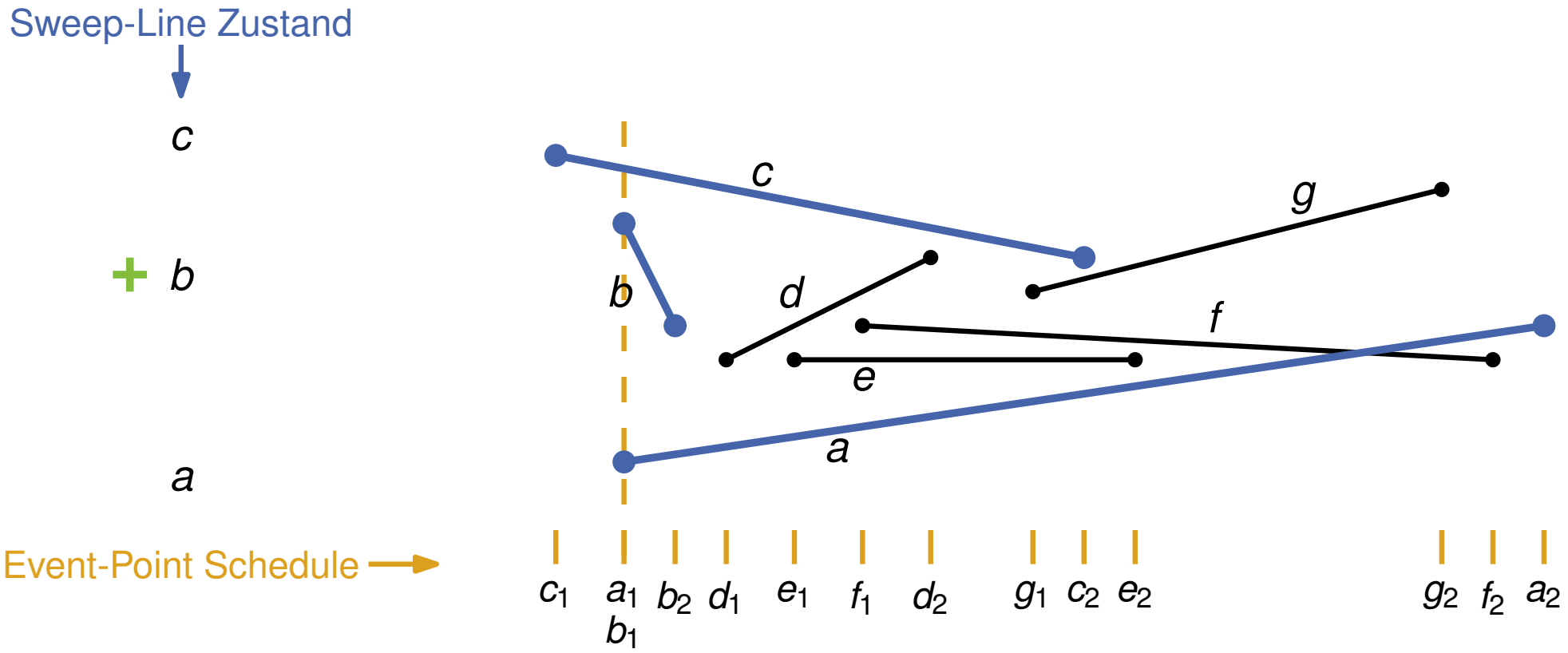
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



b schneidet weder a noch c

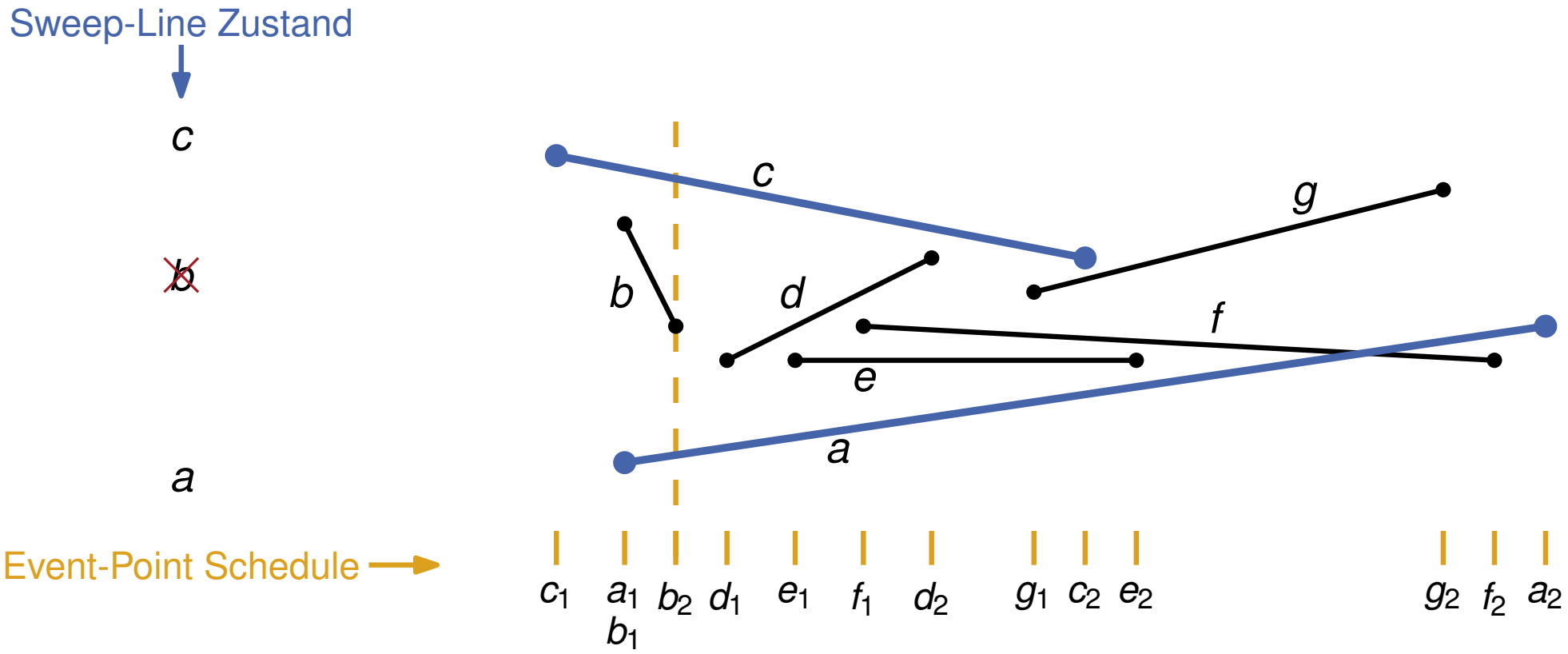
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



a schneidet c nicht

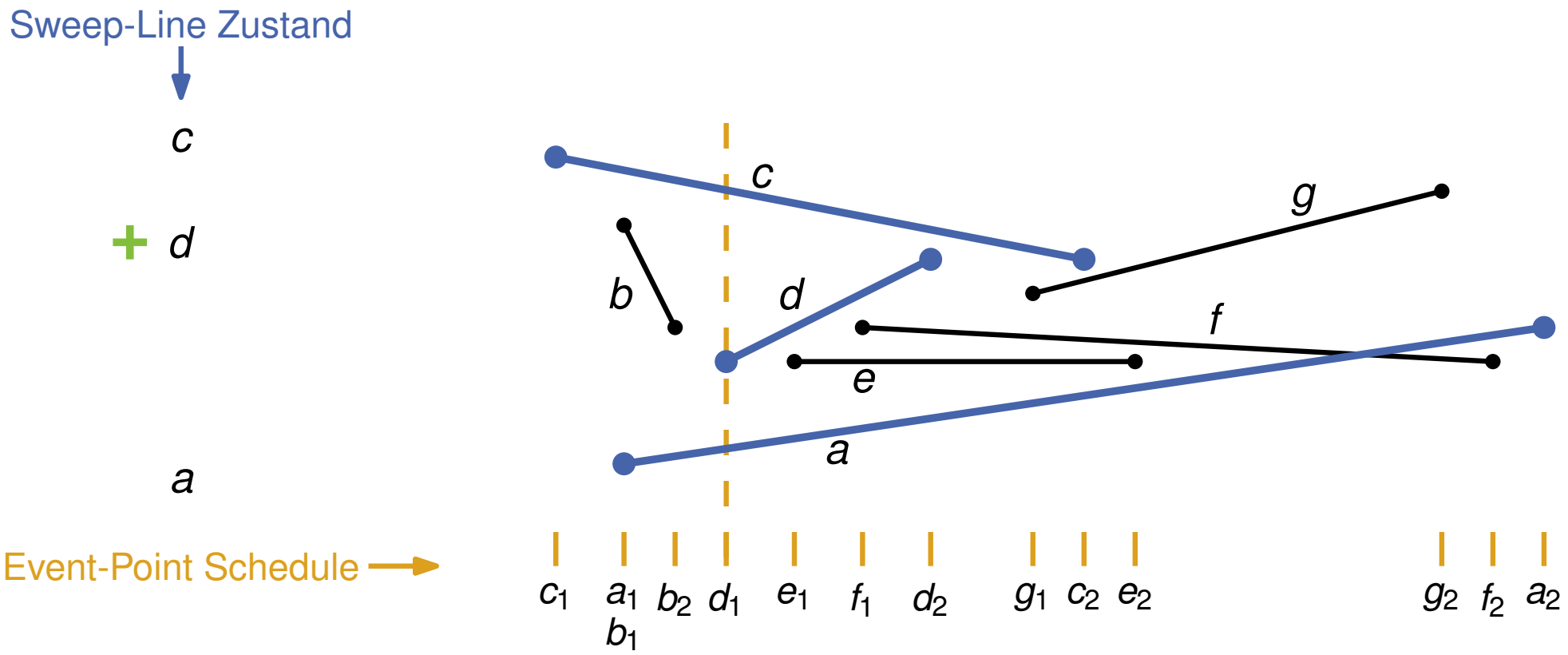
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



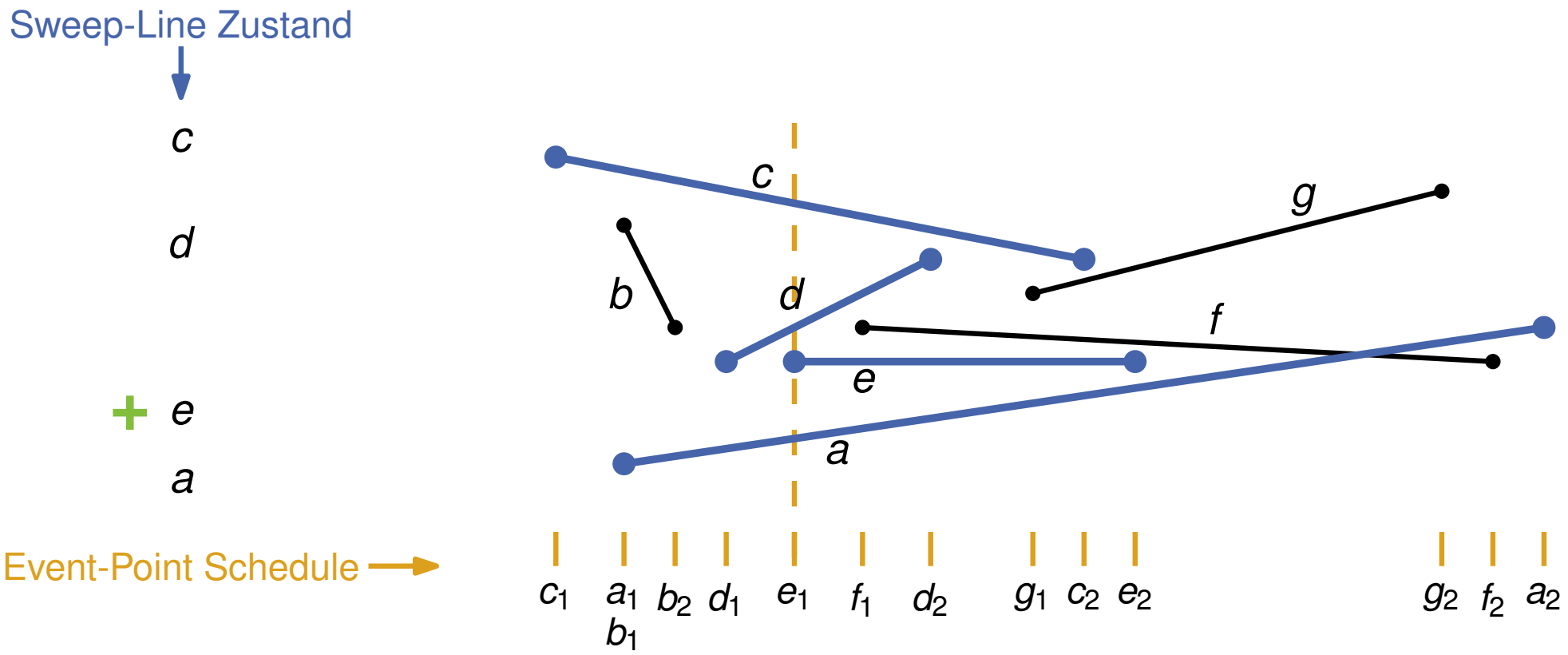
d schneidet weder a noch c

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



e schneidet weder d noch a

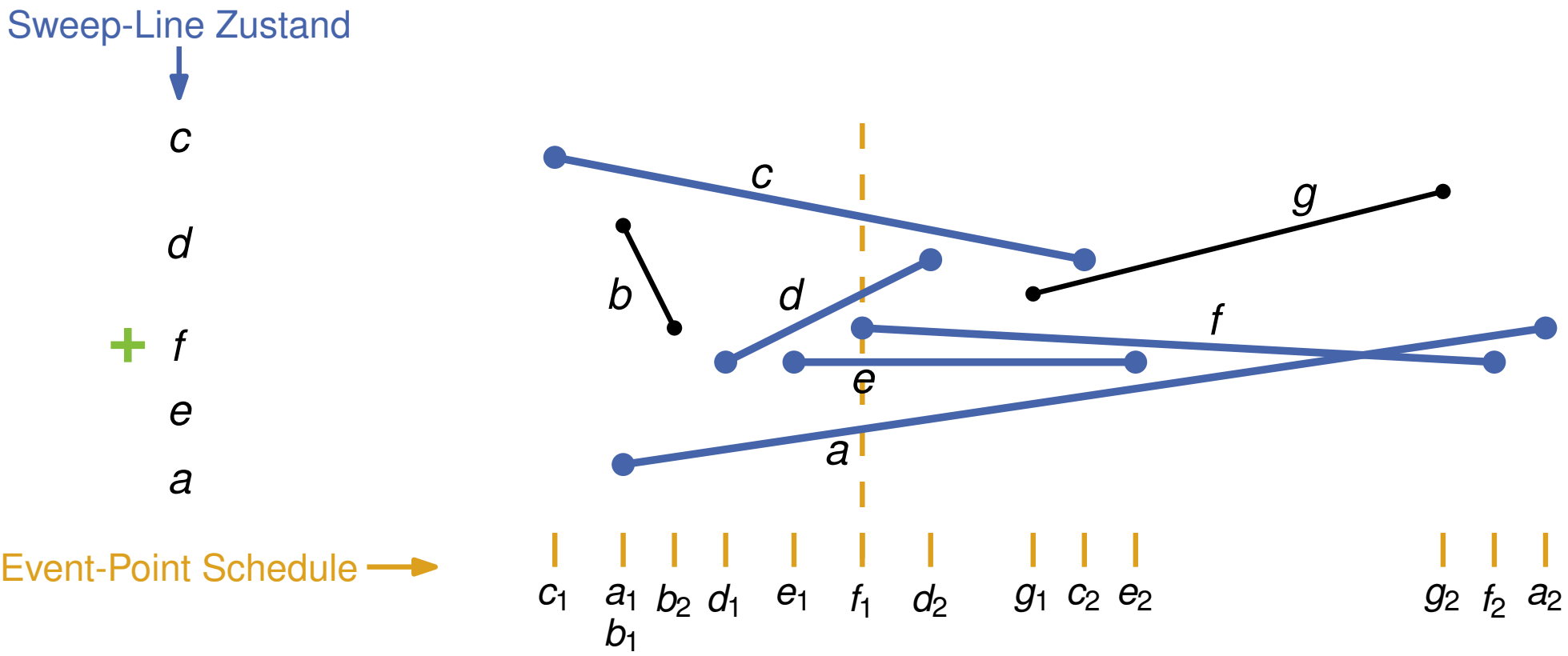
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



f schneidet weder d noch e

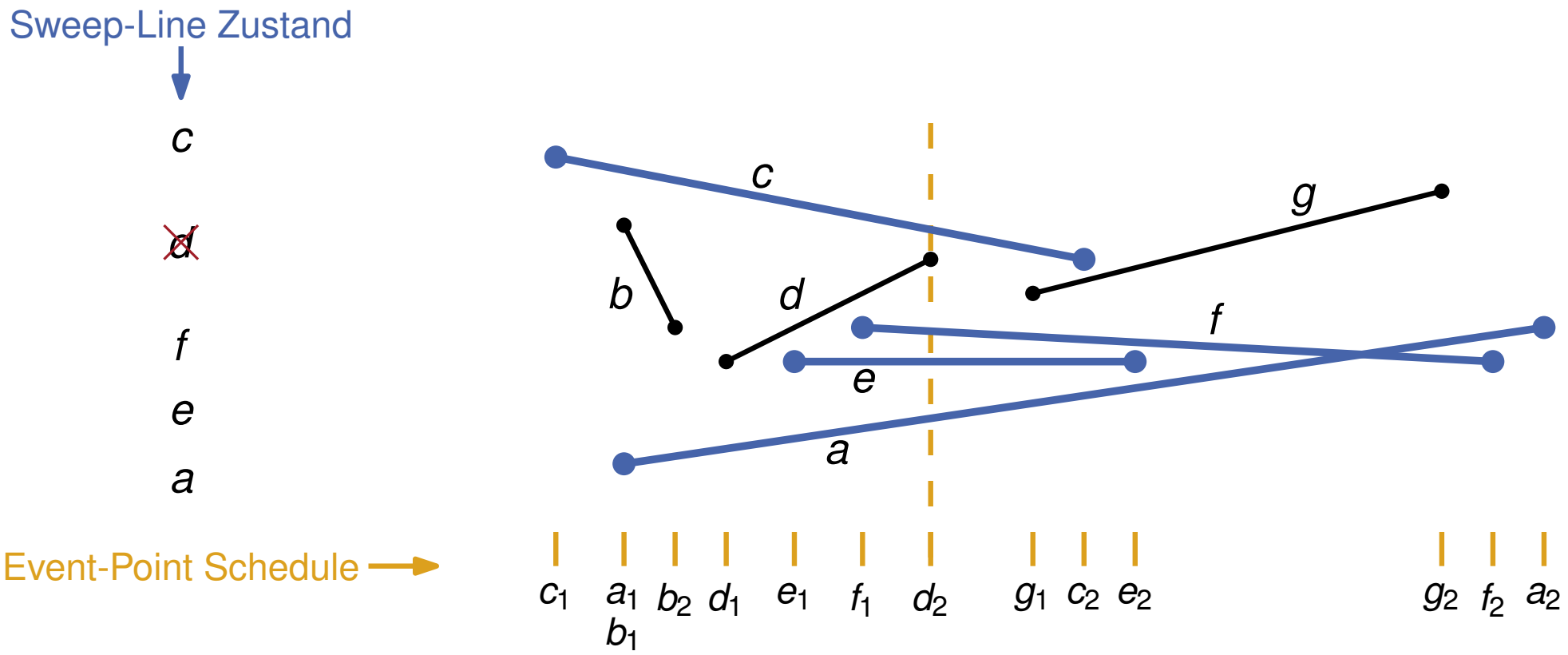
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



f schneidet c nicht

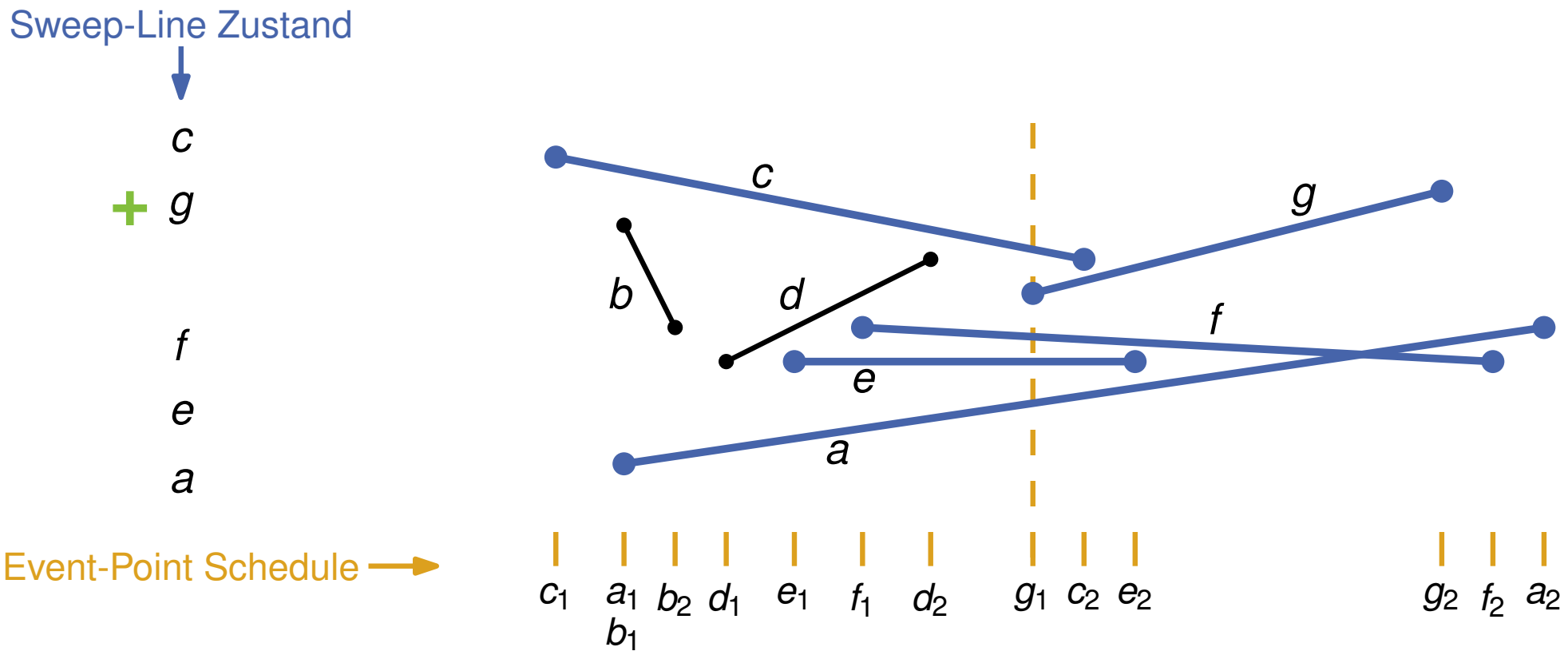
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



g schneidet weder f noch c

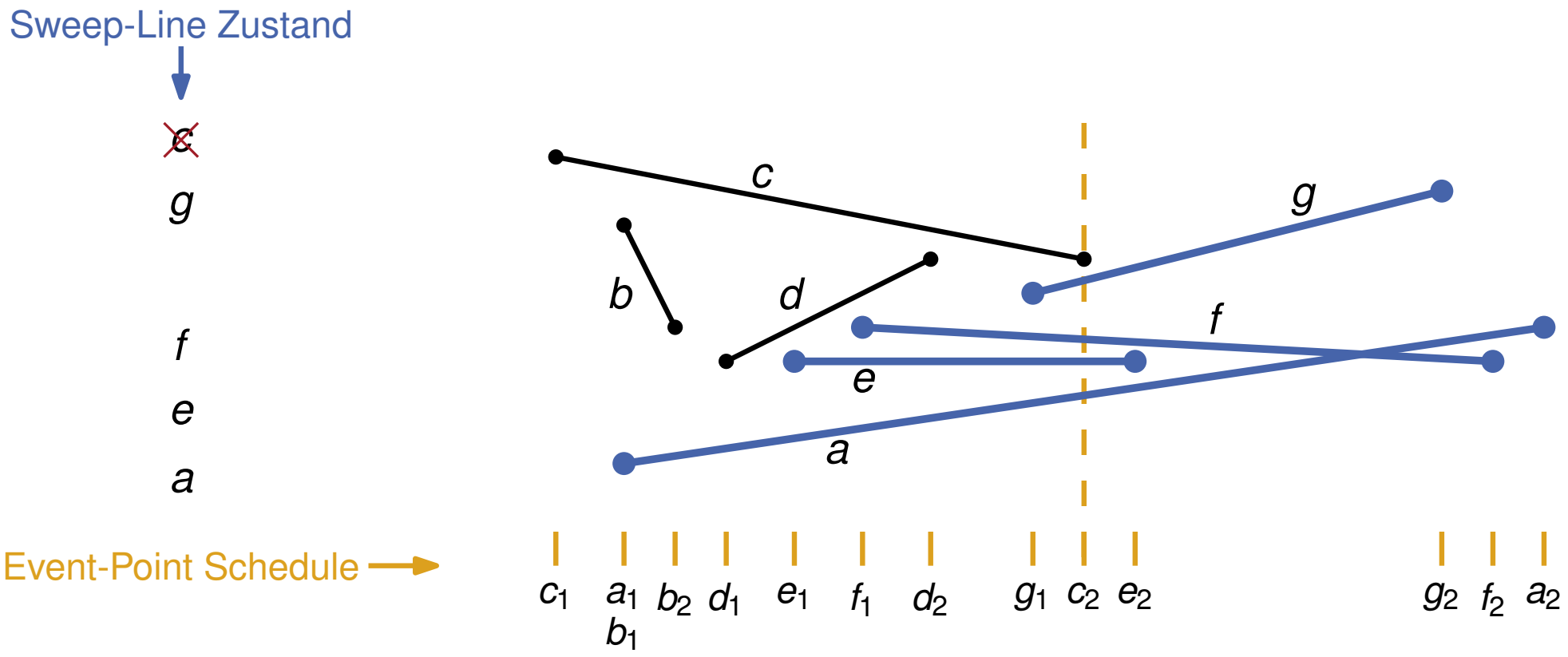
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



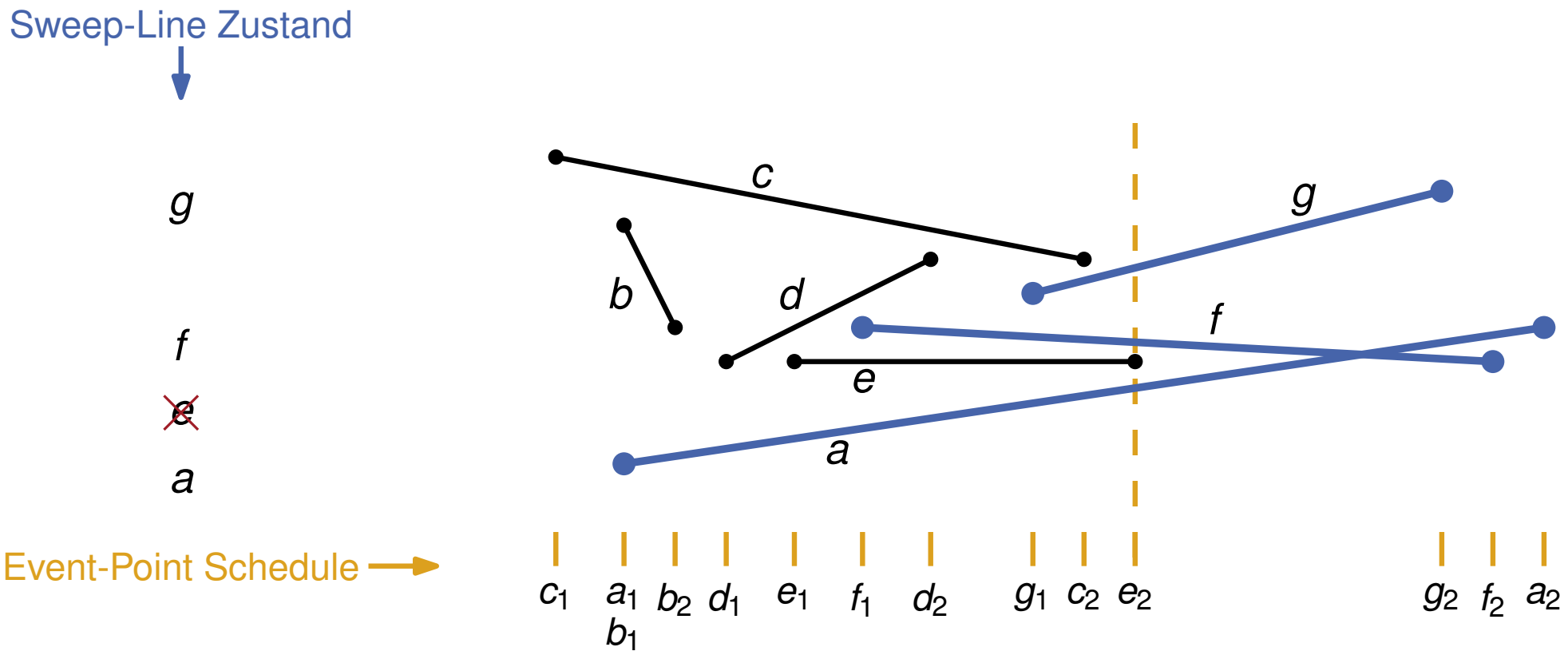
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Beispiel:



f schneidet a! $\Rightarrow$ gib TRUE zurück

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

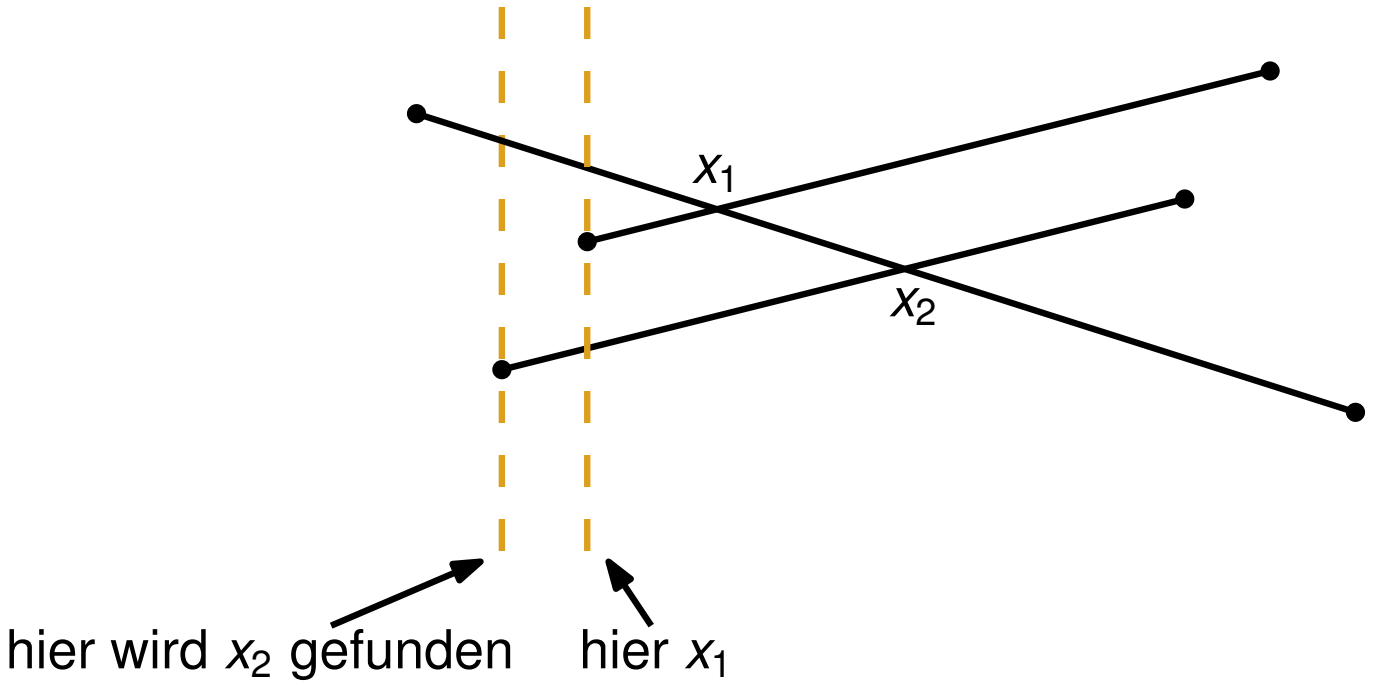
(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Problem 1(a)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es wird immer der linkeste Schnittpunkt gefunden.

Nein, denn:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(b)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

Problem 1(b)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

Was ändert sich?

Problem 1(b)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

Was ändert sich?

- Man darf nicht abbrechen, sobald der erste Schnittpunkte gefunden wurde.

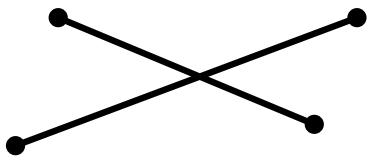
Problem 1(b)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

Was ändert sich?

- Man darf nicht abbrechen, sobald der erste Schnittpunkte gefunden wurde.
- An Schnittpunkten ändert sich die Reihenfolge der Kanten.



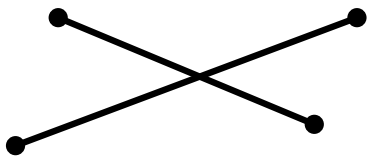
Problem 1(b)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

Was ändert sich?

- Man darf nicht abbrechen, sobald der erste Schnittpunkte gefunden wurde.
- An Schnittpunkten ändert sich die Reihenfolge der Kanten.
- Gefundene Schnittpunkte müssen als Haltepunkte in den Event-Point Schedule eingefügt werden.



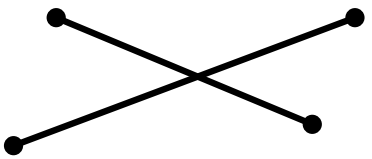
Problem 1(b)

Sei S eine Menge von n Strecken. Der Algorithmus aus der Vorlesung kann in $O(n \log n)$ Zeit testen, ob es in S ein sich schneidendes Streckenpaar gibt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

Was ändert sich?

- Man darf nicht abbrechen, sobald der erste Schnittpunkte gefunden wurde.
- An Schnittpunkten ändert sich die Reihenfolge der Kanten.
- Gefundene Schnittpunkte müssen als Haltepunkte in den Event-Point Schedule eingefügt werden.

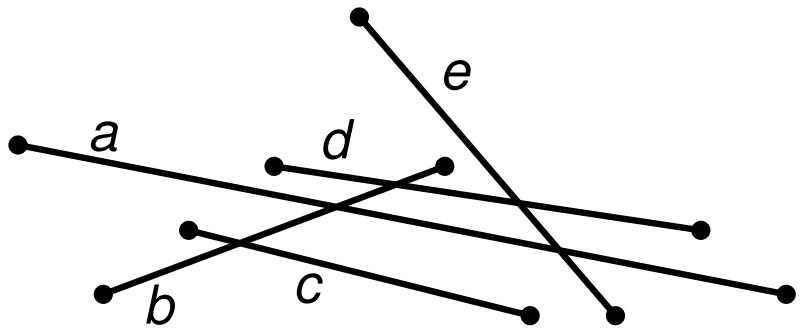


- An solchen Haltepunkten muss der Sweep-Line Zustand geändert werden: die beiden für die Kreuzung verantwortlichen Strecken werden vertauscht.

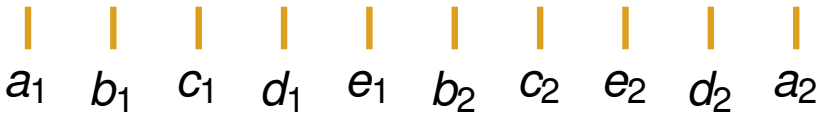
  Achtung: auch hierbei sind hinterher Streckenpaare benachbart, die vorher nicht benachbart waren.

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand



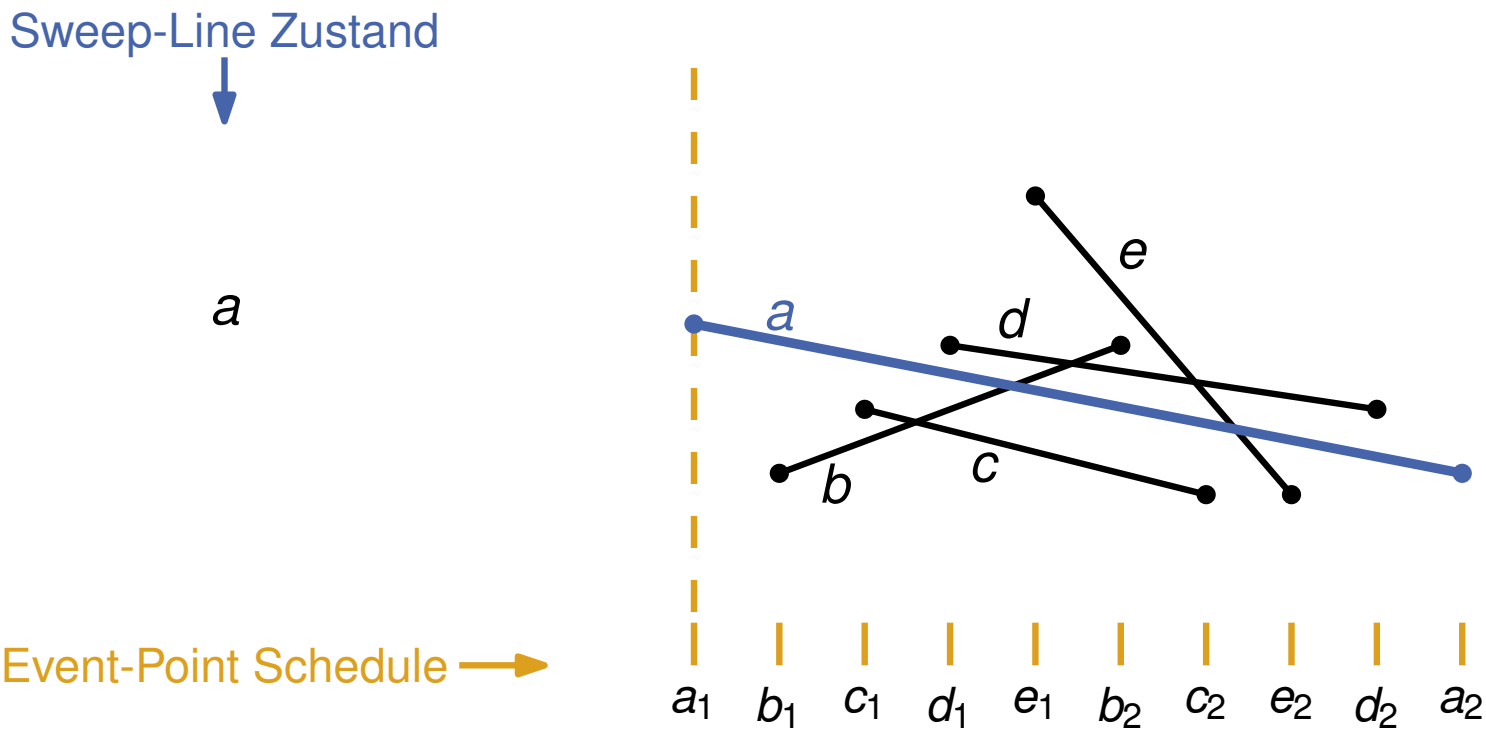
Event-Point Schedule



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen:

Schnitt gefunden zwischen:

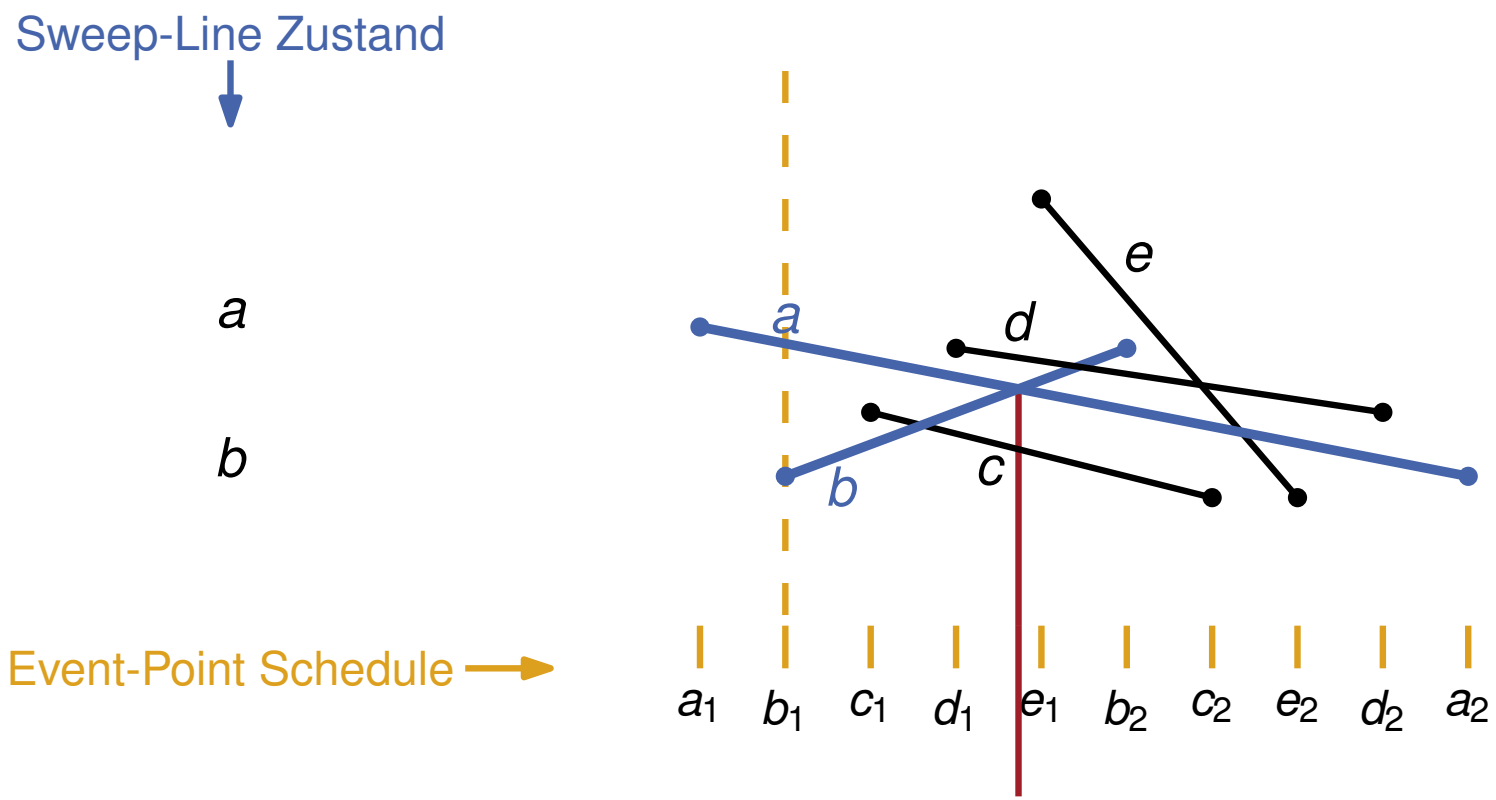
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen:

Schnitt gefunden zwischen:

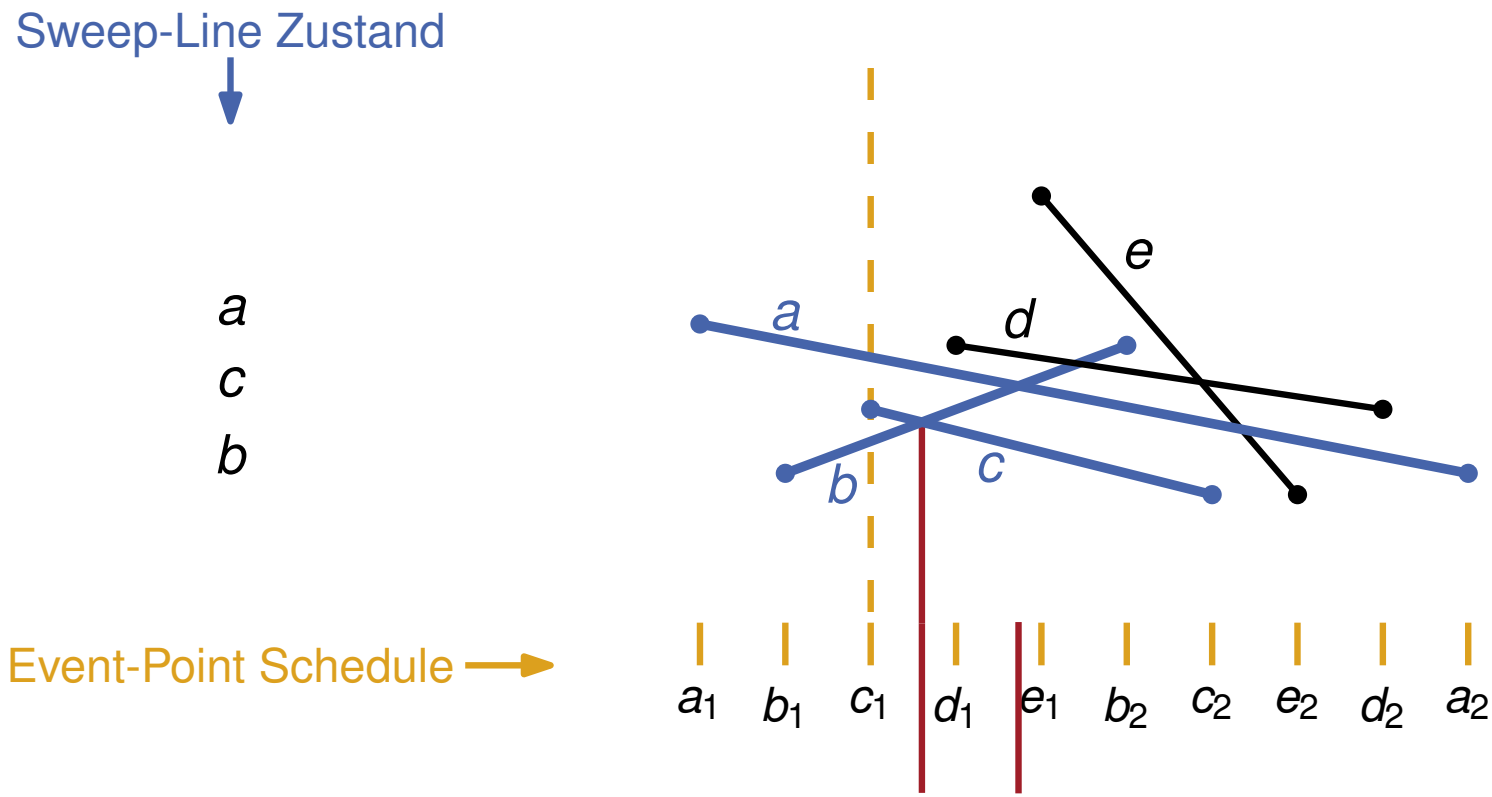
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *a* und *b*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*

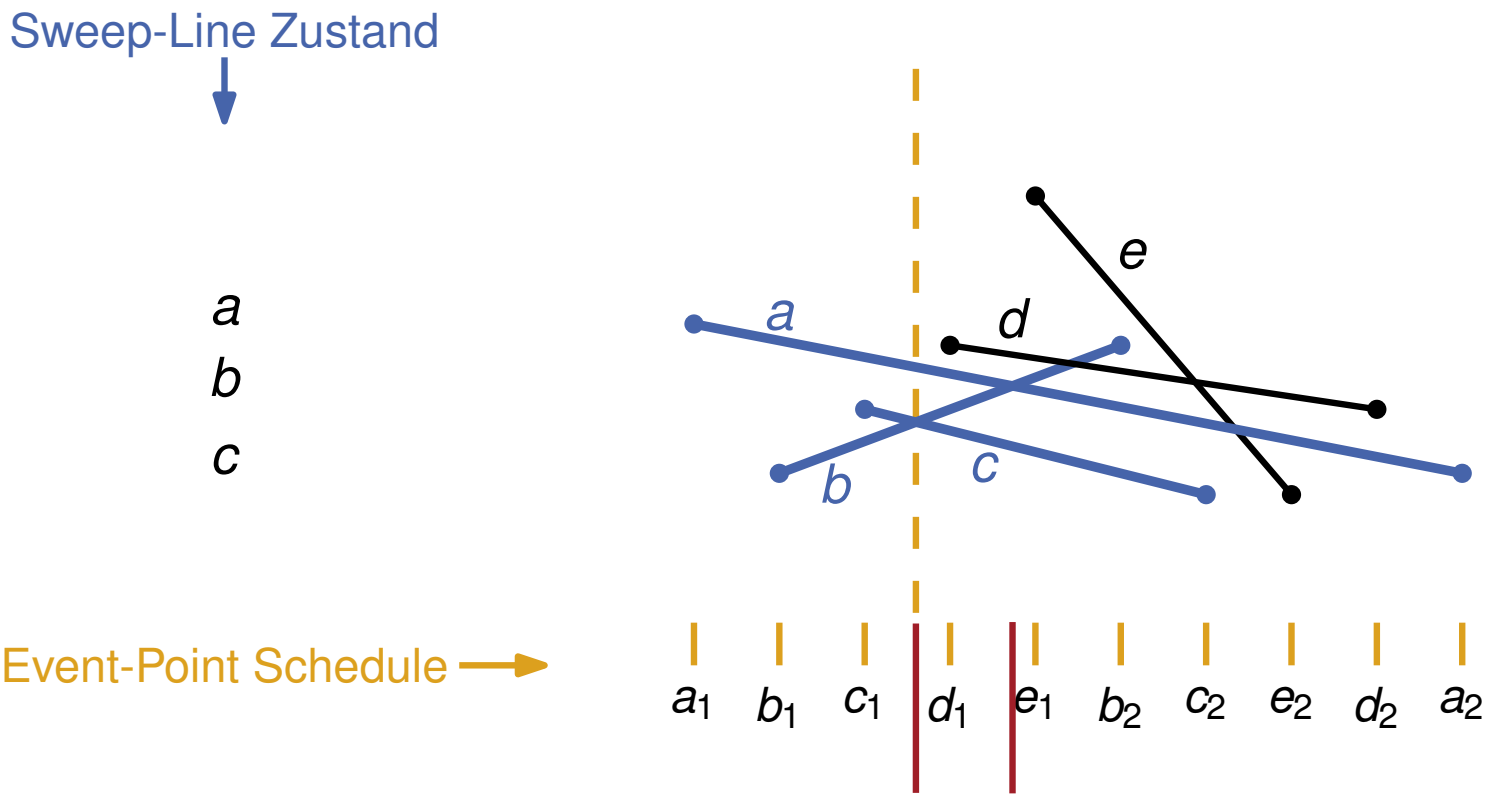
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *b* und *c*, *c* und *a*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*

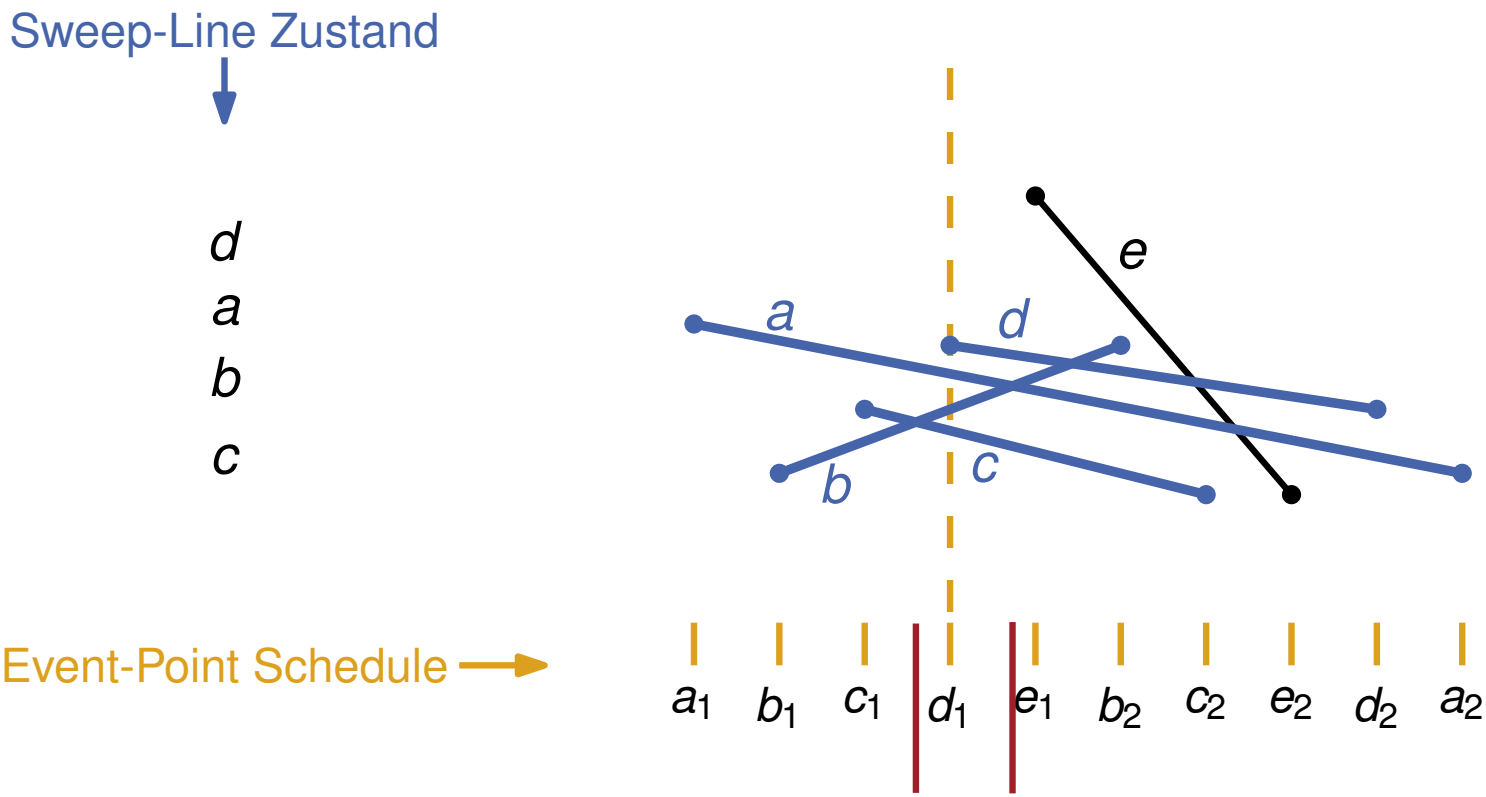
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *b* und *a*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*

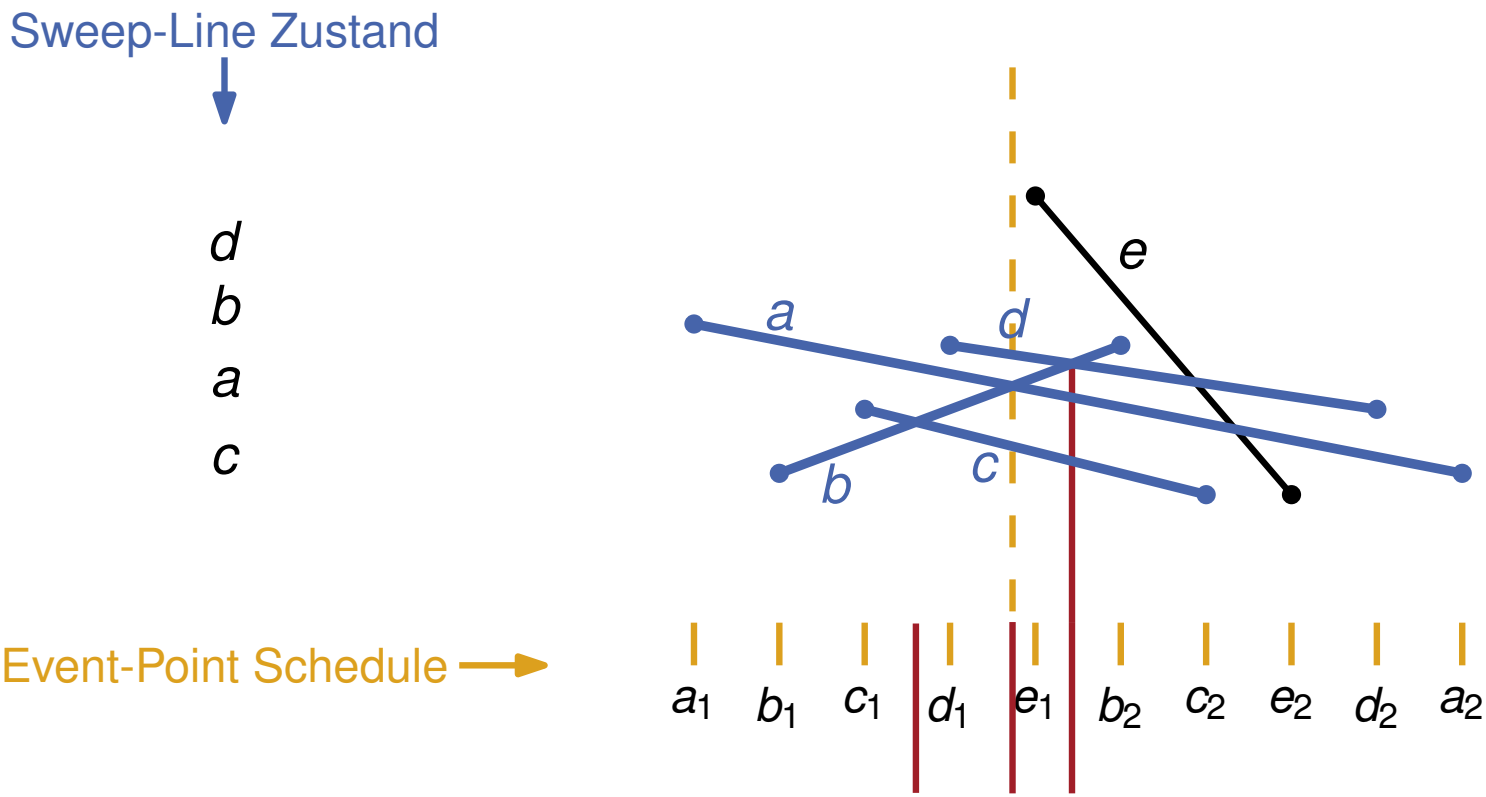
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *a* und *d*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*

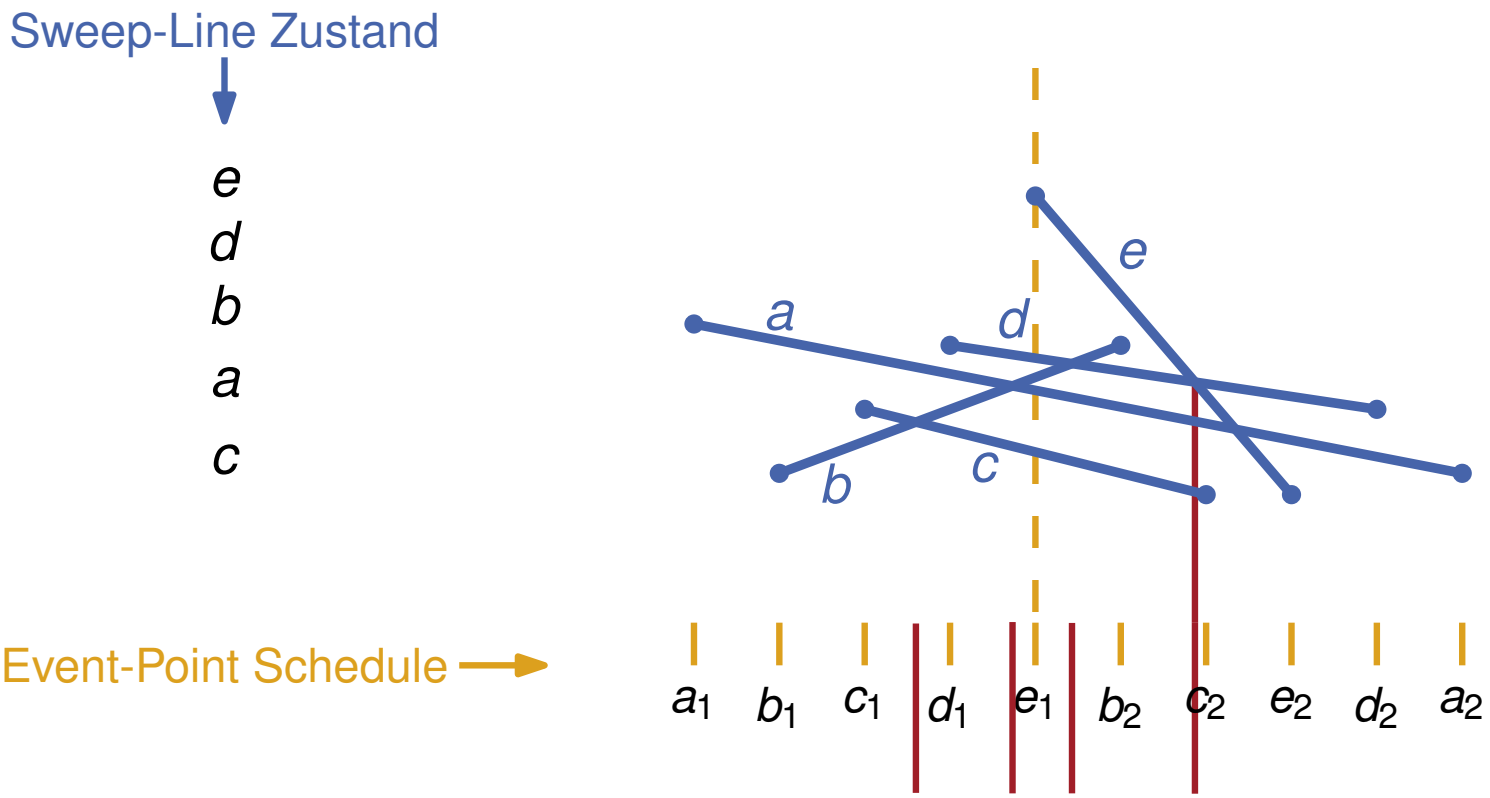
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *c* und *a*, *b* und *d*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*

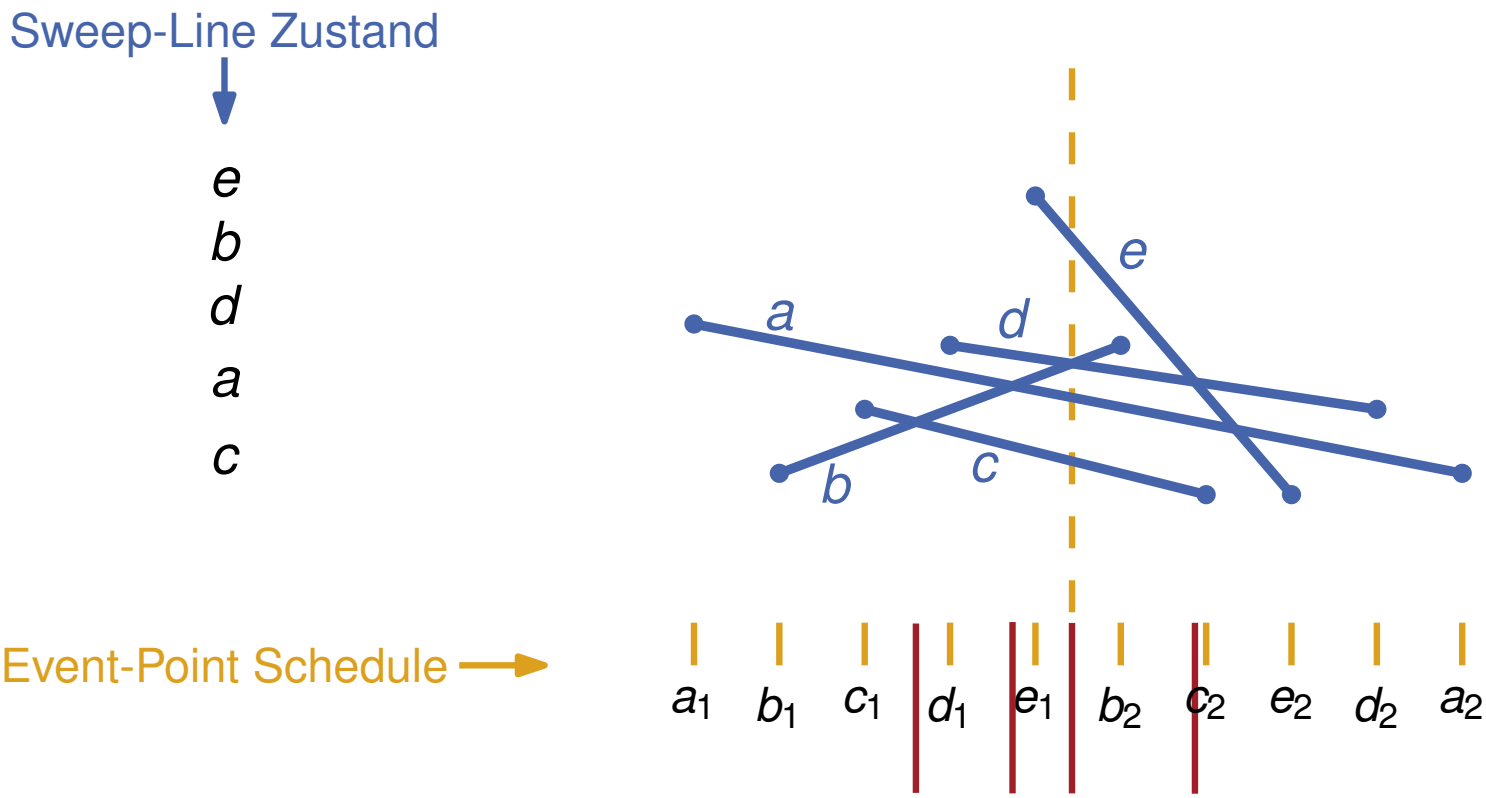
Problem 1(b) – Beispiel



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *d* und *e*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

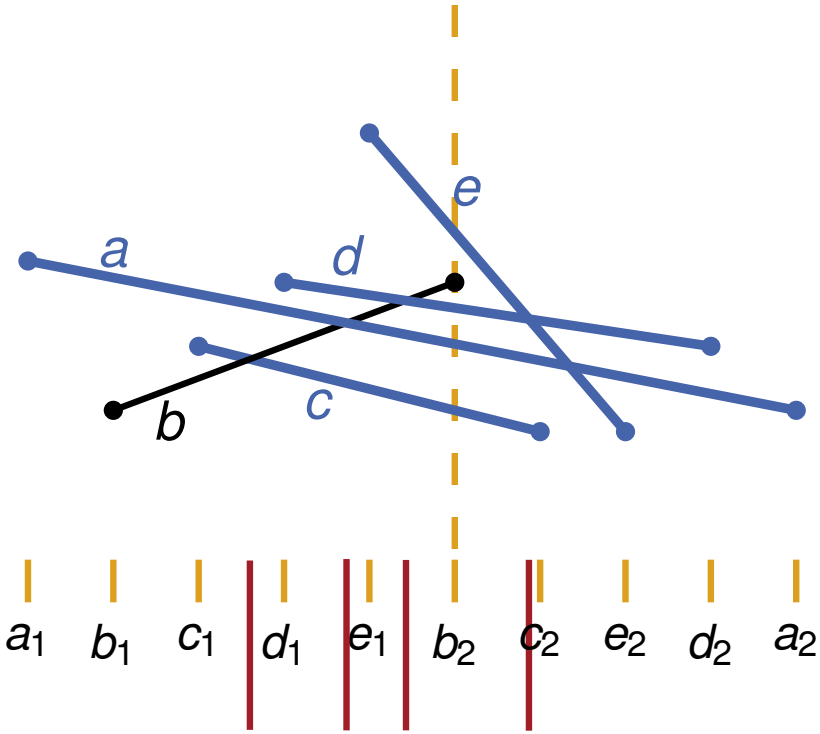


Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *a* und *d*, *b* und *e*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand



Event-Point Schedule →

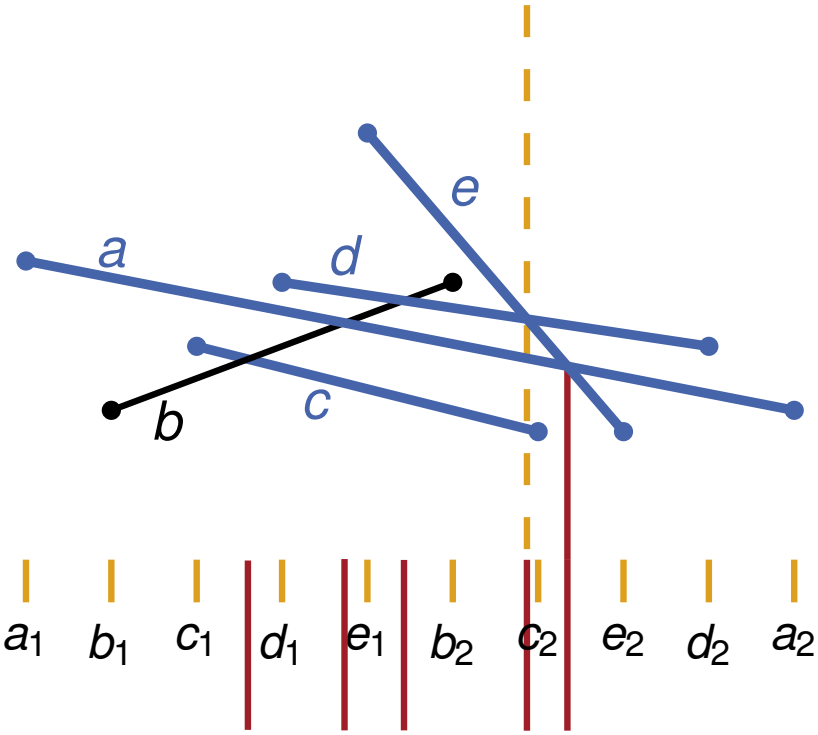
Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *d* und *e*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand

d
e
a
c



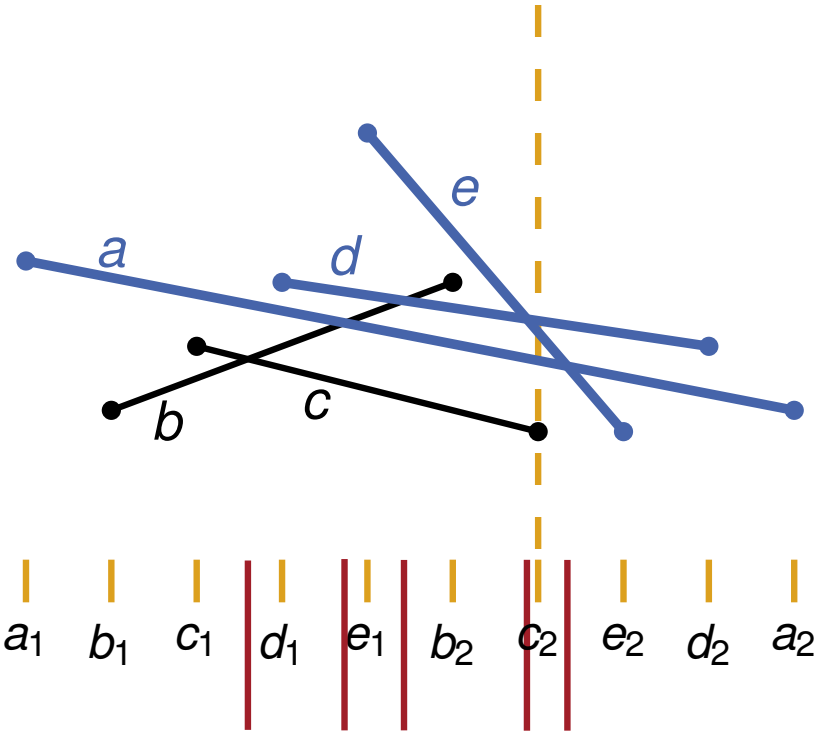
Event-Point Schedule →

Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *a* und *e*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*, *a* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand



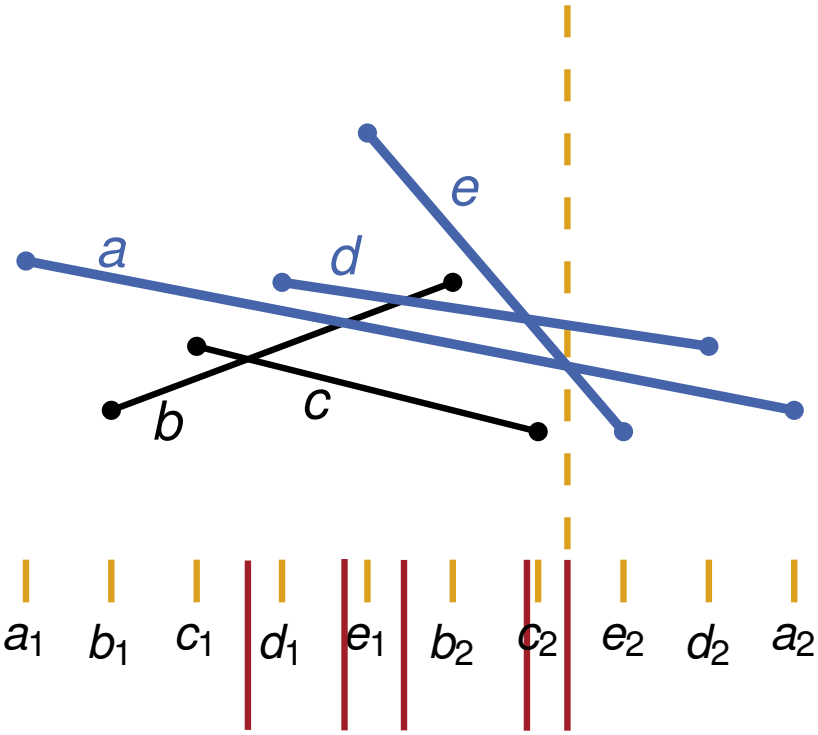
Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen:

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*, *a* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand

d
a
e



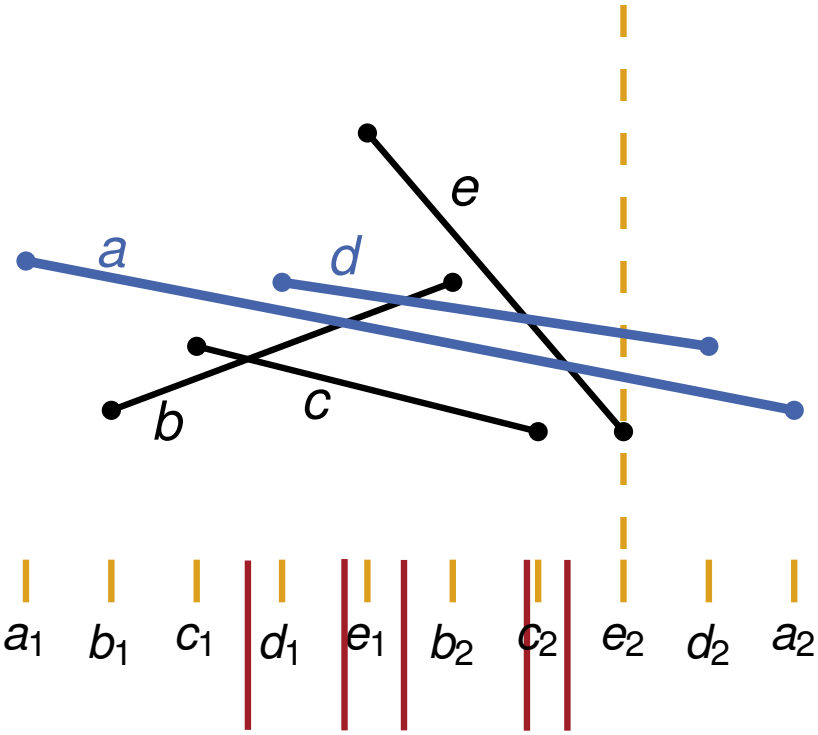
Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen: *a* und *d*

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*, *a* und *e*

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand



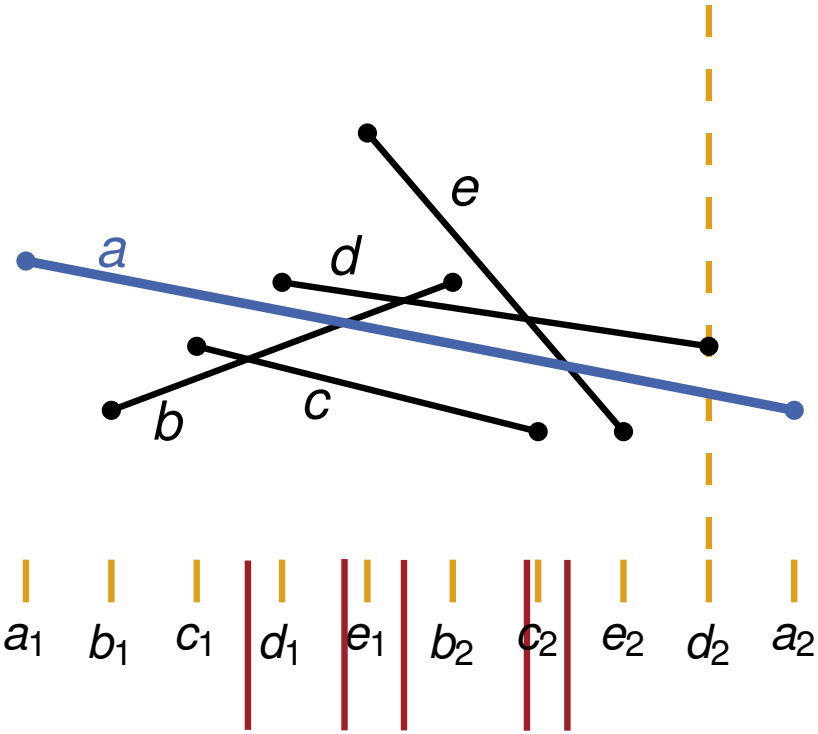
Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen:

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*, *a* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand

a



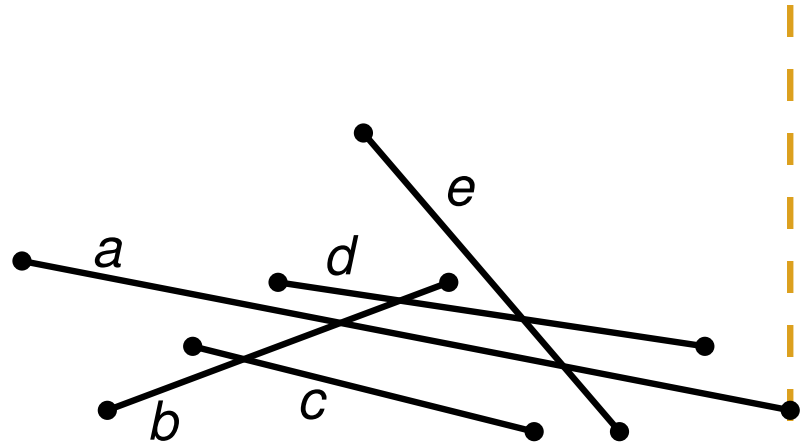
Event-Point Schedule →

Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen:

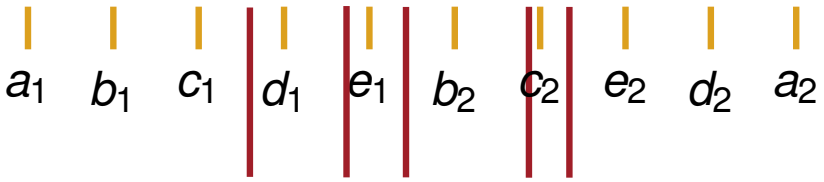
Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*, *a* und *e*

Problem 1(b) – Beispiel

Sweep-Line Zustand



Event-Point Schedule



Paare die aktuell auf Schnitt getesten werden müssen:

Schnitt gefunden zwischen: *a* und *b*, *b* und *c*, *b* und *d*, *d* und *e*, *a* und *e*

Problem 1(b)

INTERSECTIONS(S)

$T \leftarrow \emptyset$

$L \leftarrow$ Sortiere Endpunkte der Strecken von links nach rechts

foreach *Haltepunkt p in L* **do**

if *p linker Endpunkt von Strecke s* **then**

INSERT(T, s)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, BELOW(T, s), L)

if *p rechter Endpunkt von Strecke s* **then**

CHECK-FOR-INTERSECTION(ABOVE(T, s), BELOW(T, s), L)

DELETE(T, s)

if *p Schnittpunkt von Strecken* s_1 *und* s_2 *(mit* $s_1 < s_2$ *in* T*)* **then**

EXCHANGE(T, s_1, s_2)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_2, BELOW(T, s), L)

Erinnerung: ABOVE(T, s) (BELOW(T, s)) ist die Strecke oberhalb (unterhalb) von s.

Außerdem: EXCHANGE(T, s_1, s_2) vertauscht die Reihenfolge von s_1 und s_2 in T.

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, s_2, L)

if s_1 *und* s_2 *schneiden sich im Punkt p mit* $p \notin L$ **then**

Gib aus: „Schnittpunkt zwischen s_1 und s_2: p“

INSERT(L, p)

Problem 1(b)

INTERSECTIONS(S)

$T \leftarrow \emptyset$

$L \leftarrow$ Sortiere Endpunkte der Strecken von links nach rechts

foreach *Haltepunkt p in L* **do**

if *p linker Endpunkt von Strecke s* **then**

INSERT(T, s)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, BELOW(T, s), L)

if *p rechter Endpunkt von Strecke s* **then**

CHECK-FOR-INTERSECTION(ABOVE(T, s), BELOW(T, s), L)

DELETE(T, s)

if *p Schnittpunkt von Strecken* s_1 *und* s_2 *(mit* $s_1 < s_2$ *in* T*)* **then**

EXCHANGE(T, s_1, s_2)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_2, BELOW(T, s), L)

Erinnerung: ABOVE(T, s) (BELOW(T, s)) ist die Strecke oberhalb (unterhalb) von s.

Außerdem: EXCHANGE(T, s_1, s_2) vertauscht die Reihenfolge von s_1 und s_2 in T.

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, s_2, L) $O(\log n)$

if s_1 *und* s_2 *schneiden sich im Punkt p mit* $p \notin L$ **then**

Gib aus: „Schnittpunkt zwischen s_1 und s_2: p“

INSERT(L, p)

Problem 1(b)

INTERSECTIONS(S)

$T \leftarrow \emptyset$

$L \leftarrow$ Sortiere Endpunkte der Strecken von links nach rechts

foreach *Haltepunkt p in L* **do**

if *p linker Endpunkt von Strecke s* **then** $O(\log n)$

INSERT(T, s)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, BELOW(T, s), L)

if *p rechter Endpunkt von Strecke s* **then** $O(\log n)$

CHECK-FOR-INTERSECTION(ABOVE(T, s), BELOW(T, s), L)

DELETE(T, s)

if *p Schnittpunkt von Strecken* s_1 *und* s_2 *(mit* $s_1 < s_2$ *in* T*)* **then** $O(\log n)$

EXCHANGE(T, s_1, s_2)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_2, BELOW(T, s), L)

Erinnerung: ABOVE(T, s) (BELOW(T, s)) ist die Strecke oberhalb (unterhalb) von s.

Außerdem: EXCHANGE(T, s_1, s_2) vertauscht die Reihenfolge von s_1 und s_2 in T.

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, s_2, L) $O(\log n)$

if s_1 *und* s_2 *schneiden sich im Punkt p mit* $p \notin L$ **then**

Gib aus: „Schnittpunkt zwischen s_1 und s_2: p“

INSERT(L, p)

Problem 1(b)

INTERSECTIONS(S)

$T \leftarrow \emptyset$

$L \leftarrow$ Sortiere Endpunkte der Strecken von links nach rechts — $O(n \log n)$

foreach *Haltepunkt p in L* **do** — $O((n+k)\log n)$

if *p linker Endpunkt von Strecke s* **then** — $O(\log n)$

INSERT(T, s)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, BELOW(T, s), L)

if *p rechter Endpunkt von Strecke s* **then** — $O(\log n)$

CHECK-FOR-INTERSECTION(ABOVE(T, s), BELOW(T, s), L)

DELETE(T, s)

if *p Schnittpunkt von Strecken* s_1 *und* s_2 *(mit* $s_1 < s_2$ *in* T*)* **then** — $O(\log n)$

EXCHANGE(T, s_1, s_2)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_2, BELOW(T, s), L)

Erinnerung: ABOVE(T, s) (BELOW(T, s)) ist die Strecke oberhalb (unterhalb) von s.

Außerdem: EXCHANGE(T, s_1, s_2) vertauscht die Reihenfolge von s_1 und s_2 in T.

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, s_2, L) — $O(\log n)$

if s_1 *und* s_2 *schneiden sich im Punkt p mit* $p \notin L$ **then**

Gib aus: „Schnittpunkt zwischen s_1 und s_2: p“

INSERT(L, p)

Problem 1(b)

INTERSECTIONS(S) $O((n+k)\log n)$

$T \leftarrow \emptyset$

$L \leftarrow$ Sortiere Endpunkte der Strecken von links nach rechts $O(n \log n)$

foreach *Haltepunkt p in L* **do** $O((n+k)\log n)$

if *p linker Endpunkt von Strecke s* **then** $O(\log n)$

INSERT(T, s)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s, BELOW(T, s), L)

if *p rechter Endpunkt von Strecke s* **then** $O(\log n)$

CHECK-FOR-INTERSECTION(ABOVE(T, s), BELOW(T, s), L)

DELETE(T, s)

if *p Schnittpunkt von Strecken* s_1 *und* s_2 *(mit* $s_1 < s_2$ *in* T*)* **then** $O(\log n)$

EXCHANGE(T, s_1, s_2)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, ABOVE(T, s), L)

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_2, BELOW(T, s), L)

Erinnerung: ABOVE(T, s) (BELOW(T, s)) ist die Strecke oberhalb (unterhalb) von s.

Außerdem: EXCHANGE(T, s_1, s_2) vertauscht die Reihenfolge von s_1 und s_2 in T.

CHECK-FOR-INTERSECTION(s_1, s_2, L) $O(\log n)$

if s_1 *und* s_2 *schneiden sich im Punkt p mit* $p \notin L$ **then**

Gib aus: „Schnittpunkt zwischen s_1 und s_2: p“

INSERT(L, p)

Problem 1(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

(c) Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus mit $O(n + k)$ Speicherplatz auskommt. Ist es möglich, den nötigen Speicherplatz auf $O(n)$ zu reduzieren?

Problem 1(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

(c) Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus mit $O(n + k)$ Speicherplatz auskommt. Ist es möglich, den nötigen Speicherplatz auf $O(n)$ zu reduzieren?

- Der Sweep-Line Zustand speichert alle Strecken, die von der aktuellen Sweep-Line geschnitten werden $\Rightarrow O(n)$ Speicherplatz.

Problem 1(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

(c) Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus mit $O(n + k)$ Speicherplatz auskommt. Ist es möglich, den nötigen Speicherplatz auf $O(n)$ zu reduzieren?

- Der Sweep-Line Zustand speichert alle Strecken, die von der aktuellen Sweep-Line geschnitten werden $\Rightarrow O(n)$ Speicherplatz.
- Die Haltepunkte im Event-Point Schedule sind entweder Endpunkte von Strecken oder Kreuzungspunkte. $\Rightarrow O(n + k)$ Speicherplatz.

Idee zur Verbesserung auf $O(n)$:

Problem 1(c)

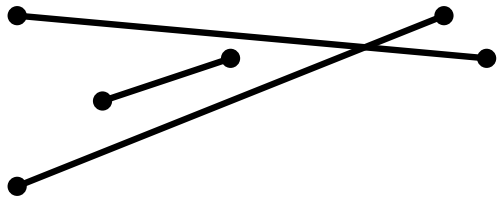
(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

(c) Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus mit $O(n + k)$ Speicherplatz auskommt. Ist es möglich, den nötigen Speicherplatz auf $O(n)$ zu reduzieren?

- Der Sweep-Line Zustand speichert alle Strecken, die von der aktuellen Sweep-Line geschnitten werden $\Rightarrow O(n)$ Speicherplatz.
- Die Haltepunkte im Event-Point Schedule sind entweder Endpunkte von Strecken oder Kreuzungspunkte. $\Rightarrow O(n + k)$ Speicherplatz.

Idee zur Verbesserung auf $O(n)$:

- Lösche schon berechnete Kreuzungen wieder aus dem Event-Point Schedule, wenn die zugehörigen Strecken nicht mehr benachbart sind.



Problem 1(c)

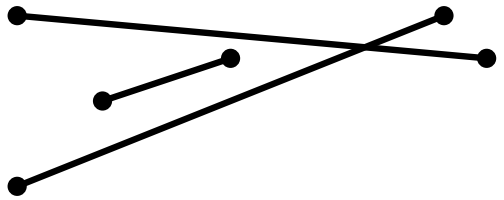
(b) Geben Sie einen Algorithmus an, der *alle* Schnitte zwischen Streckenpaaren in S in $O((n + k) \cdot \log n)$ Zeit berechnet und ausgibt, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte ist.

(c) Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus mit $O(n + k)$ Speicherplatz auskommt. Ist es möglich, den nötigen Speicherplatz auf $O(n)$ zu reduzieren?

- Der Sweep-Line Zustand speichert alle Strecken, die von der aktuellen Sweep-Line geschnitten werden $\Rightarrow O(n)$ Speicherplatz.
- Die Haltepunkte im Event-Point Schedule sind entweder Endpunkte von Strecken oder Kreuzungspunkte. $\Rightarrow O(n + k)$ Speicherplatz.

Idee zur Verbesserung auf $O(n)$:

- Lösche schon berechnete Kreuzungen wieder aus dem Event-Point Schedule, wenn die zugehörigen Strecken nicht mehr benachbart sind.



- Zwei Strecken die sich schneiden aber im aktuellen Sweep-Line Zustand nicht benachbart sind, werden vor dem Schnittpunkt nochmal benachbart sein.

Karlsruher Institut für Technologie

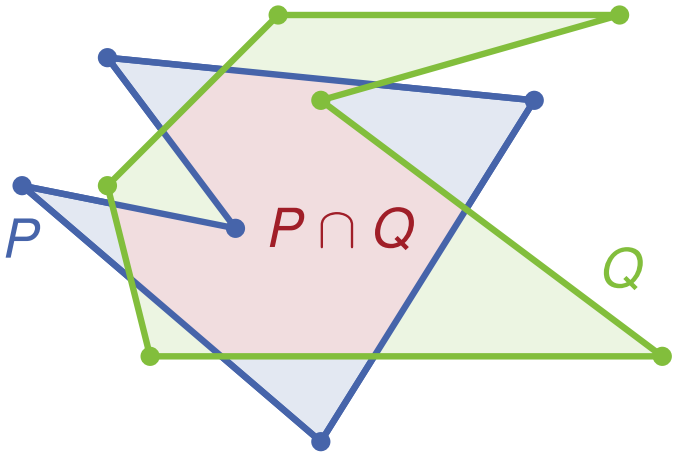
Schnitte von Polygonen

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 2(a)

Seien P und Q zwei einfache Polygone. Als *Schnitt* $P \cap Q$ von P und Q bezeichnen wir die Menge der Punkte, die sowohl im Inneren von P als auch im Inneren von Q liegen. Gehen Sie wie folgt vor, um einen Algorithmus mit $O((n+k) \cdot \log n)$ Laufzeit zur Berechnung von $P \cap Q$ zu entwerfen, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte zwischen Polygonkanten ist.

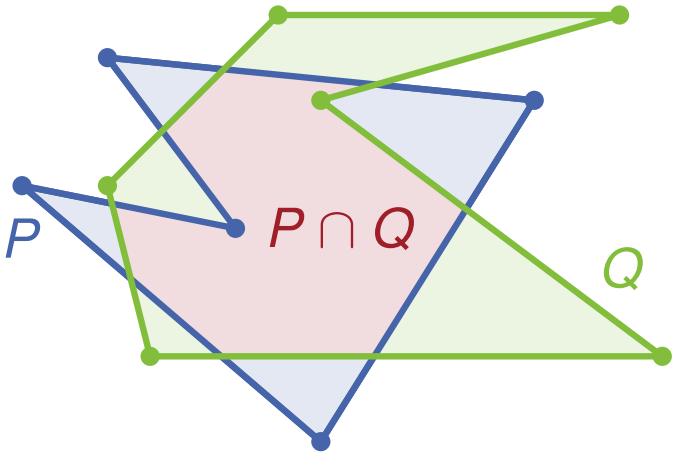
(a) Machen Sie sich klar, dass $P \cap Q$ aus dem Inneren mehrerer Polygone bestehen kann.

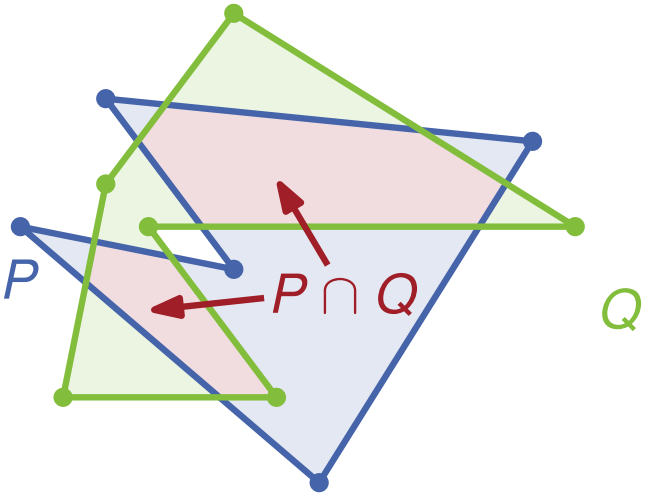


Problem 2(a)

Seien P und Q zwei einfache Polygone. Als *Schnitt* $P \cap Q$ von P und Q bezeichnen wir die Menge der Punkte, die sowohl im Inneren von P als auch im Inneren von Q liegen. Gehen Sie wie folgt vor, um einen Algorithmus mit $O((n+k) \cdot \log n)$ Laufzeit zur Berechnung von $P \cap Q$ zu entwerfen, wobei k die Anzahl der Schnittpunkte zwischen Polygonkanten ist.

(a) Machen Sie sich klar, dass $P \cap Q$ aus dem Inneren mehrerer Polygone bestehen kann.



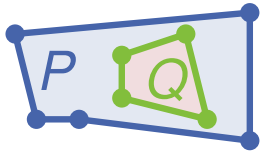


Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

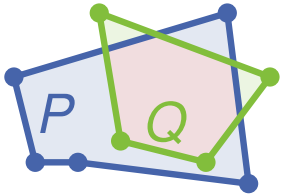
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.

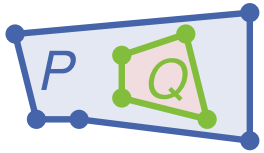


3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.

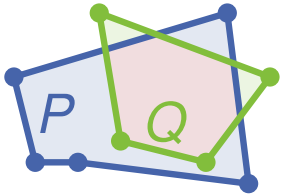
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.

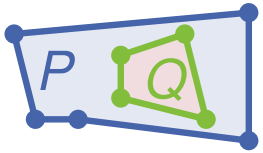


Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

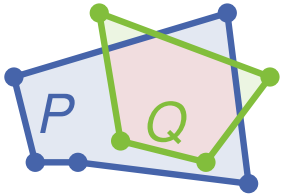
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.



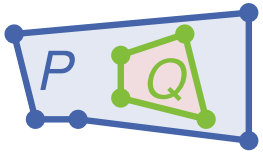
Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn es in P eine Kante gibt, die eine Kante in Q schneidet.
- Kann in $O(n \log n)$ Zeit mit Verfahren aus der Vorlesung getestet werden.

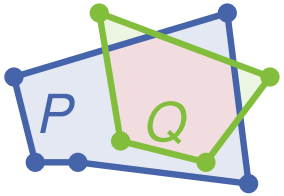
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.



Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

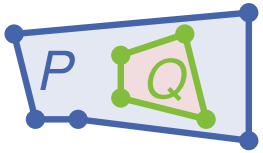
- Tritt genau dann ein, wenn es in P eine Kante gibt, die eine Kante in Q schneidet.
- Kann in $O(n \log n)$ Zeit mit Verfahren aus der Vorlesung getestet werden.

Falls Fall 3 nicht gilt, teste ob **Fall 2** eintritt:

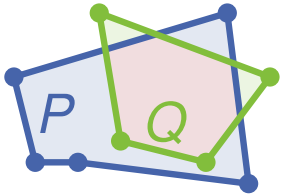
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.



Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn es in P eine Kante gibt, die eine Kante in Q schneidet.
- Kann in $O(n \log n)$ Zeit mit Verfahren aus der Vorlesung getestet werden.

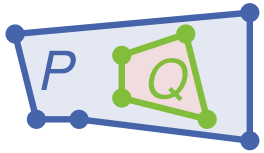
Falls Fall 3 nicht gilt, teste ob **Fall 2** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn alle Punkte aus P in Q liegen oder umgekehrt.

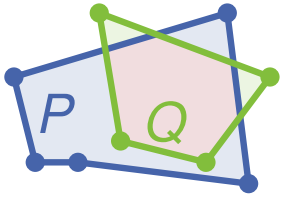
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.



Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn es in P eine Kante gibt, die eine Kante in Q schneidet.
- Kann in $O(n \log n)$ Zeit mit Verfahren aus der Vorlesung getestet werden.

Falls Fall 3 nicht gilt, teste ob **Fall 2** eintritt:

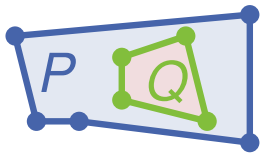
- Tritt genau dann ein, wenn alle Punkte aus P in Q liegen oder umgekehrt.
- Da Fall 3 nicht gilt genügt es diese Eigenschaft für einen Knoten von P (bzw. Q) zu testen.

$\Rightarrow$ Wir müssen nur testen, ob ein Punkt in einem Polygon liegt.

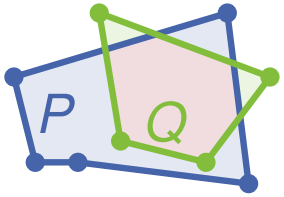
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.
2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.



3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.



Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn es in P eine Kante gibt, die eine Kante in Q schneidet.
- Kann in $O(n \log n)$ Zeit mit Verfahren aus der Vorlesung getestet werden.

Falls Fall 3 nicht gilt, teste ob **Fall 2** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn alle Punkte aus P in Q liegen oder umgekehrt.
- Da Fall 3 nicht gilt genügt es diese Eigenschaft für einen Knoten von P (bzw. Q) zu testen.

$\Rightarrow$ Wir müssen nur testen, ob ein Punkt in einem Polygon liegt.

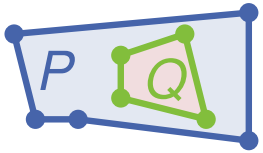
Fall 1 tritt ein, wenn weder Fall 2 noch Fall 3 eintreten.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

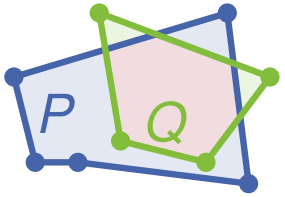
Problem 2(b)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.



2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.



Teste zunächst ob **Fall 3** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn es in P eine Kante gibt, die eine Kante in Q schneidet.
- Kann in $O(n \log n)$ Zeit mit Verfahren aus der Vorlesung getestet werden.

Falls Fall 3 nicht gilt, teste ob **Fall 2** eintritt:

- Tritt genau dann ein, wenn alle Punkte aus P in Q liegen oder umgekehrt.
- Da Fall 3 nicht gilt genügt es diese Eigenschaft für einen Knoten von P (bzw. Q) zu testen.

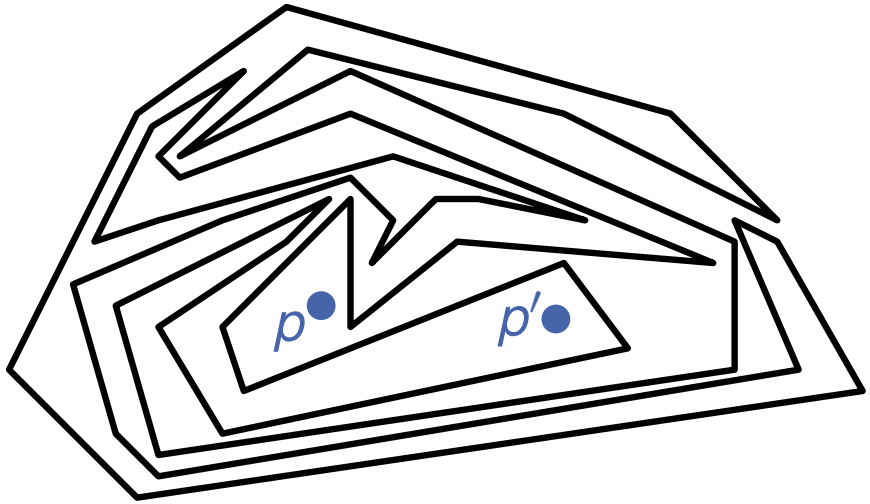
$\Rightarrow$ Wir müssen nur testen, ob ein Punkt in einem Polygon liegt.

Wie geht das?

Fall 1 tritt ein, wenn weder Fall 2 noch Fall 3 eintreten.

Problem 2(b)

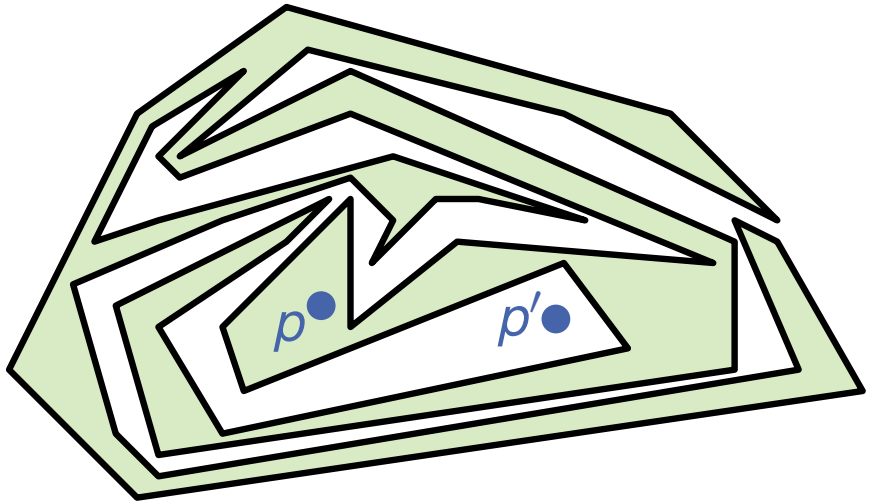
Wie kann man Testen, ob ein Punkt im Inneren eines Polygons P liegt?



Welcher der Punkte liegt in P und welcher außerhalb?

Problem 2(b)

Wie kann man Testen, ob ein Punkt im Inneren eines Polygons P liegt?



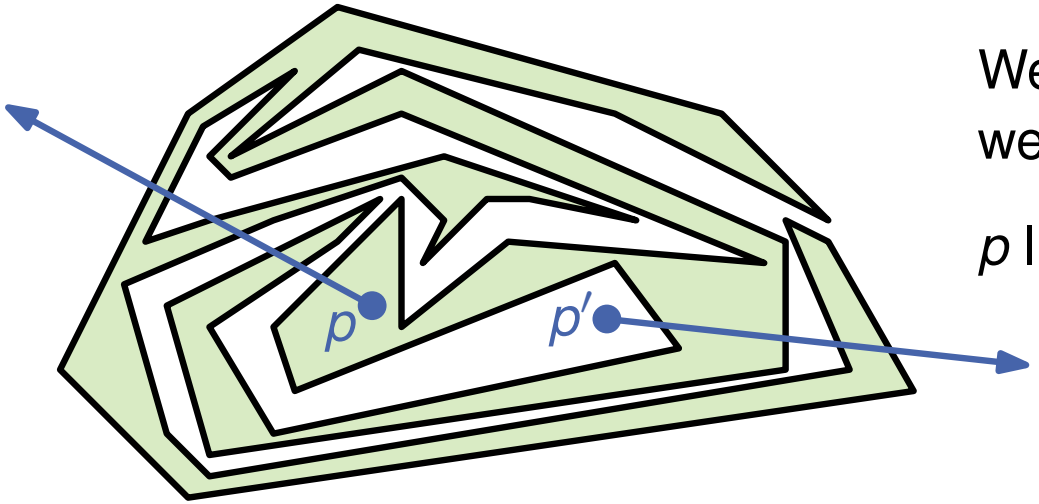
Welcher der Punkte liegt in P und welcher außerhalb?

p liegt innen, p' außen!

Idee für einen Algorithmus:

Problem 2(b)

Wie kann man Testen, ob ein Punkt im Inneren eines Polygons P liegt?



Welcher der Punkte liegt in P und welcher außerhalb?

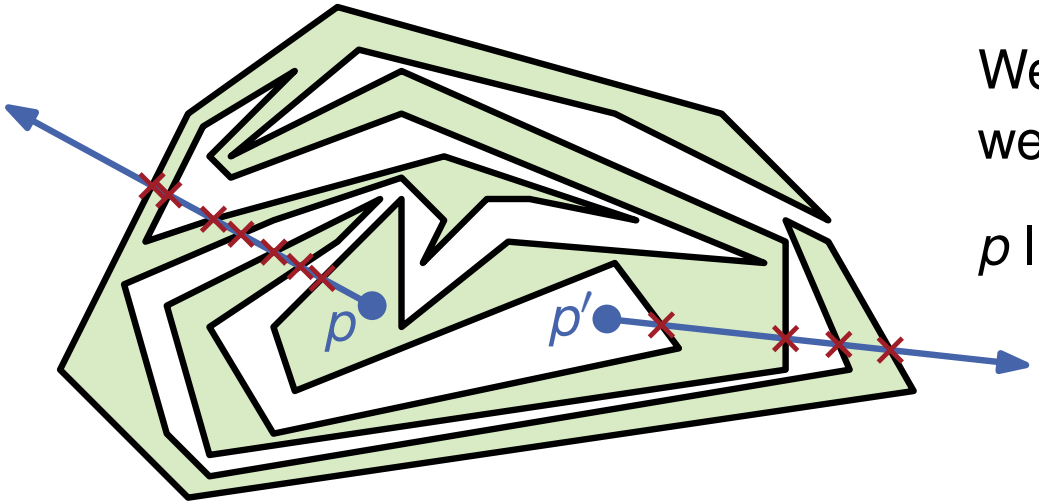
p liegt innen, p' außen!

Idee für einen Algorithmus:

- Schieße Strahl von p aus in irgendeine Richtung.

Problem 2(b)

Wie kann man Testen, ob ein Punkt im Inneren eines Polygons P liegt?



Welcher der Punkte liegt in P und welcher außerhalb?

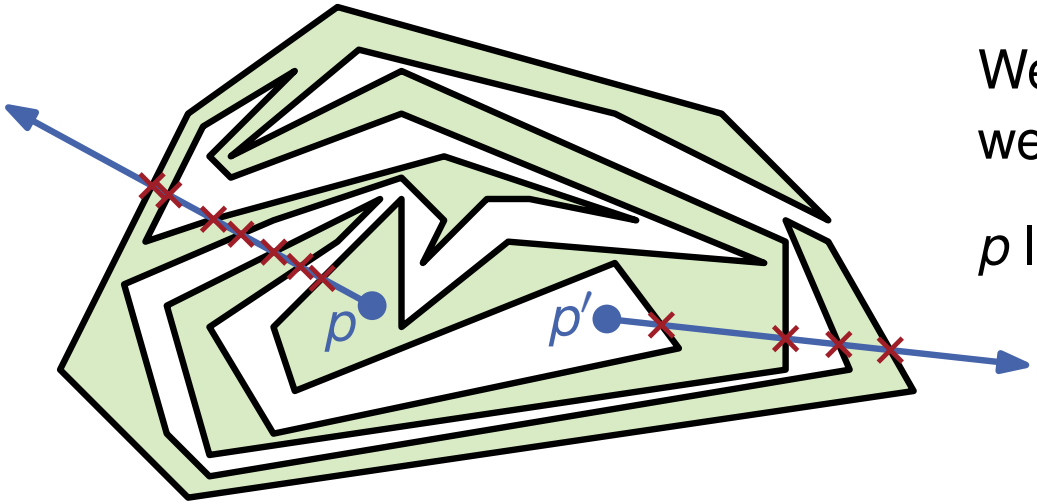
p liegt innen, p' außen!

Idee für einen Algorithmus:

- Schieße Strahl von p aus in irgendeine Richtung.
- Zähle Schnittpunkte mit Polygonkanten:
  bei ungerader Anzahl liegt p innen, sonst außen.

Problem 2(b)

Wie kann man Testen, ob ein Punkt im Inneren eines Polygons P liegt?



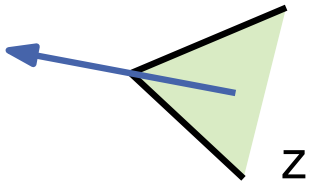
Welcher der Punkte liegt in P und welcher außerhalb?

p liegt innen, p' außen!

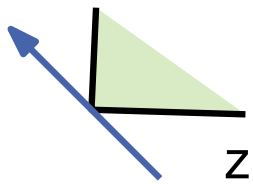
Idee für einen Algorithmus:

- Schieße Strahl von p aus in irgendeine Richtung.
- Zähle Schnittpunkte mit Polygonkanten:
  bei ungerader Anzahl liegt p innen, sonst außen.

Achtung: Man muss aufpassen, wenn der Schnittpunkt ein Knoten von P ist.



zählt als Schnittpunkt



zählt **nicht** als Schnittpunkt

Problem 2(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.
2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.

Problem 2(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.
2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

1. Verwenden Sie als Haltepunkte sowohl die Eckpunkte der beiden Polygone, als auch die Schnittpunkte zwischen Polygonkanten. Welche Fälle können bei Haltepunkten auftreten?

Problem 2(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.
2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

1. Verwenden Sie als Haltepunkte sowohl die Eckpunkte der beiden Polygone, als auch die Schnittpunkte zwischen Polygonkanten. Welche Fälle können bei Haltepunkten auftreten?

Offensichtliche Unterscheidung: Ein Haltepunkt p ist entweder Knoten eines Polygons oder Schnittpunkt zweier Polygonkanten.

Problem 2(c)

(b) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der entscheidet welcher der folgenden drei Fälle auftritt.

1. Der Schnitt $P \cap Q$ ist leer.
2. P ist in Q enthalten oder umgekehrt.
3. Der Schnitt $P \cap Q$ ist nicht leer und weder gleich P noch gleich Q.

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

1. Verwenden Sie als Haltepunkte sowohl die Eckpunkte der beiden Polygone, als auch die Schnittpunkte zwischen Polygonkanten. Welche Fälle können bei Haltepunkten auftreten?

Offensichtliche Unterscheidung: Ein Haltepunkt p ist entweder Knoten eines Polygons oder Schnittpunkt zweier Polygonkanten.

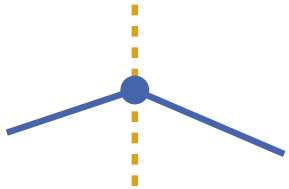
Aber: Man kann diese Fälle noch weiter unterteilen.

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

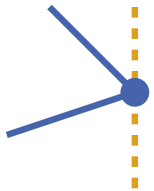
Sei p ein Knoten aus dem Polygon P (für Q analog).

mögliche Formen

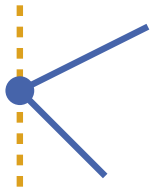
Zwischen-knoten



Endknoten



Startknoten



Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

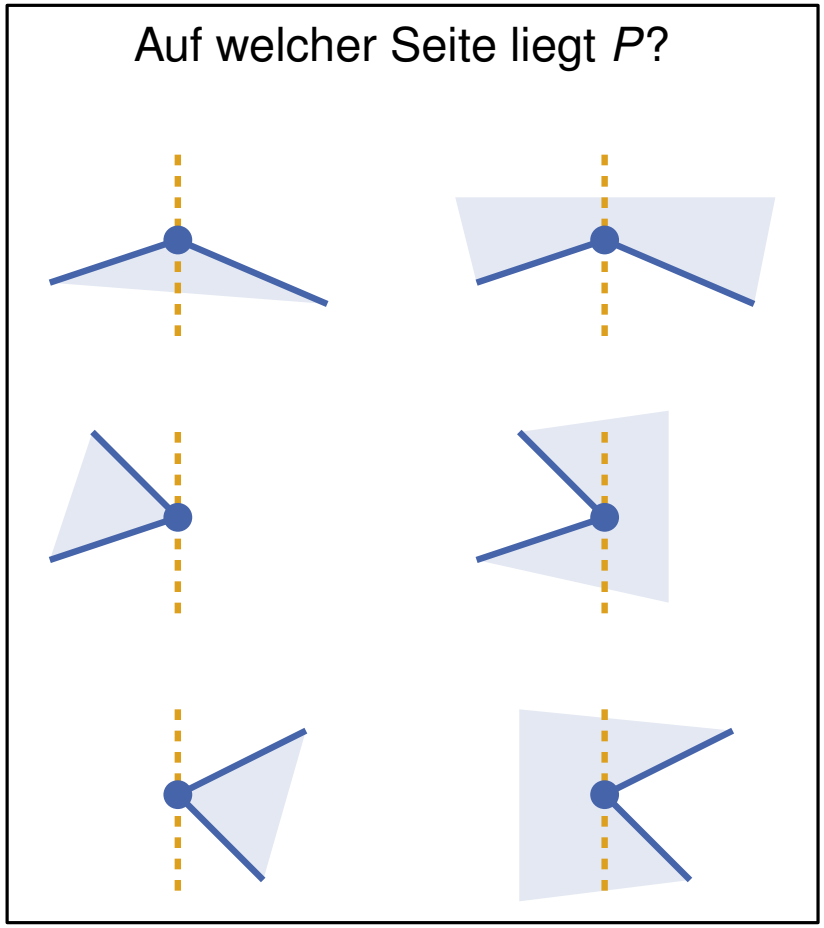
Sei p ein Knoten aus dem Polygon P (für Q analog).

mögliche Formen

Zwischen-knoten

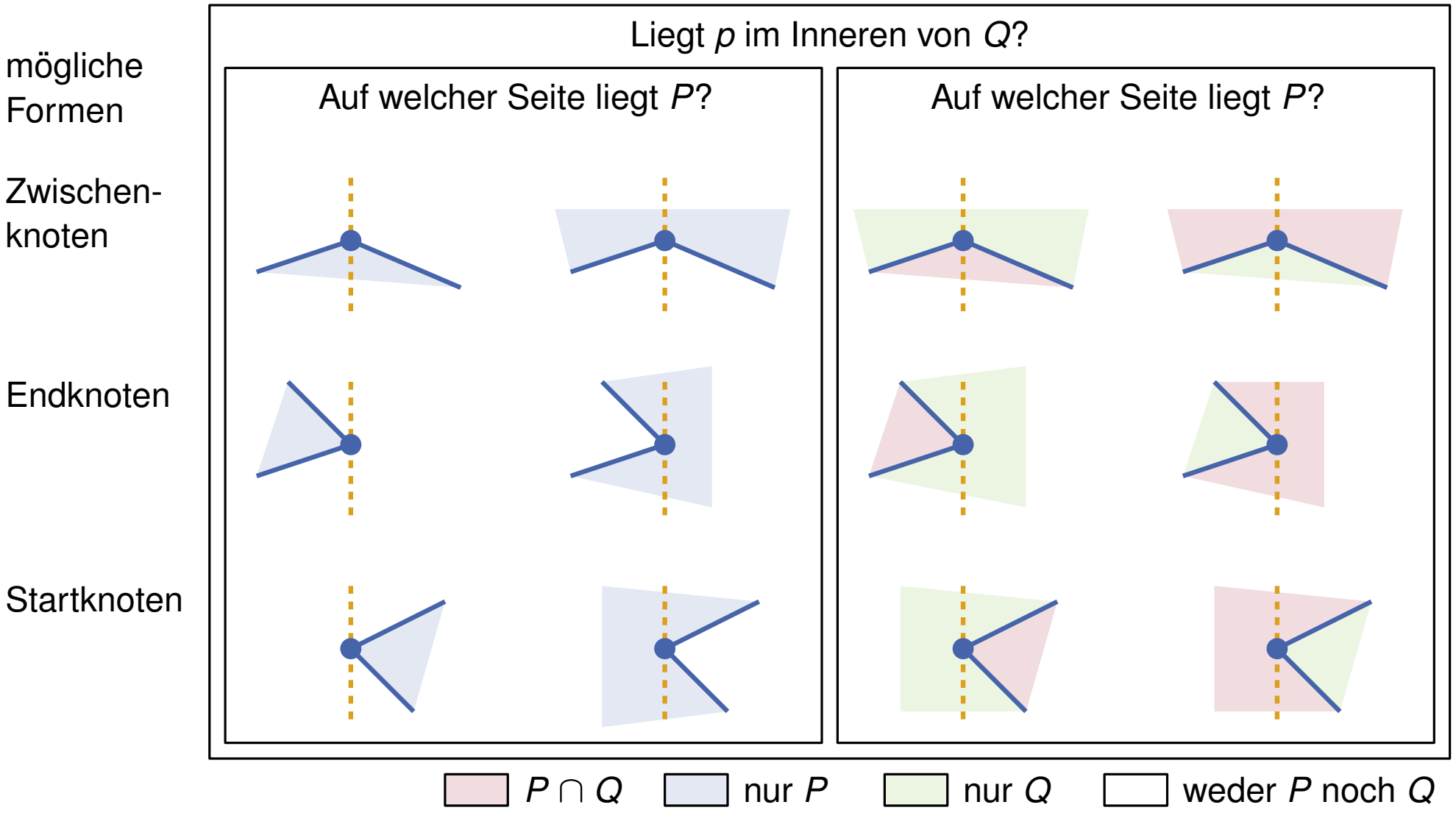
Endknoten

Startknoten



Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

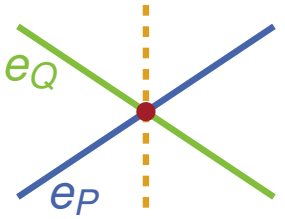
Sei p ein Knoten aus dem Polygon P (für Q analog).



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

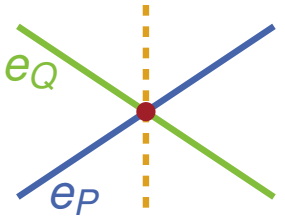
Problem 2(c) – Schnittpunkt als Haltepunkt

Sei p Schnittpunkt zwischen Kanten e_P aus P und Kante e_Q aus Q. Betrachte nur den Fall, dass e_P vor p unterhalb von e_Q liegt (der andere Fall geht analog).



Problem 2(c) – Schnittpunkt als Haltepunkt

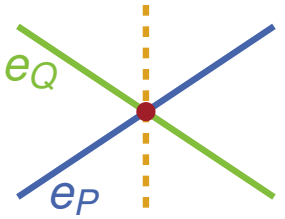
Sei p Schnittpunkt zwischen Kanten e_P aus P und Kante e_Q aus Q. Betrachte nur den Fall, dass e_P vor p unterhalb von e_Q liegt (der andere Fall geht analog).



- P kann ober- oder unterhalb von e_P liegen.
- Q kann ober- oder unterhalb von e_Q liegen.

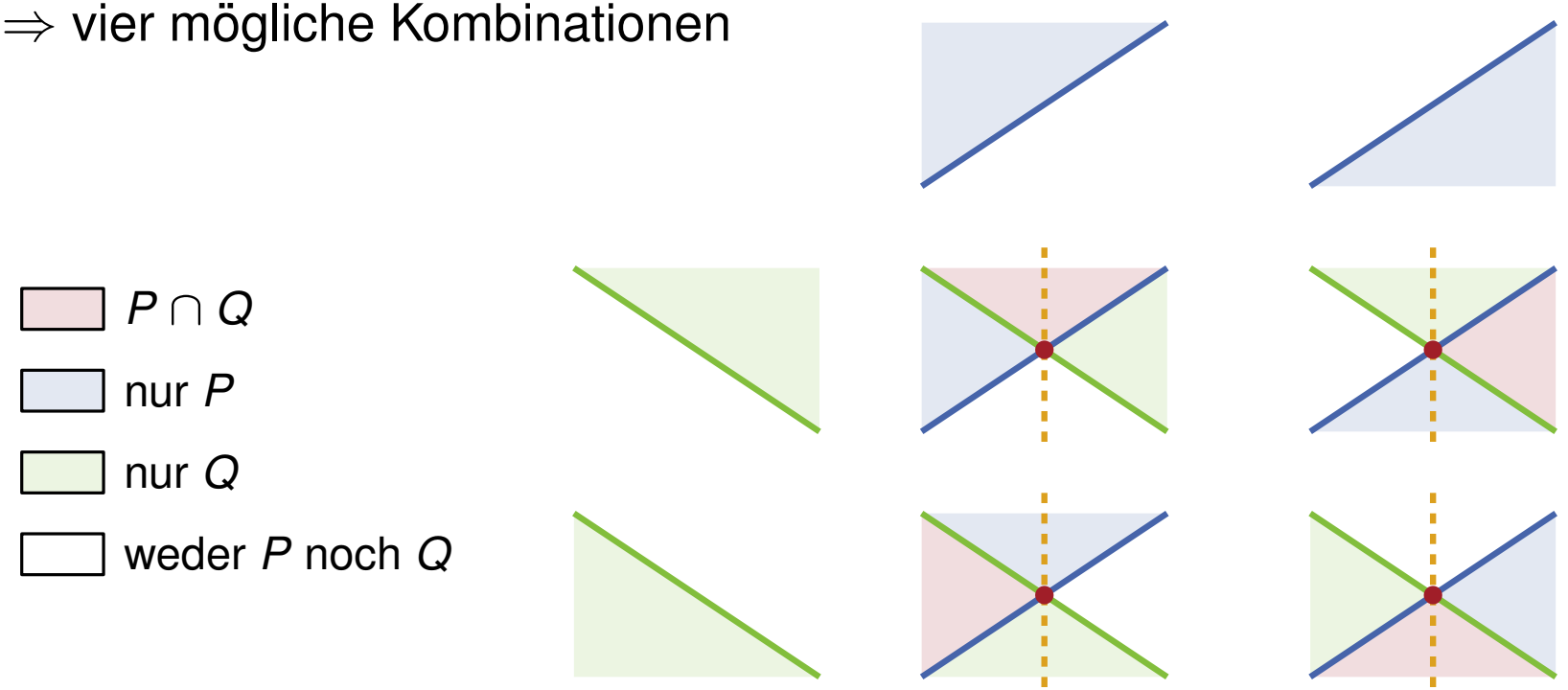
Problem 2(c) – Schnittpunkt als Haltepunkt

Sei p Schnittpunkt zwischen Kanten e_P aus P und Kante e_Q aus Q. Betrachte nur den Fall, dass e_P vor p unterhalb von e_Q liegt (der andere Fall geht analog).



- P kann ober- oder unterhalb von e_P liegen.
- Q kann ober- oder unterhalb von e_Q liegen.

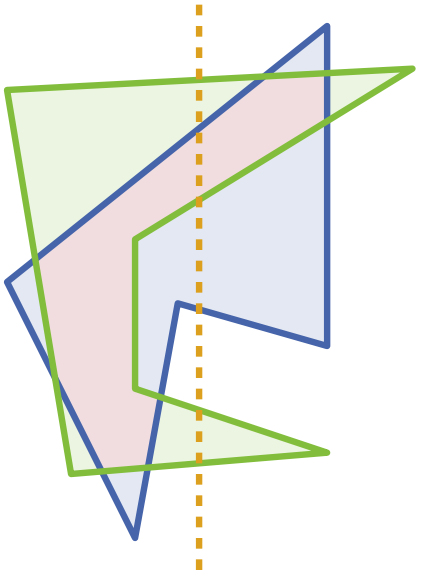
$\Rightarrow$ vier mögliche Kombinationen



Problem 2(c)

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

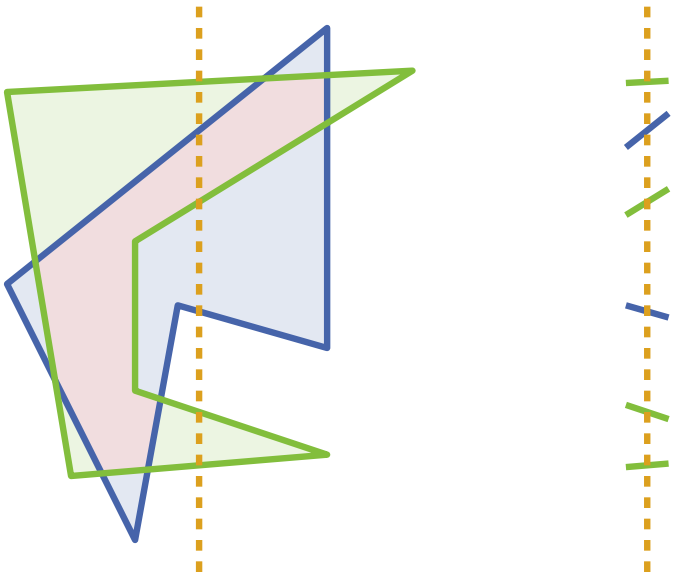
2. Welche Daten sollen als Sweep-Line Zustand gespeichert werden? Dabei sollte zumindest für jeden Punkt auf der aktuellen Sweep-Line bekannt sein, ob er in $P \cap Q$ liegt oder nicht.



Problem 2(c)

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

2. Welche Daten sollen als Sweep-Line Zustand gespeichert werden? Dabei sollte zumindest für jeden Punkt auf der aktuellen Sweep-Line bekannt sein, ob er in $P \cap Q$ liegt oder nicht.

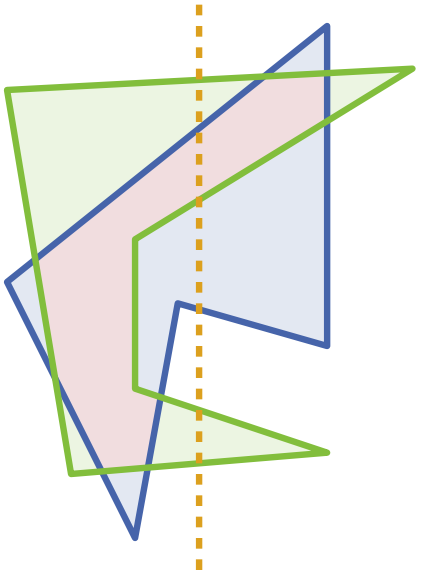


Reihenfolge der Strecken, die die Sweep-Line schneiden.

Problem 2(c)

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

2. Welche Daten sollen als Sweep-Line Zustand gespeichert werden? Dabei sollte zumindest für jeden Punkt auf der aktuellen Sweep-Line bekannt sein, ob er in $P \cap Q$ liegt oder nicht.



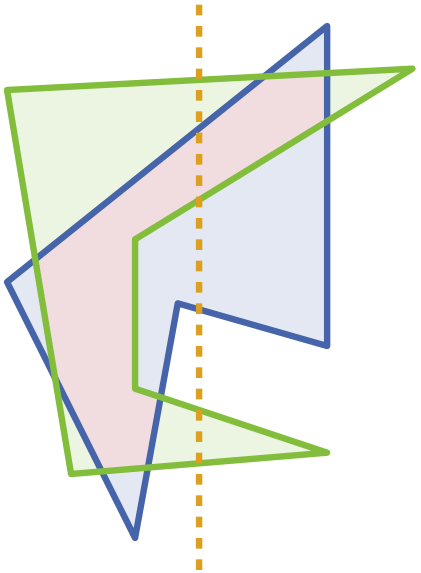
Reihenfolge der Strecken, die die Sweep-Line schneiden.

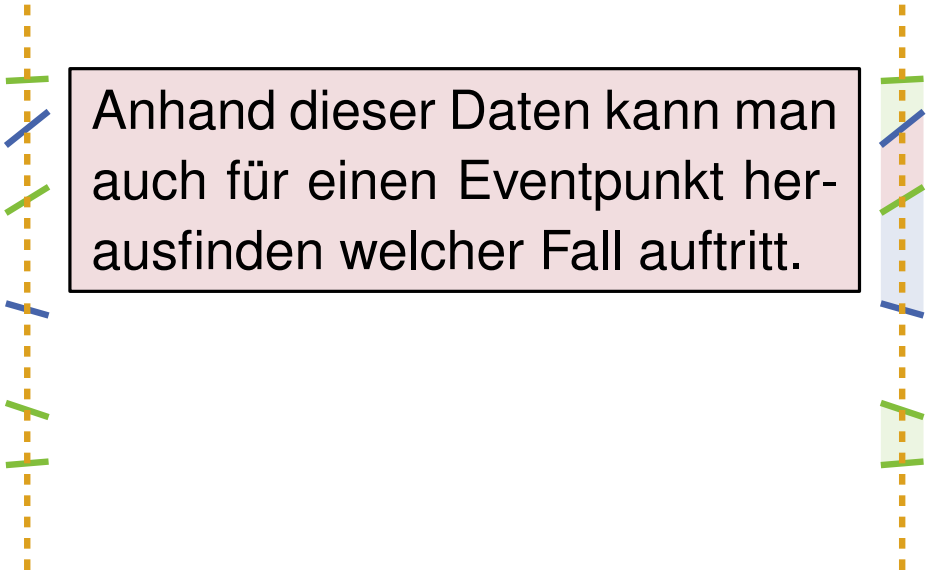
Zerlegung der Sweep-Line in Abschnitte, die in $P \cap Q$, nur in P, nur in Q oder weder in P noch in Q liegen.

Problem 2(c)

(c) Entwickeln Sie im Folgenden einen Sweep-Line Algorithmus, der den Schnitt $P \cap Q$ für den dritten Fall berechnet. Gehen Sie wie folgt vor.

2. Welche Daten sollen als Sweep-Line Zustand gespeichert werden? Dabei sollte zumindest für jeden Punkt auf der aktuellen Sweep-Line bekannt sein, ob er in $P \cap Q$ liegt oder nicht.





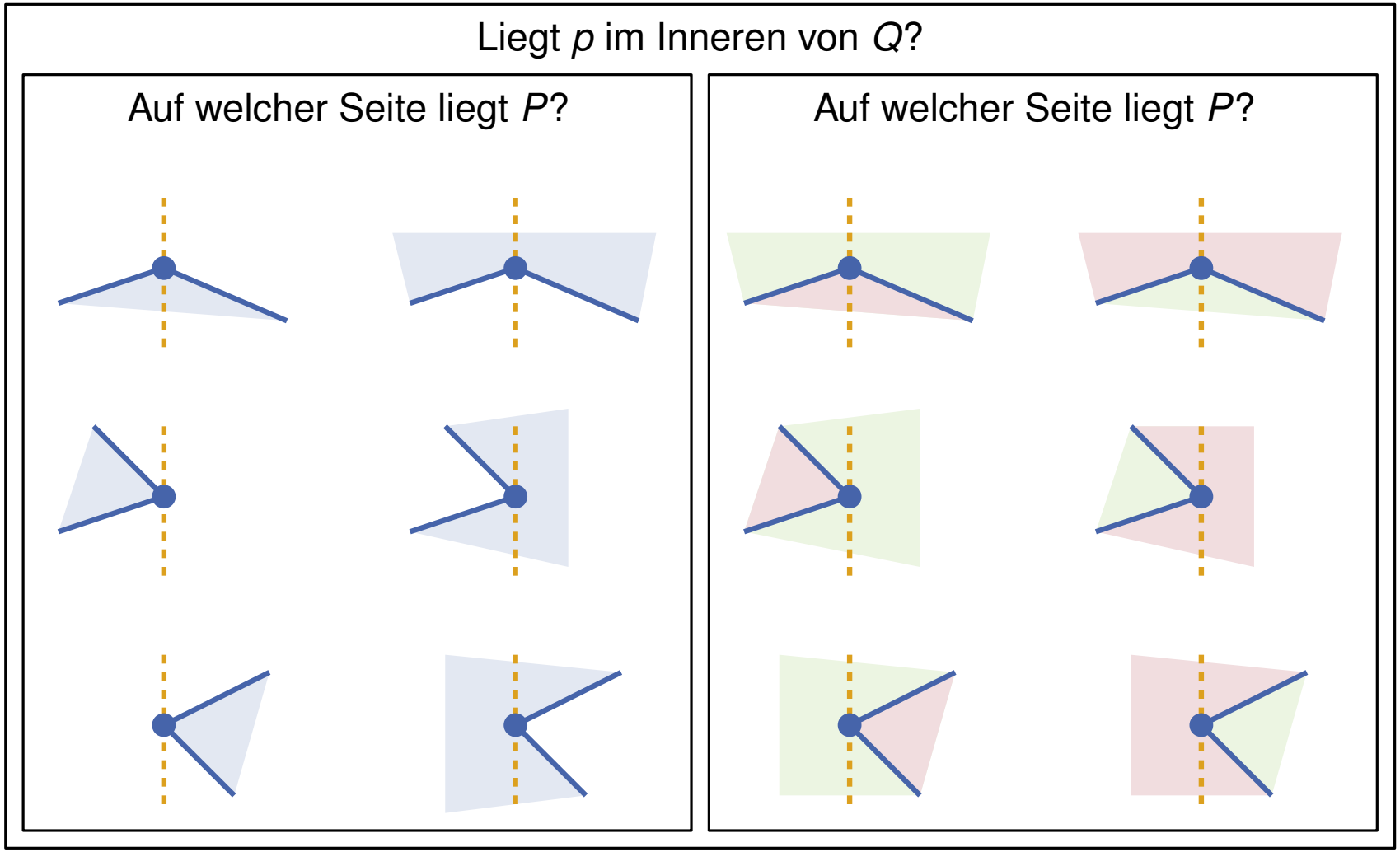
Anhand dieser Daten kann man auch für einen Eventpunkt herausfinden welcher Fall auftritt.

Reihenfolge der Strecken, die die Sweep-Line schneiden.

Zerlegung der Sweep-Line in Abschnitte, die in $P \cap Q$, nur in P, nur in Q oder weder in P noch in Q liegen.

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.



Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

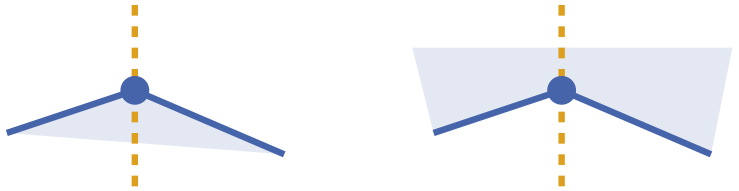
3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.

mögliche Formen

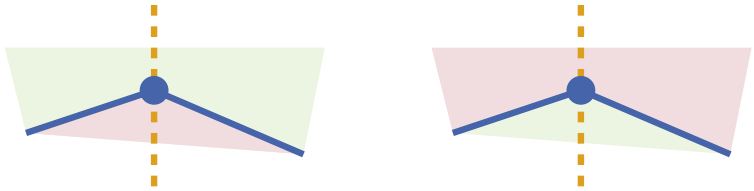
Zwischen-knoten

Liegt p im Inneren von Q?

Auf welcher Seite liegt P?



Auf welcher Seite liegt P?



- Bei Zwischenknoten endet eine Kante e_1 und eine neue Kante e_2 startet.
- Im Sweep-Line Zustand wird e_1 durch e_2 ersetzt.
- Zerlegung der Sweep-Line bleibt wie sie ist.

Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

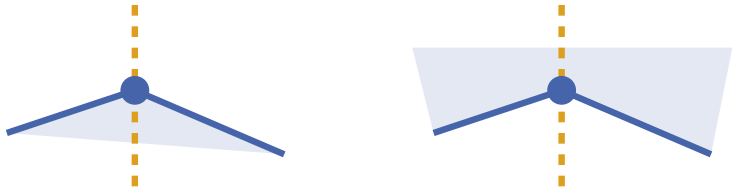
3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.

mögliche Formen

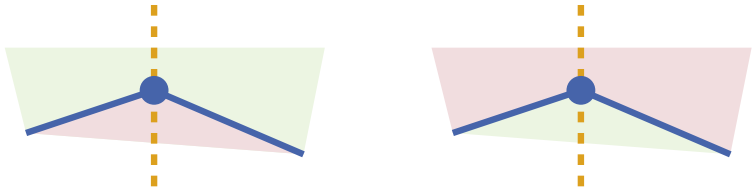
Zwischen-knoten

Liegt p im Inneren von Q?

Auf welcher Seite liegt P?



Auf welcher Seite liegt P?



- Bei Zwischenknoten endet eine Kante e_1 und eine neue Kante e_2 startet.
- Im Sweep-Line Zustand wird e_1 durch e_2 ersetzt.
- Zerlegung der Sweep-Line bleibt wie sie ist.

Nicht vergessen:
Nach der Ersetzung muss e_2 mit seinen neuen Nachbarn (bezüglich der Reihenfolge im Sweep-Line Zustand) auf Schnitt geprüft werden.

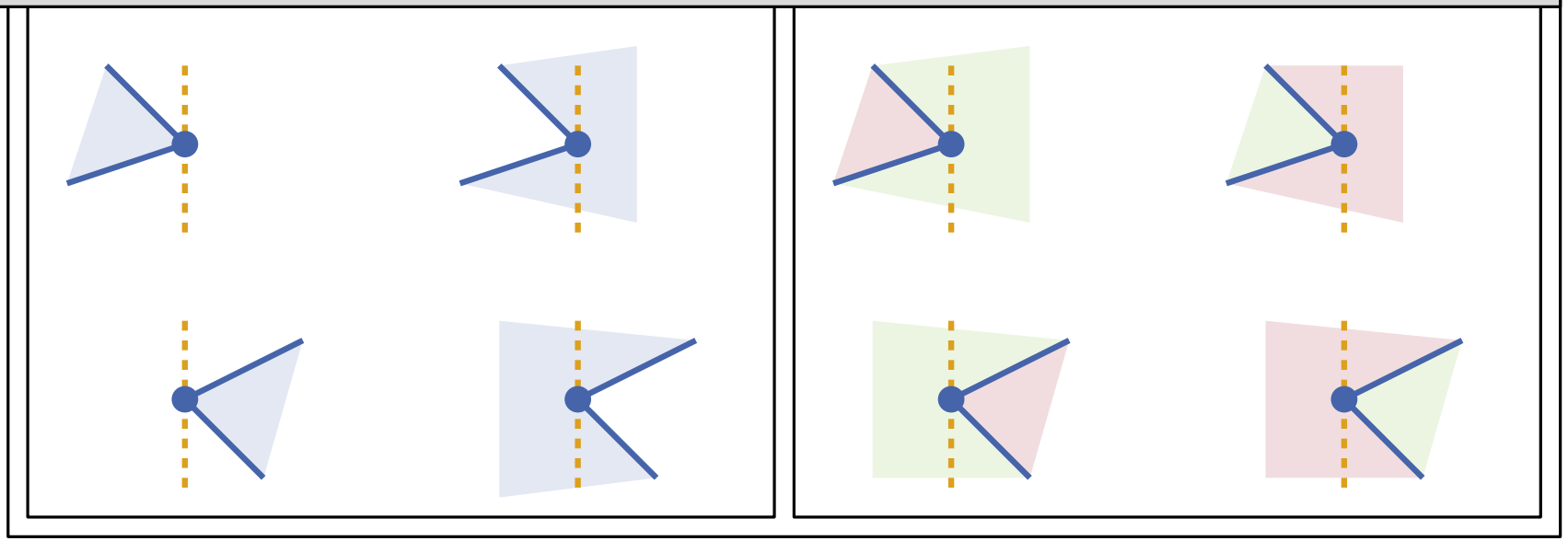
Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

- Bei Endknoten enden zwei Kanten e_1 und e_2, sie werden aus dem Sweep-Line Zustand gelöscht.
- Für die Zerlegung der Sweep-Line gilt: oberhalb von e_1 ist der gleiche Bereich wie unterhalb von e_2. $\rightarrow$ Die beiden Abschnitte fallen zusammen.

Endknoten

Startknoten



Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

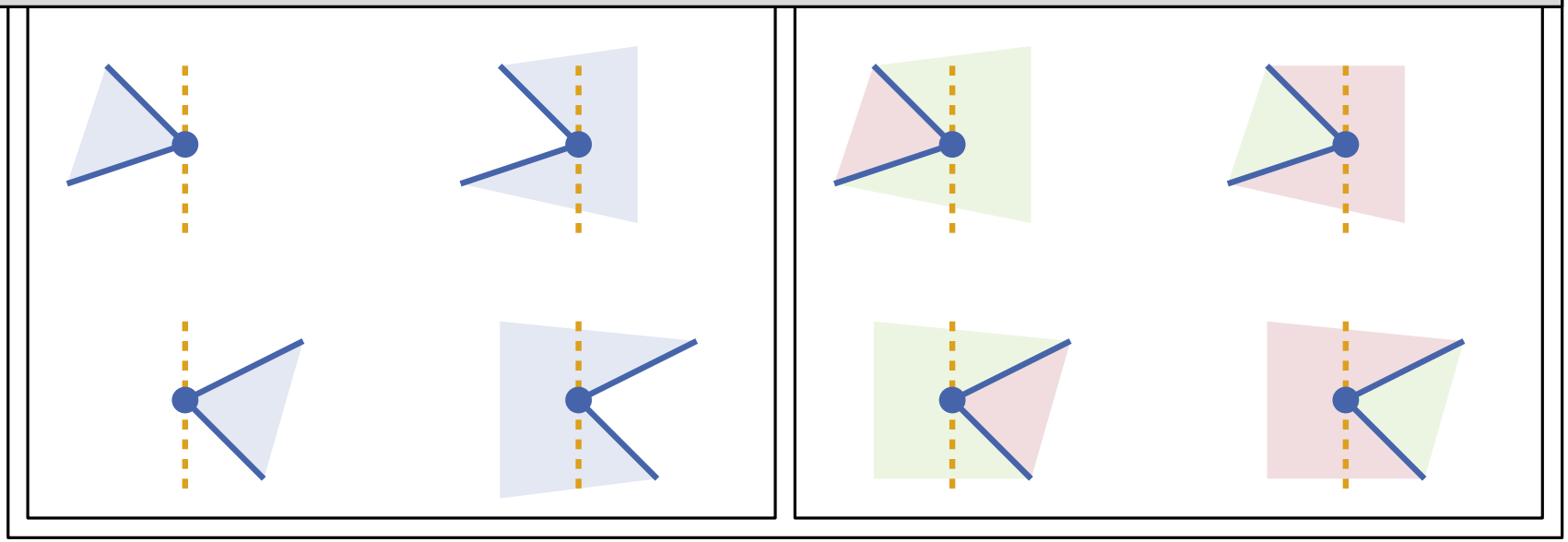
Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

- Bei Endknoten enden zwei Kanten e_1 und e_2, sie werden aus dem Sweep-Line Zustand gelöscht.
- Für die Zerlegung der Sweep-Line gilt: oberhalb von e_1 ist der gleiche Bereich wie unterhalb von e_2. $\rightarrow$ Die beiden Abschnitte fallen zusammen.

Nicht vergessen:
Die Strecken oberhalb von e_1 und unterhalb von e_2 auf Schnitt testen.

Endknoten

Startknoten



Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

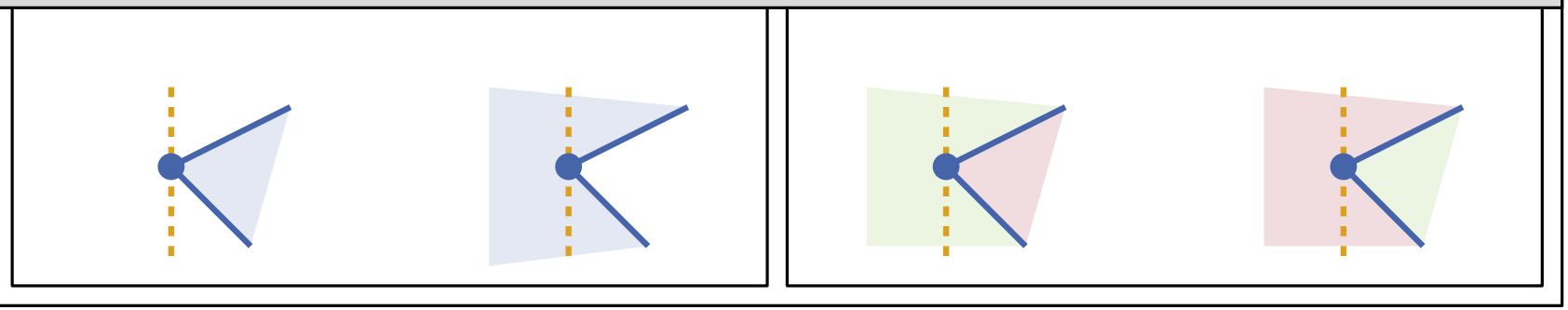
3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.

mögliche

Liegt p im Inneren von Q?

- Bei Startknoten starten zwei neue Kanten e_1 und e_2.
- Füge sie an der richtigen Stelle im Sweep-Line Zustand ein.
- Der Abschnitt in den sie eingefügt werden wird in zwei Teile gespalten, in den oberhalb von e_1 und den unterhalb von e_2.
- Zwischen e_1 und e_2 entsteht ein neuer Abschnitt.

Startknoten



Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

Problem 2(c) – Polygonknoten als Haltepunkt

3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.

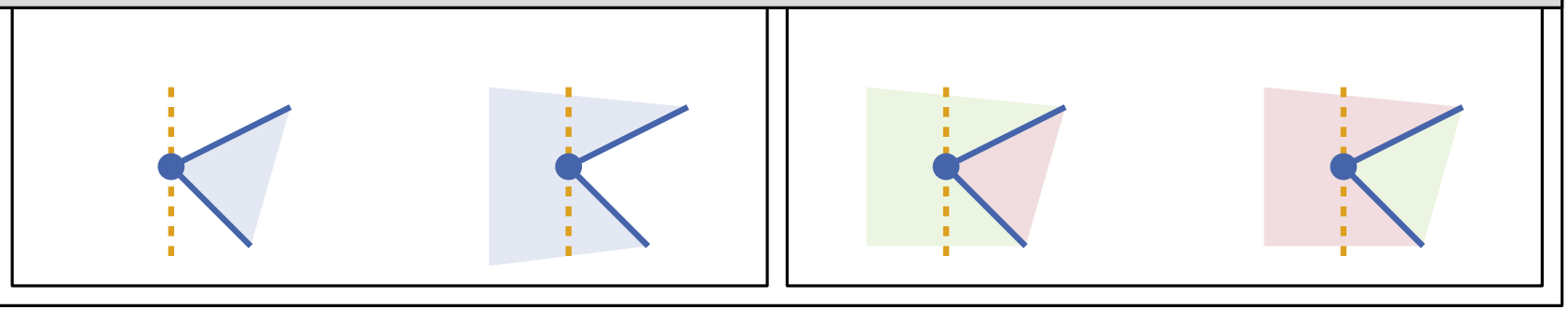
mögliche

Liegt p im Inneren von Q?

- Bei Startknoten starten zwei neue Kanten e_1 und e_2.
- Füge sie an der richtigen Stelle im Sweep-Line Zustand ein.
- Der Abschnitt in den sie eingefügt werden wird in zwei Teile gespalten, in den oberhalb von e_1 und den unterhalb von e_2.
- Zwischen e_1 und e_2 entsteht ein neuer Abschnitt.

Nicht vergessen: . . .

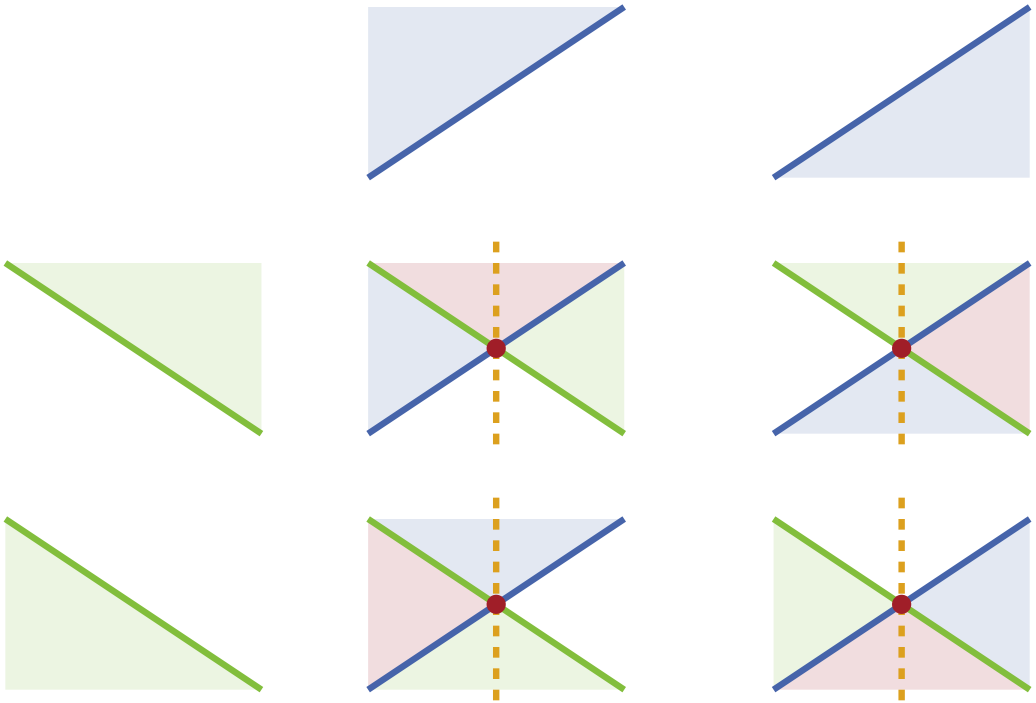
Startknoten



Welcher Fall eintritt kann anhand des Sweep-Line Zustands festgestellt werden!

Problem 2(c) – Schnittpunkt als Haltepunkt

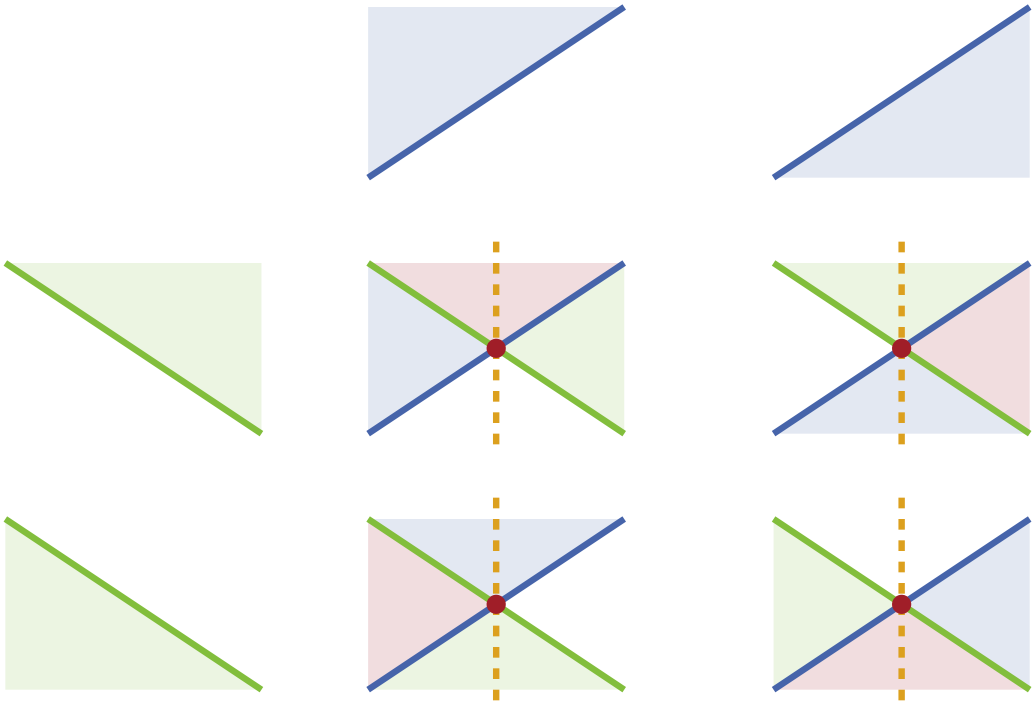
3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.



Seien e_P und e_Q die sich kreuzenden Polygonkanten aus P bzw. Q.

Problem 2(c) – Schnittpunkt als Haltepunkt

3. Wie ändert sich der Sweep-Line Zustand für die in Punkt 1. identifizierten Fälle.



Seien e_P und e_Q die sich kreuzenden Polygonkanten aus P bzw. Q.

- Die Reihenfolge von e_P und e_Q im Sweep-Line Zustand wird vertauscht.
- Zu welchem Bereich der Abschnitt der Sweep-Line zwischen e_P und e_Q hinterher gehört hängt davon ab, zu welchem er vorher gehört hat.

Nicht vergessen:
e_P mit der Strecke oberhalb und e_Q mit der Strecke unterhalb auf Schnitt testen.

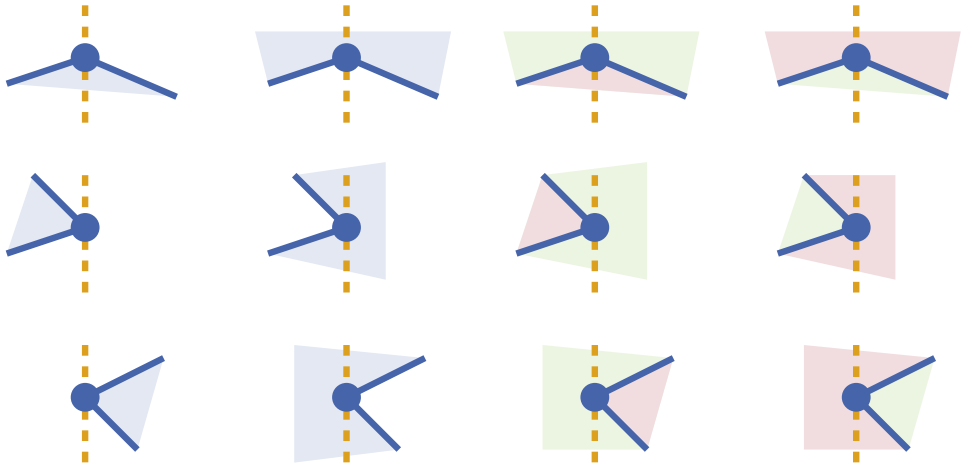
Problem 2(c) – Zusammenfassung

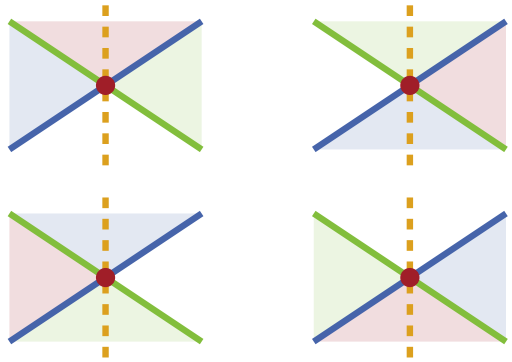
4. Müssen Sie zusätzliche Informationen mitführen, um am Ende den Schnitt $P \cap Q$ als Menge von Polygonen auszugeben?

Problem 2(c) – Zusammenfassung

4. Müssen Sie zusätzliche Informationen mitführen, um am Ende den Schnitt $P \cap Q$ als Menge von Polygonen auszugeben?

- Wir wissen an jedem Haltepunkt welcher Fall eintritt.



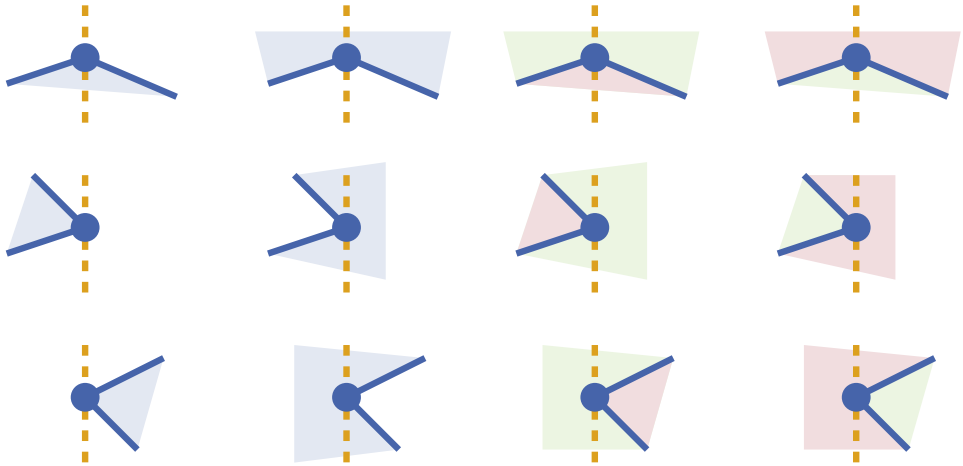


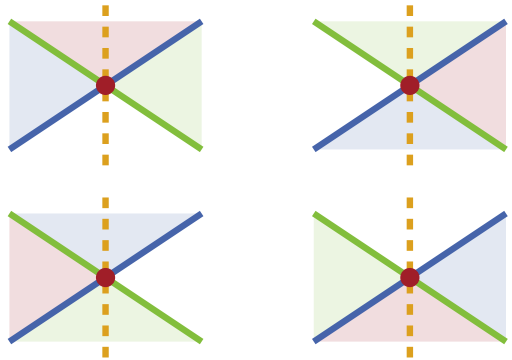
Wie kann man daraus die Polygone berechnen, deren Inneres gerade $P \cap Q$ ist?

Problem 2(c) – Zusammenfassung

4. Müssen Sie zusätzliche Informationen mitführen, um am Ende den Schnitt $P \cap Q$ als Menge von Polygonen auszugeben?

- Wir wissen an jedem Haltepunkt welcher Fall eintritt.

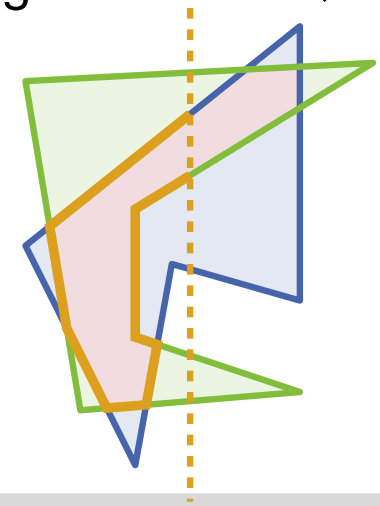




Wie kann man daraus die Polygone berechnen, deren Inneres gerade $P \cap Q$ ist?

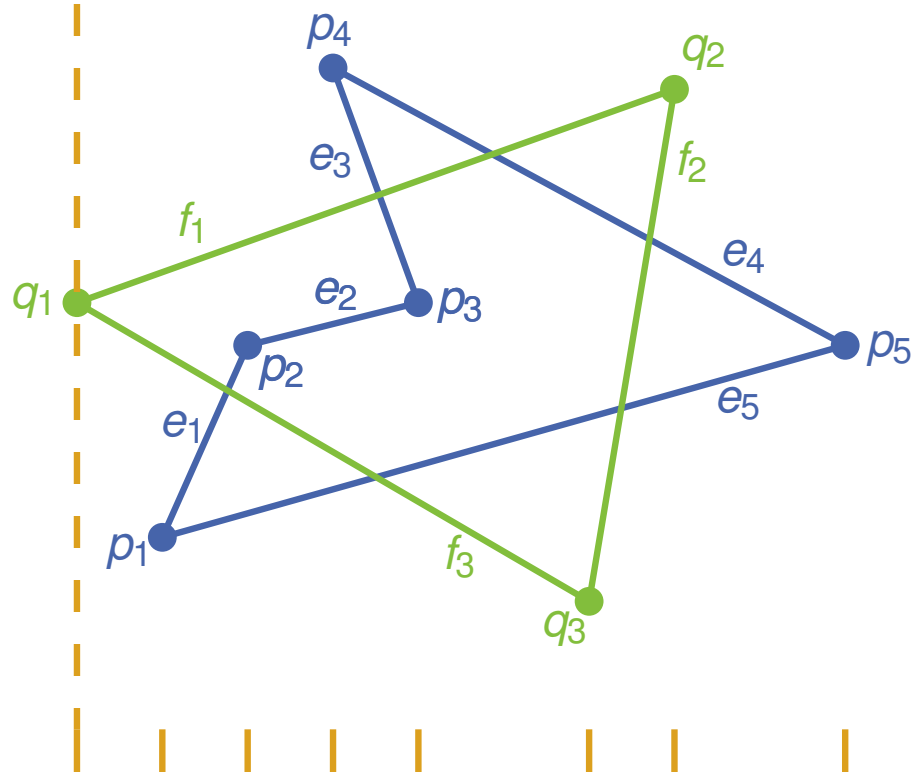
Idee:

- Speichere für jede Kante, die die aktuelle Sweep-Line kreuzt und $P \cap Q$ begrenzt den Polygonzug links von der Sweep-Line, der $P \cap Q$ begrenzt.
- An Haltepunkten werden Polygonzüge fortgesetzt, verschmolzen oder entstehen neu.



Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)

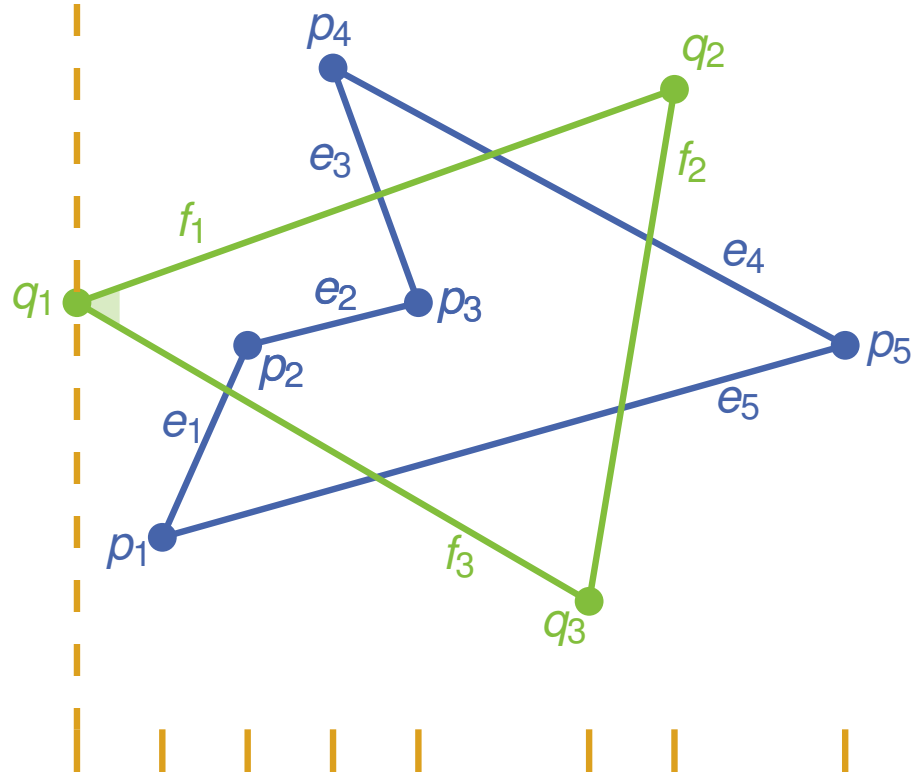


Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)

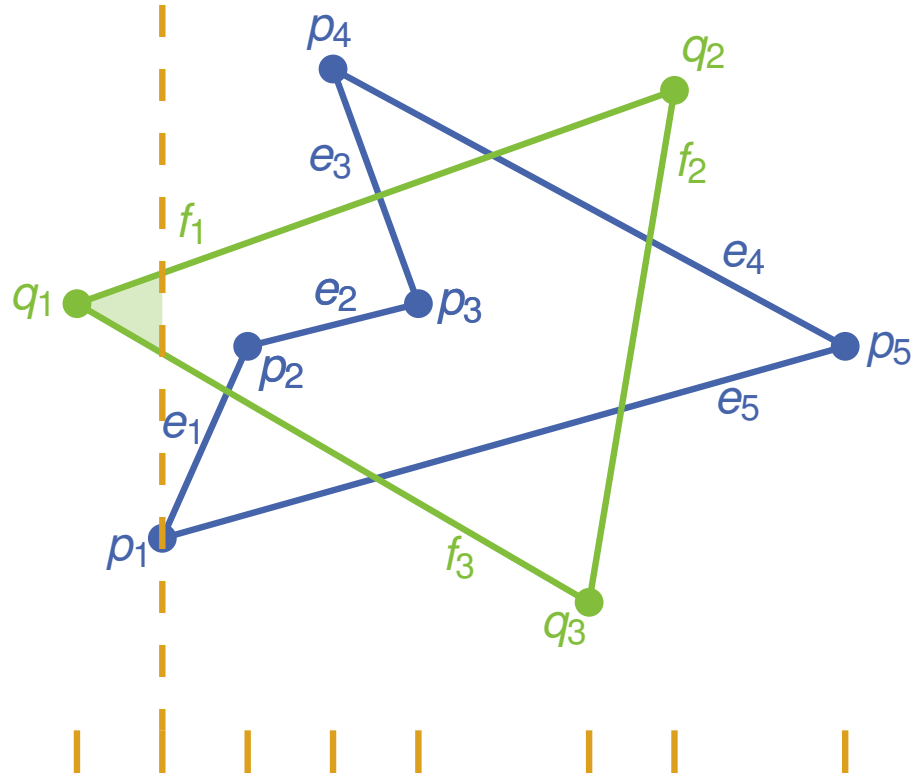


Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)

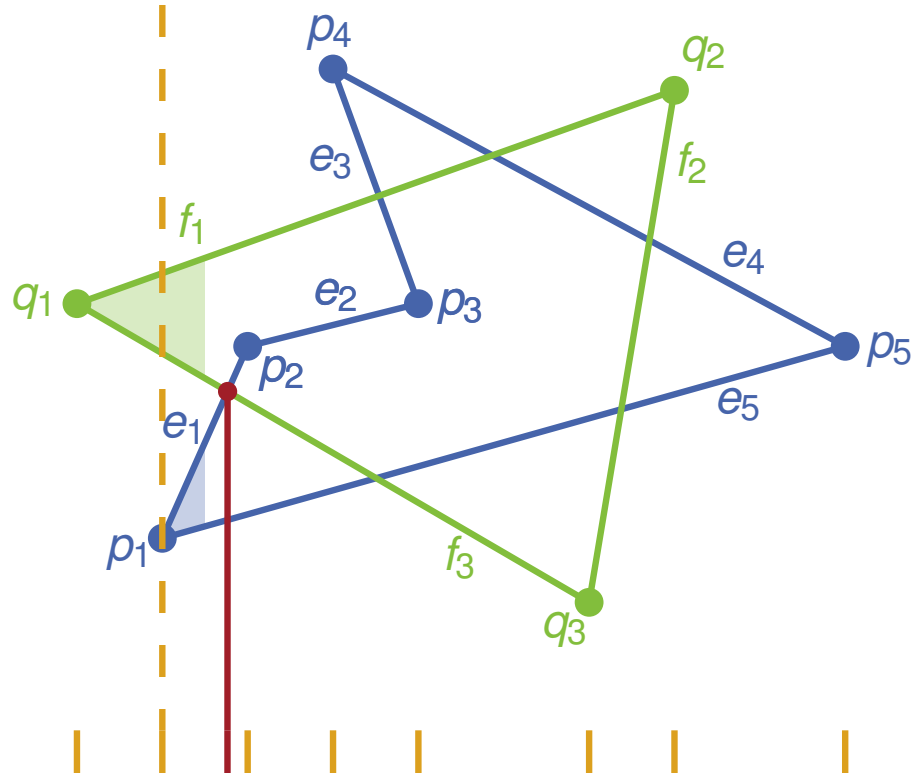


Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)

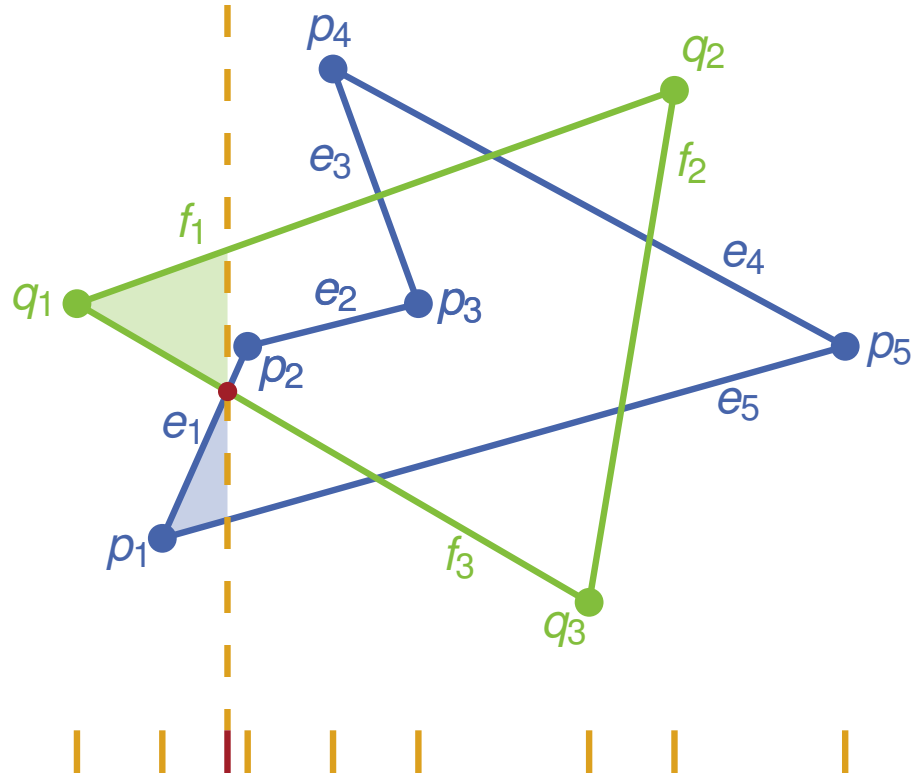


Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)

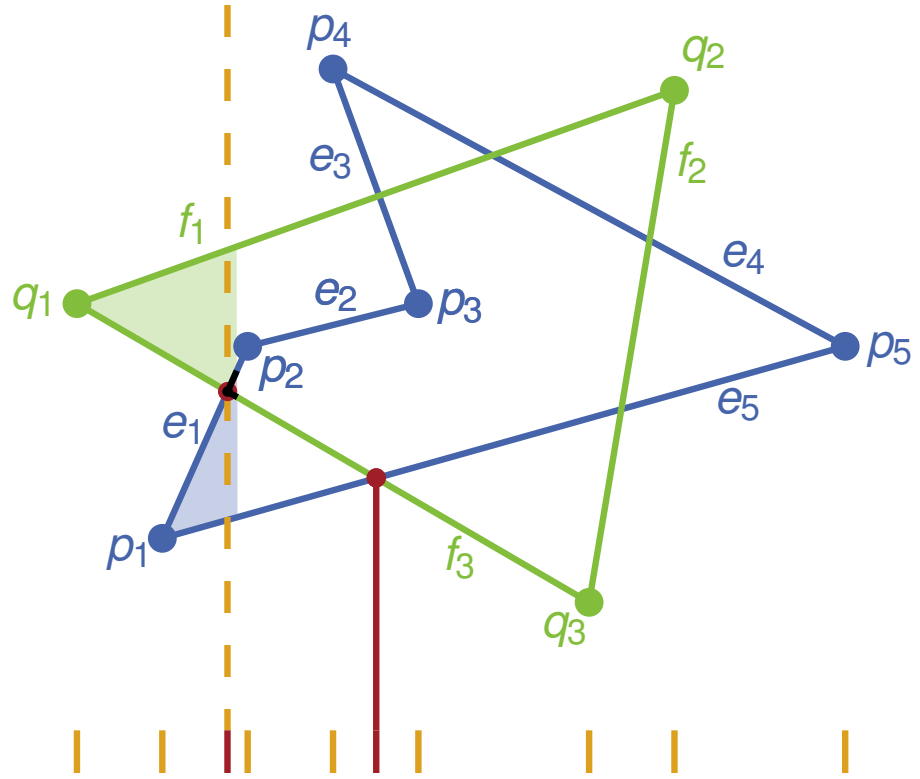


Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



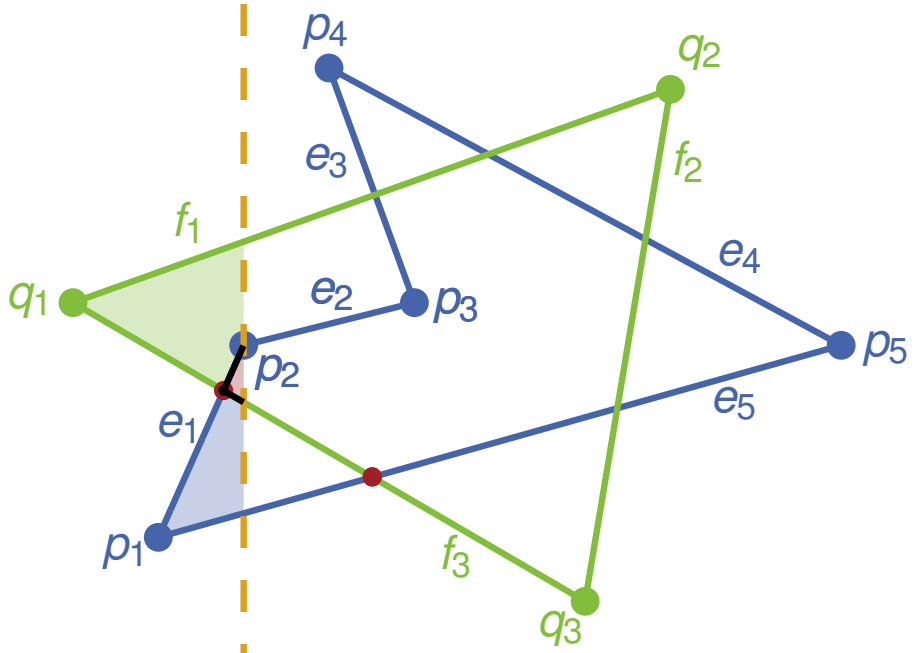
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_3) \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow (e_1)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



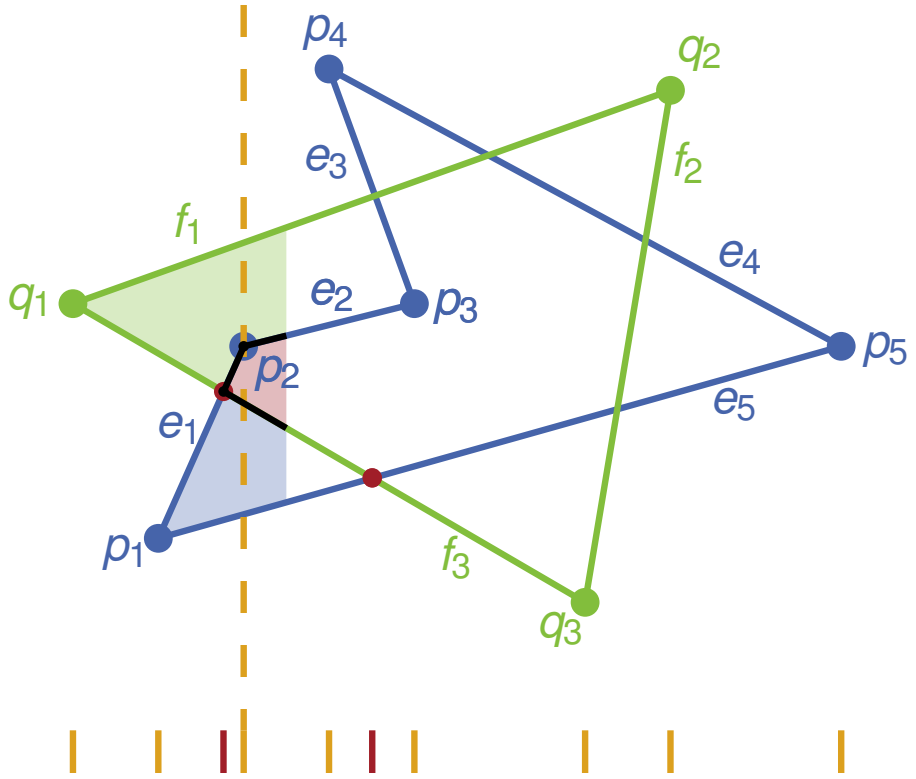
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_3) \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow (e_1)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



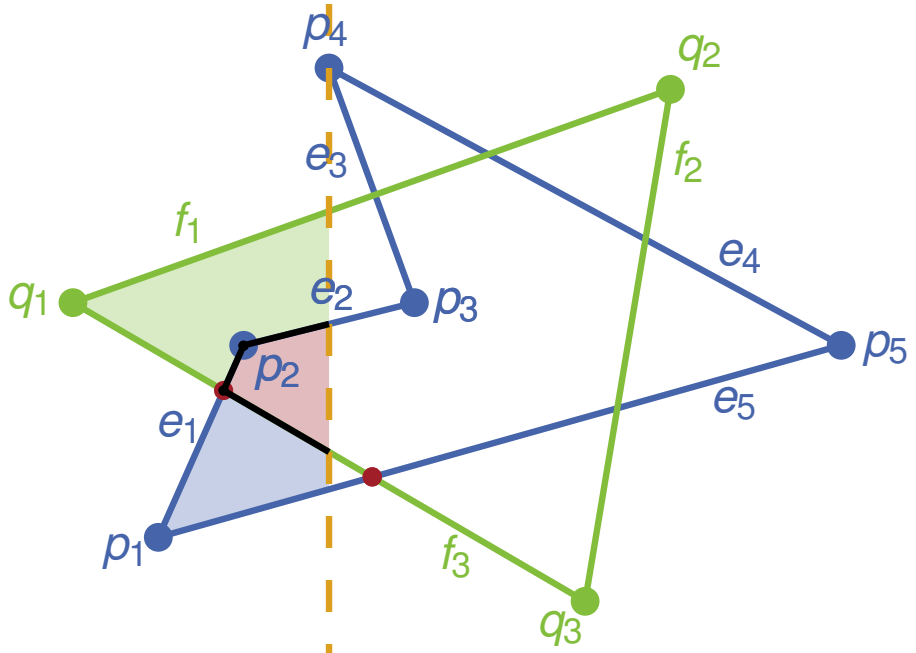
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_3) \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



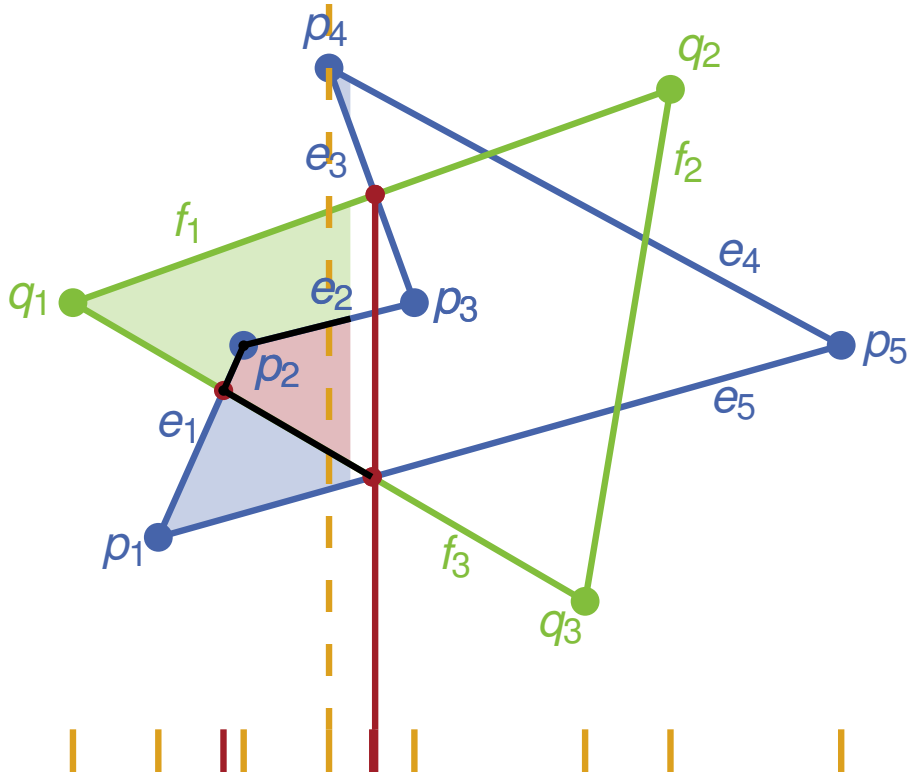
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_3) \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

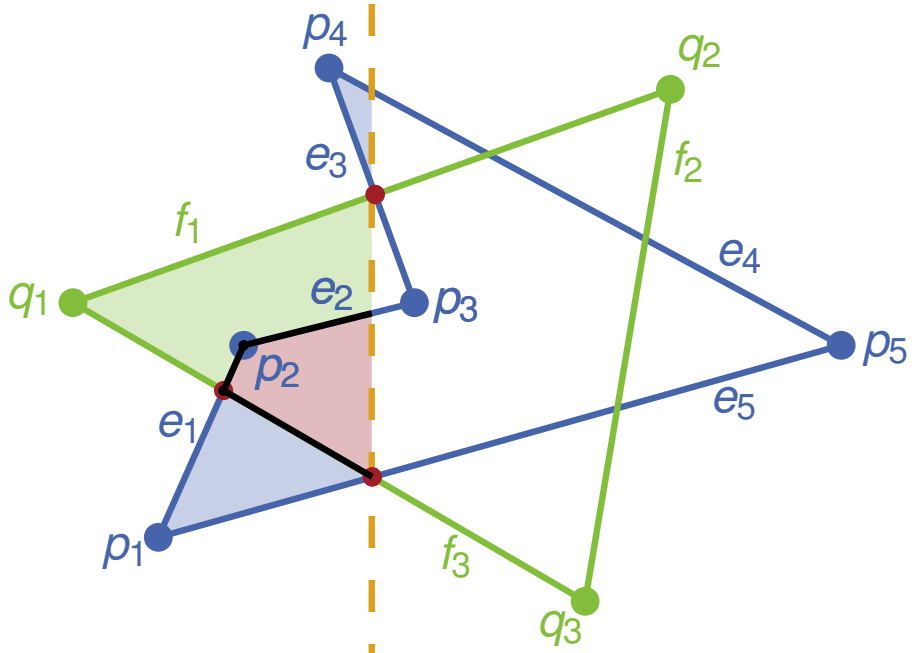
bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_3) \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



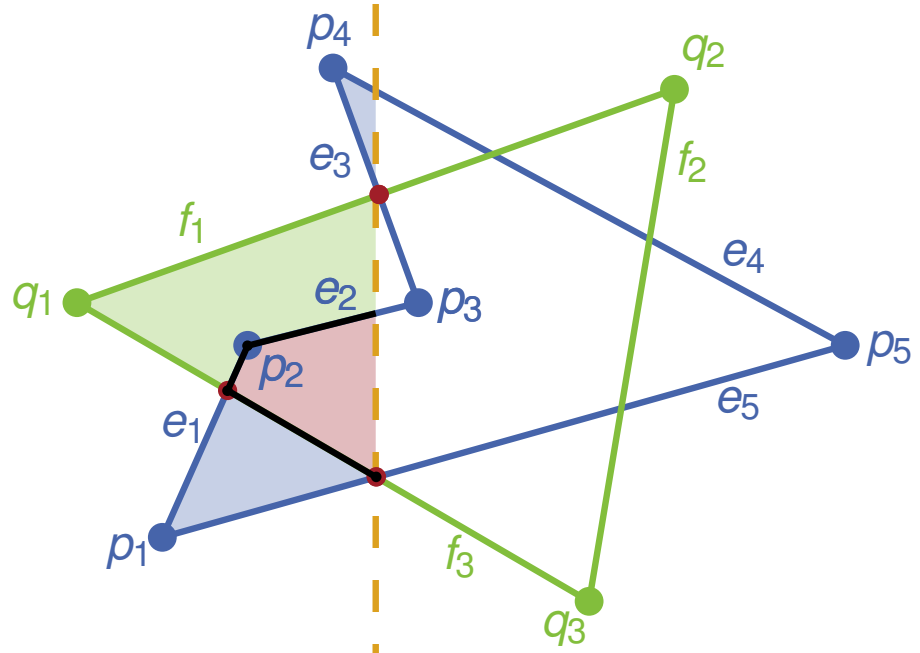
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_3) \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



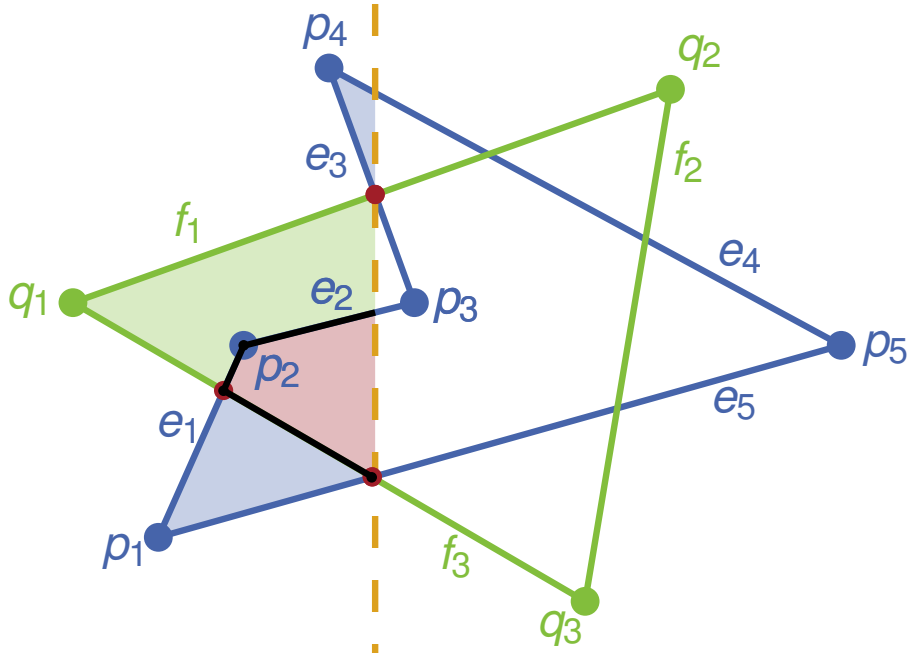
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



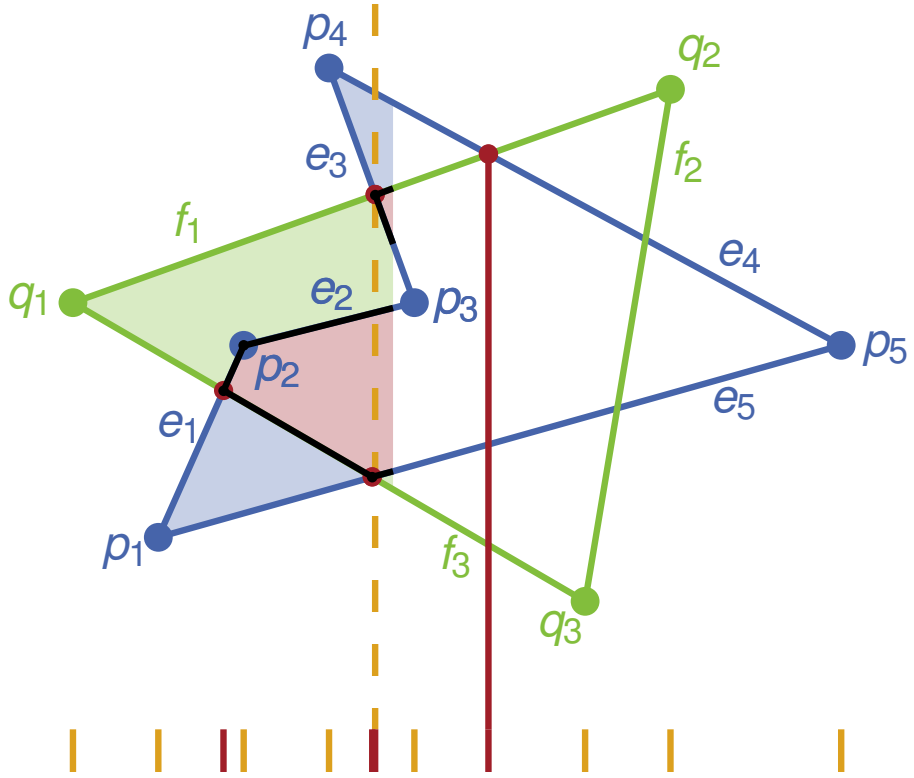
Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

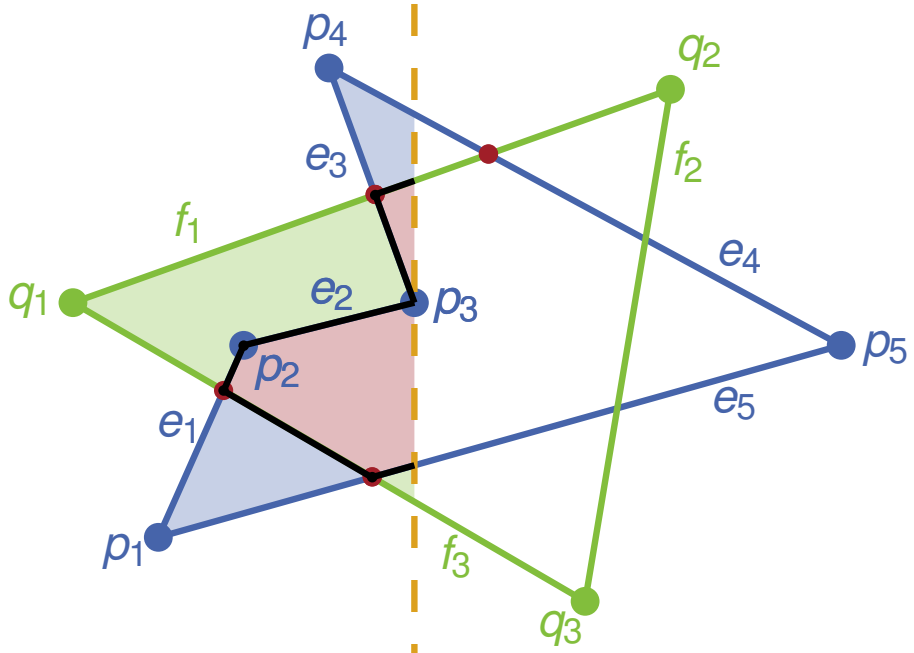
bisher berechnete Polygonzüge:

$$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

$$(f_1) \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow (e_3)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

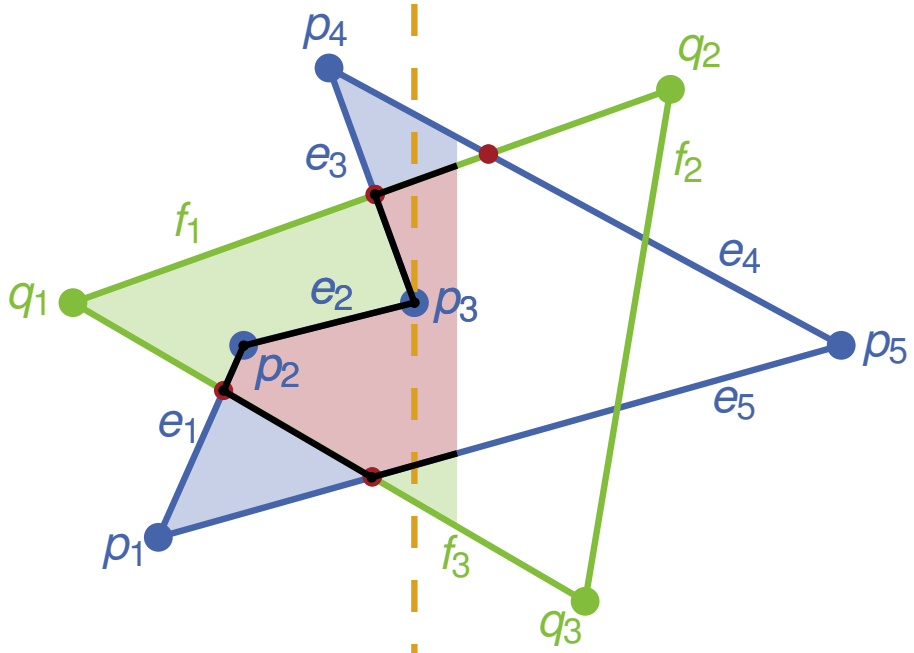
bisher berechnete Polygonzüge:

$$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow (e_2)$$

$$(f_1) \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow (e_3)$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

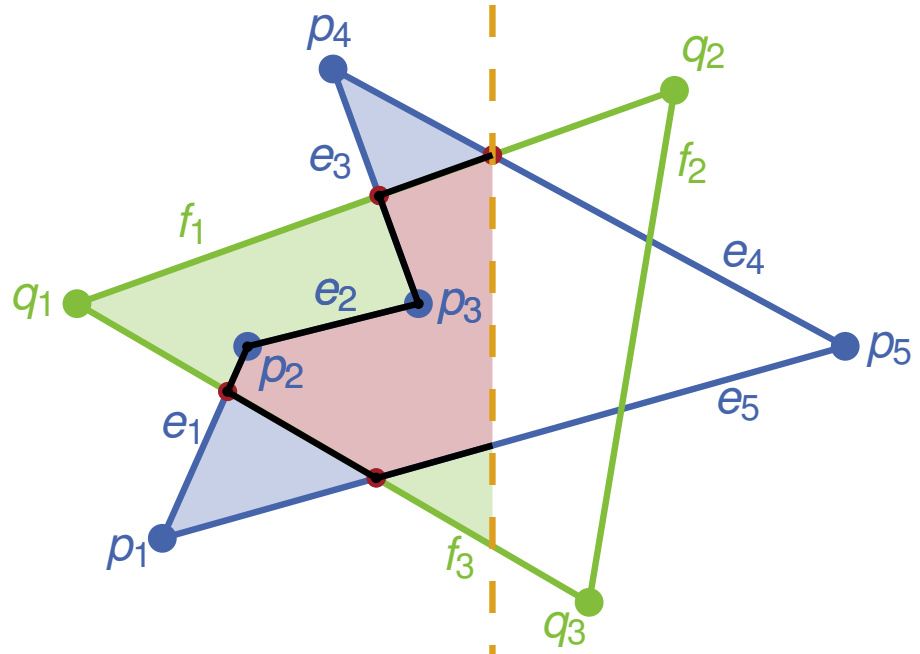
bisher berechnete Polygonzüge:

$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$(f_1) \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

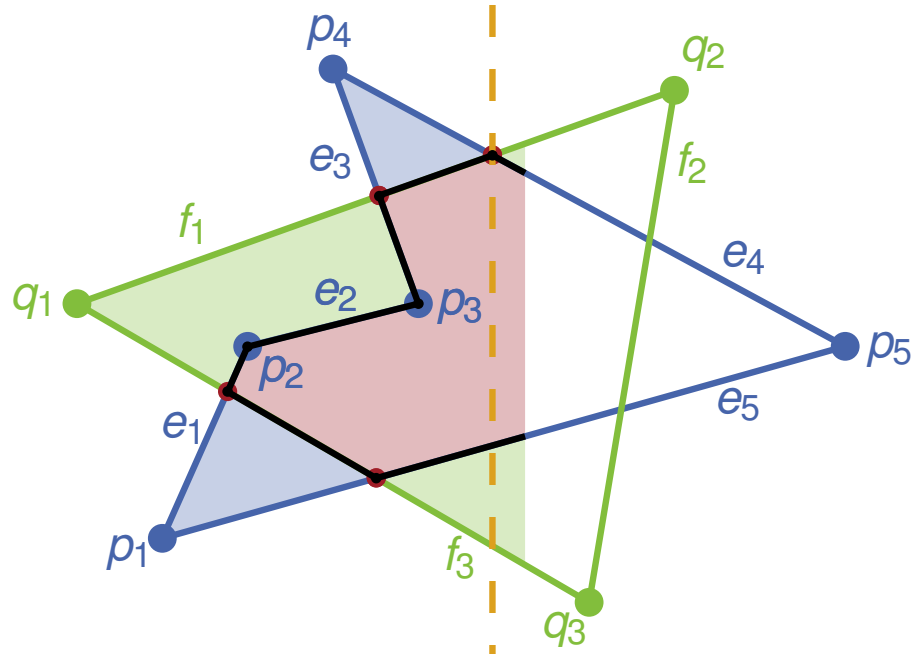
bisher berechnete Polygonzüge:

$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$(f_1) \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

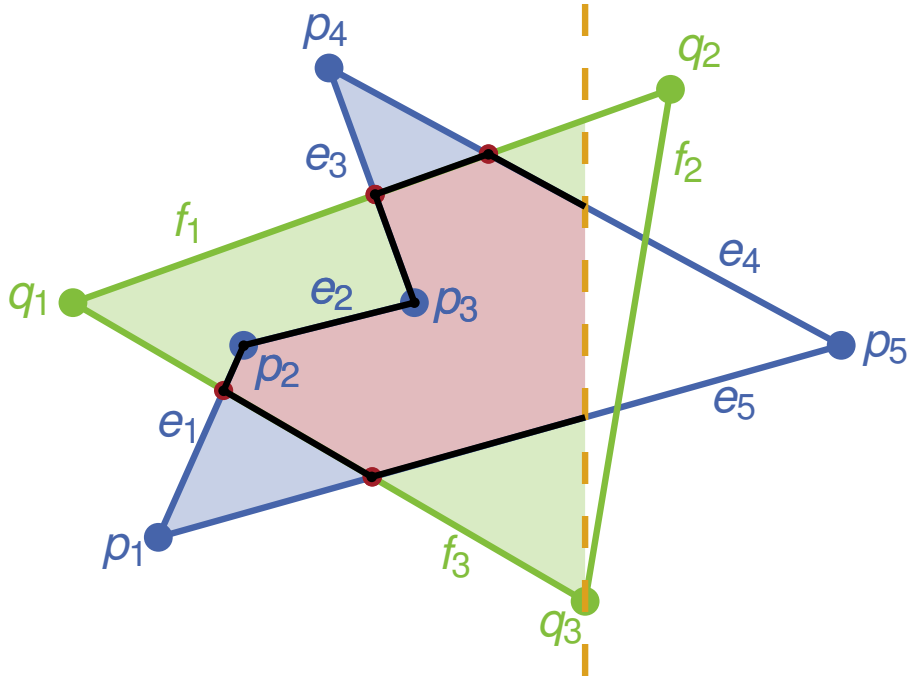
bisher berechnete Polygonzüge:

$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$(e_4) \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

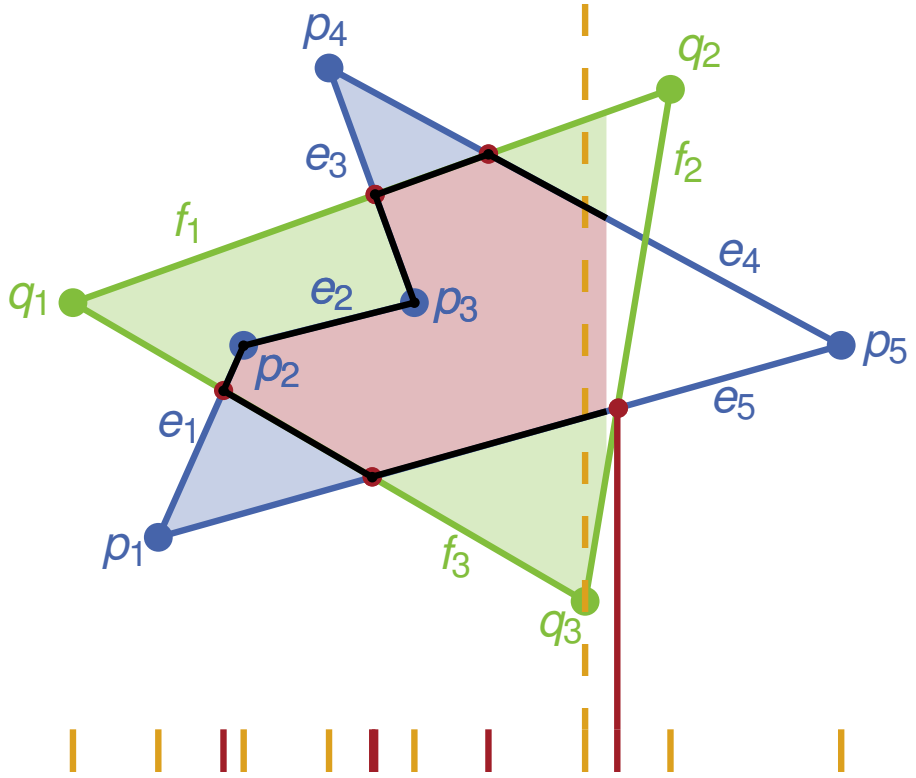
bisher berechnete Polygonzüge:

$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$(e_4) \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

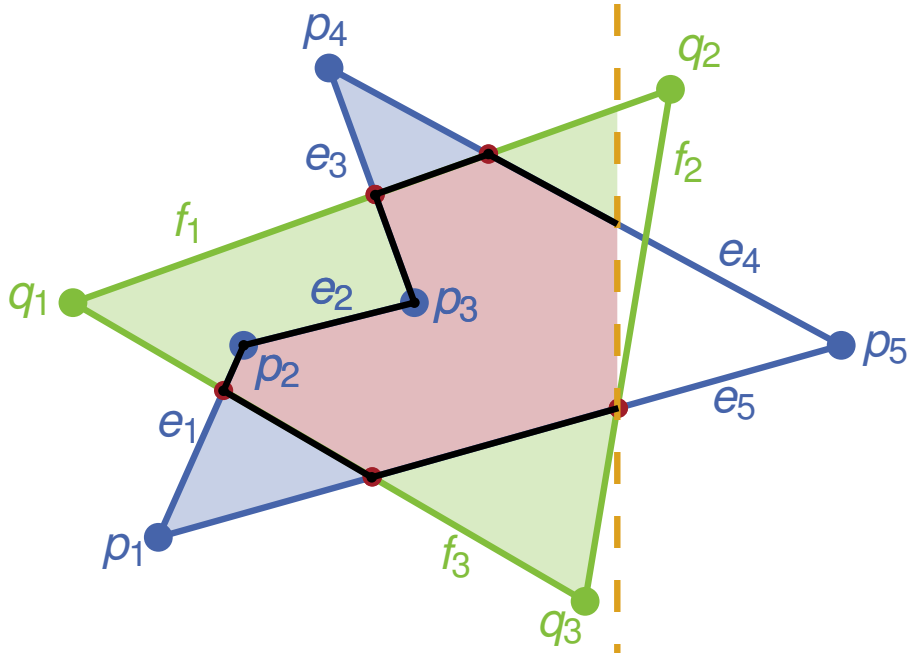
bisher berechnete Polygonzüge:

$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$(e_4) \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

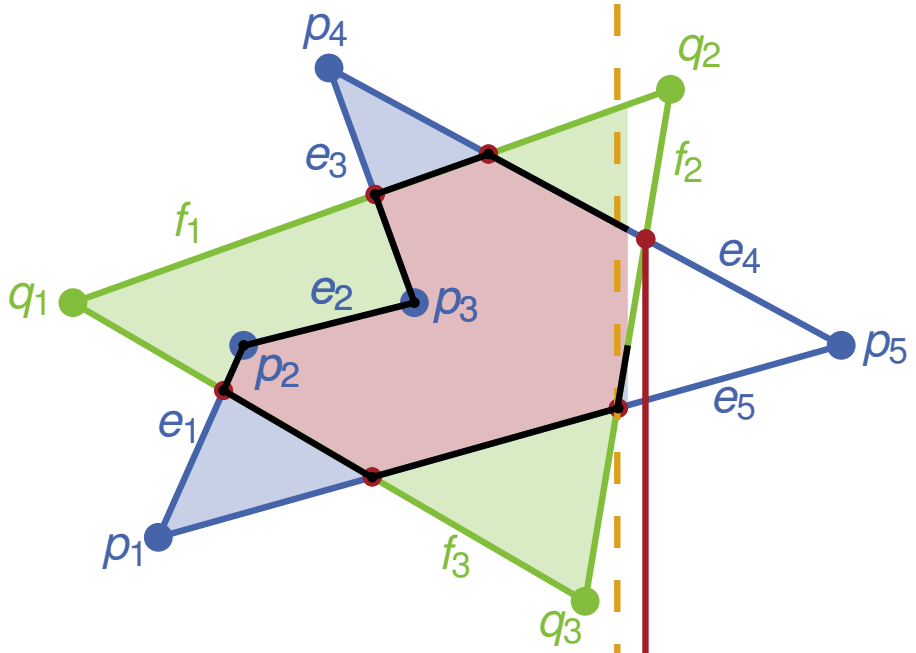
bisher berechnete Polygonzüge:

$(e_5) \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$(e_4) \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

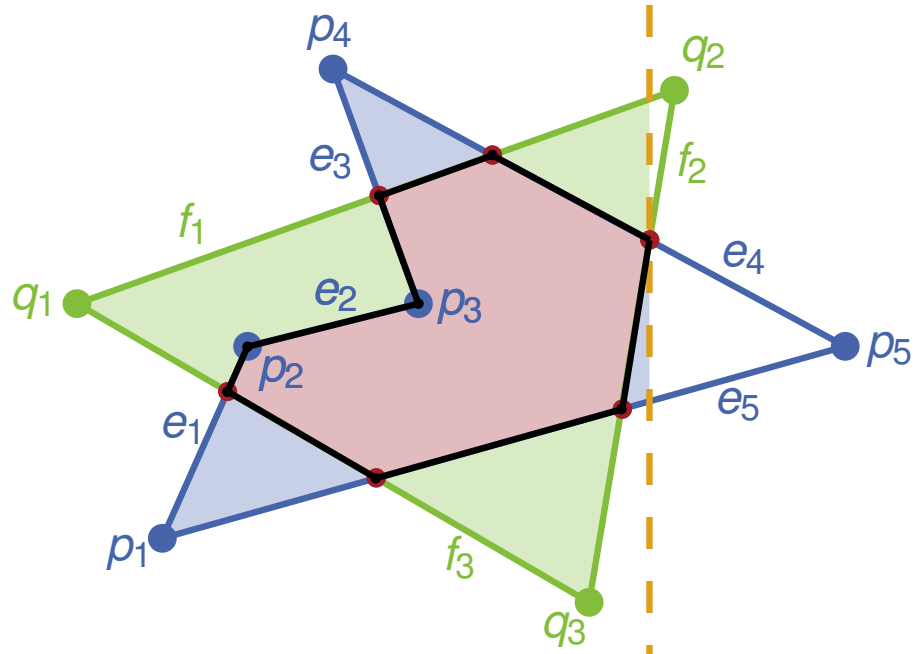
bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_2) \leftrightarrow f_2 \times e_5 \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$$

$$(e_4) \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

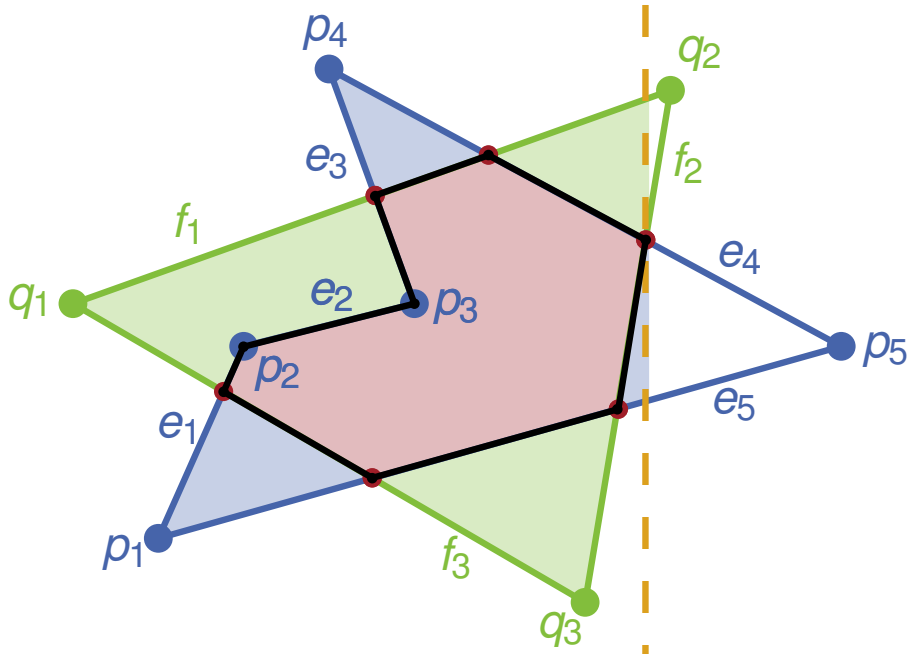
bisher berechnete Polygonzüge:

$$(f_2) \leftrightarrow f_2 \times e_5 \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$$

$$(e_4) \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

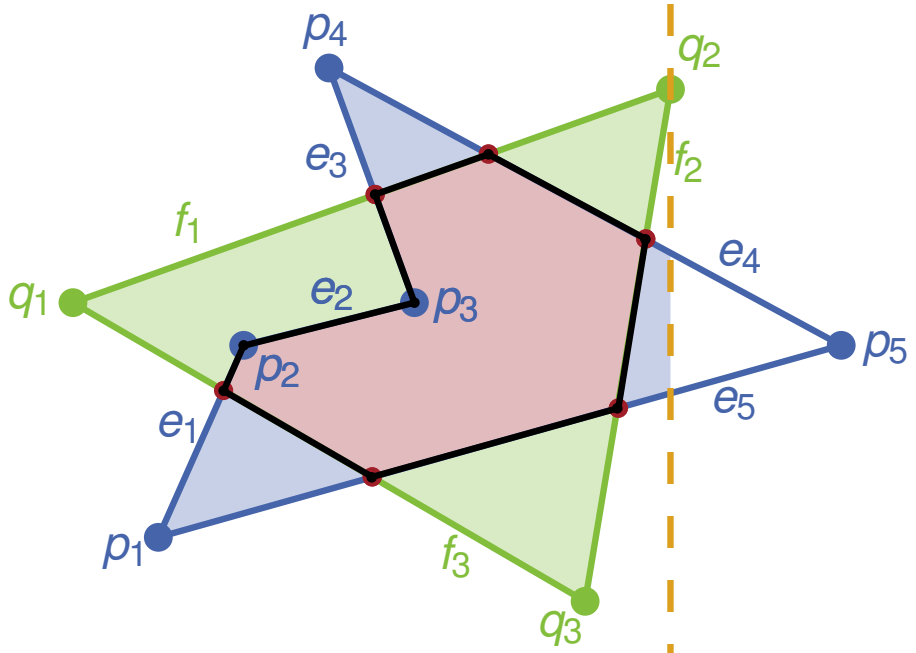
bisher berechnete Polygonzüge:

$f_2 \times e_5 \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$f_2 \times e_4 \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

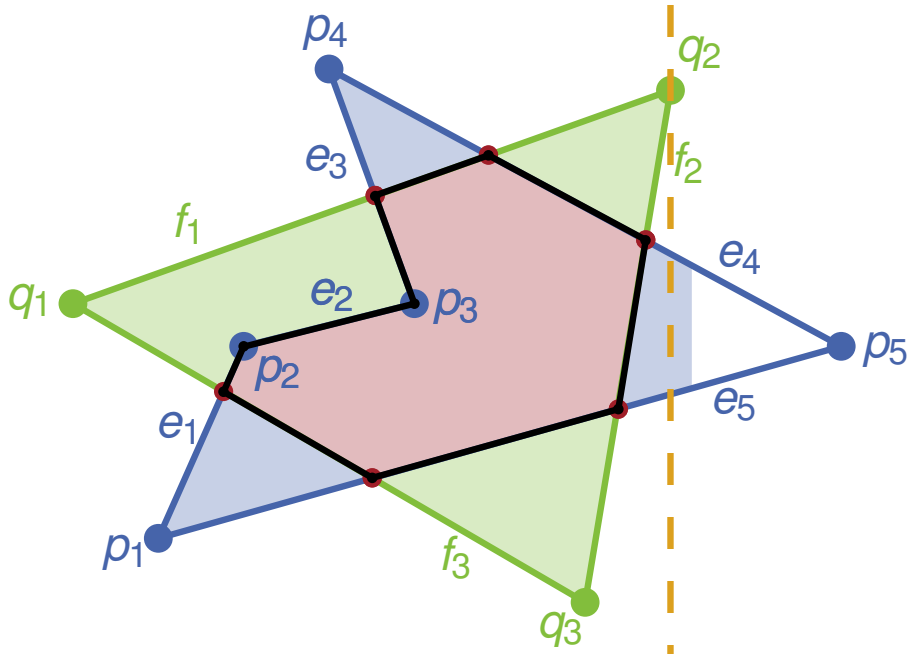
bisher berechnete Polygonzüge:

$f_2 \times e_5 \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$f_2 \times e_4 \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

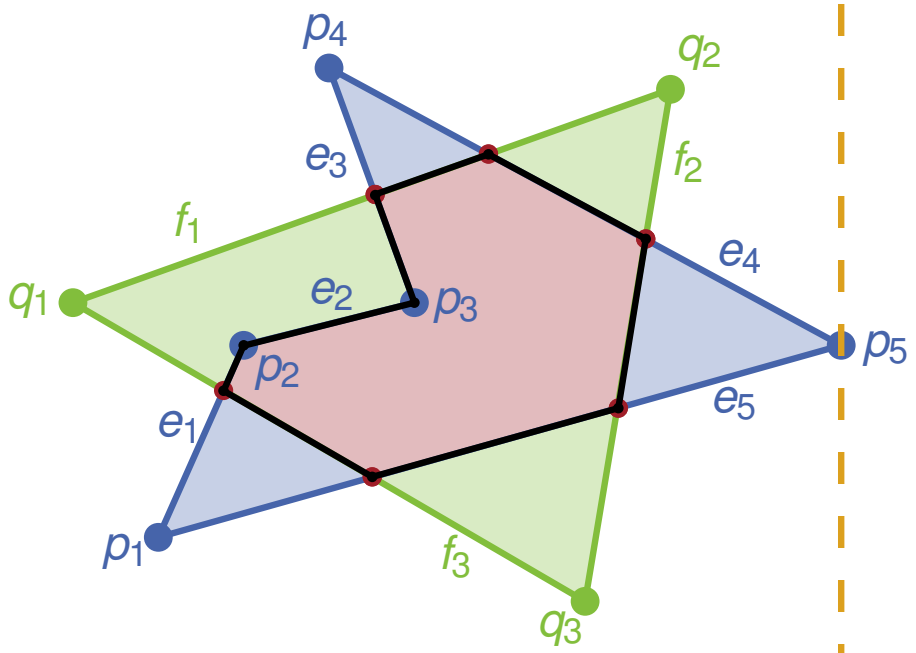
bisher berechnete Polygonzüge:

$f_2 \times e_5 \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$f_2 \times e_4 \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2 (c) – Beispiel

(Sweep-Line Zustand nicht explizit angegeben)



Event-Point Schedule →

bisher berechnete Polygonzüge:

$f_2 \times e_5 \leftrightarrow e_5 \times f_3 \leftrightarrow f_3 \times e_1 \leftrightarrow p_2$

$f_2 \times e_4 \leftrightarrow e_4 \times f_1 \leftrightarrow f_1 \times e_3 \leftrightarrow p_3$

Problem 2(c) – Anmerkungen

Nicht einfacher Schnitt:
Falls $P \cap Q$ nicht (wie im Beispiel) aus einem Polygon, sondern aus mehreren besteht, so bleiben am Ende einfach mehrere Listen übrig.

Problem 2(c) – Anmerkungen

Nicht einfacher Schnitt:
Falls $P \cap Q$ nicht (wie im Beispiel) aus einem Polygon, sondern aus mehreren besteht, so bleiben am Ende einfach mehrere Listen übrig.

Laufzeit:

- An jedem Haltepunkt werden konstant viele Aktionen durchgeführt.
- Manche dieser Aktionen brauchen $O(\log n)$ Zeit.
- Haltepunkte sind genau die Eckpunkte der Polygone und die Schnittpunkte.
  $\Rightarrow$ Laufzeit insgesamt: $O((n + k) \log n)$

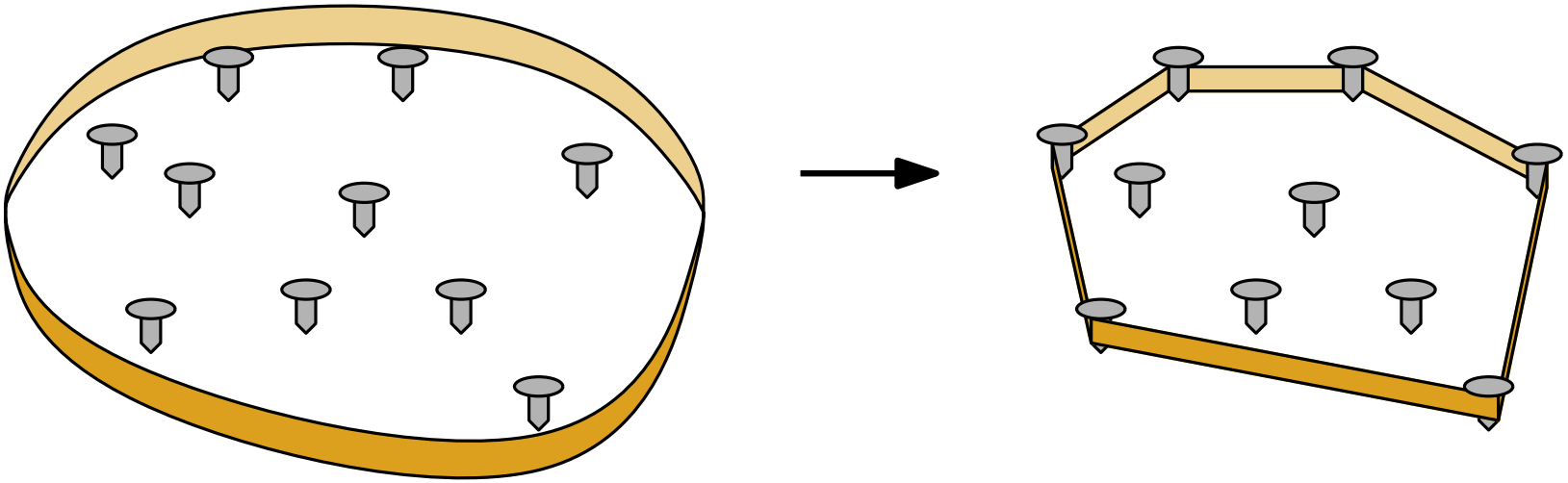
Konvexe Hülle

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Wiederholung: Konvexe Hülle

Problem: Konvexe Hülle
Gegeben sind $n \geq 3$ Punkte $Q = \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$. Berechne die *konvexe Hülle* $H(Q)$, d.h. das minimale konvexe Polygon, das alle Punkte in Q im Inneren enthält.

Intuition: Fasse jeden Punkte als Nagel auf, ziehe ein Gummiband über alle Nägel und lasse es los.



Aus der Vorlesung bekannt:

- Zwei Algorithmen mit Laufzeit $O(n \log n)$ bzw. $O(hn)$, wobei h die Anzahl der Eckpunkte der konvexen Hülle ist.
- Die Berechnung der konvexen Hülle liegt in $\Theta(n \log n)$.

Problem 3(a)

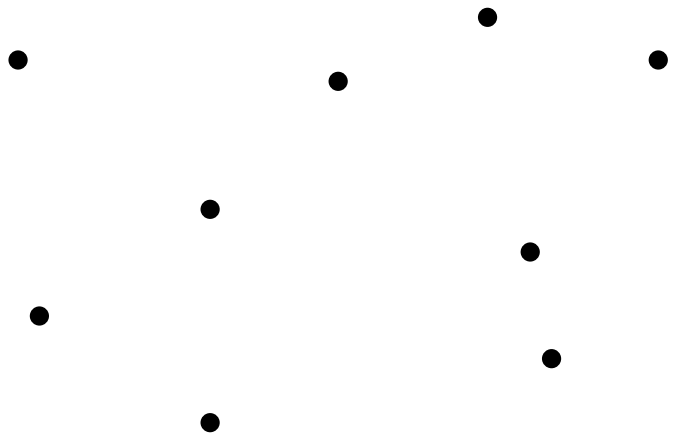
(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



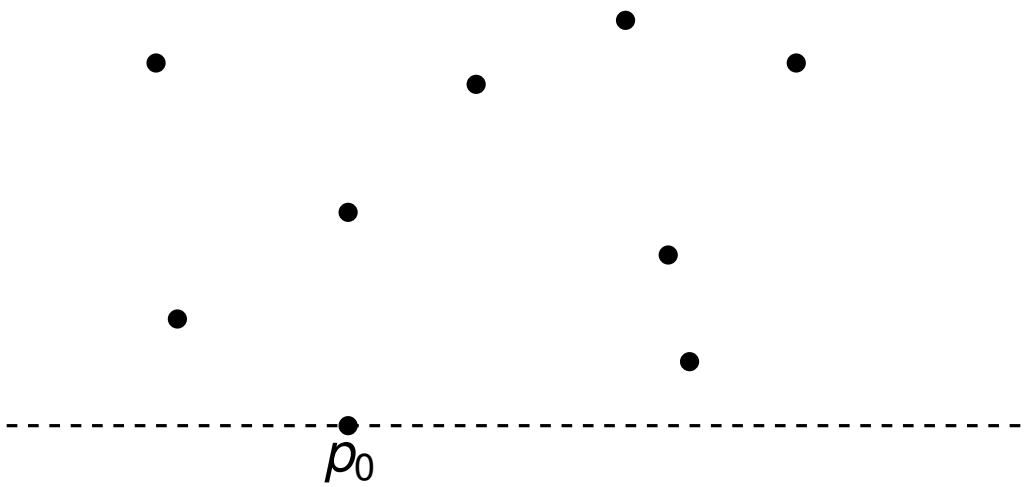
Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

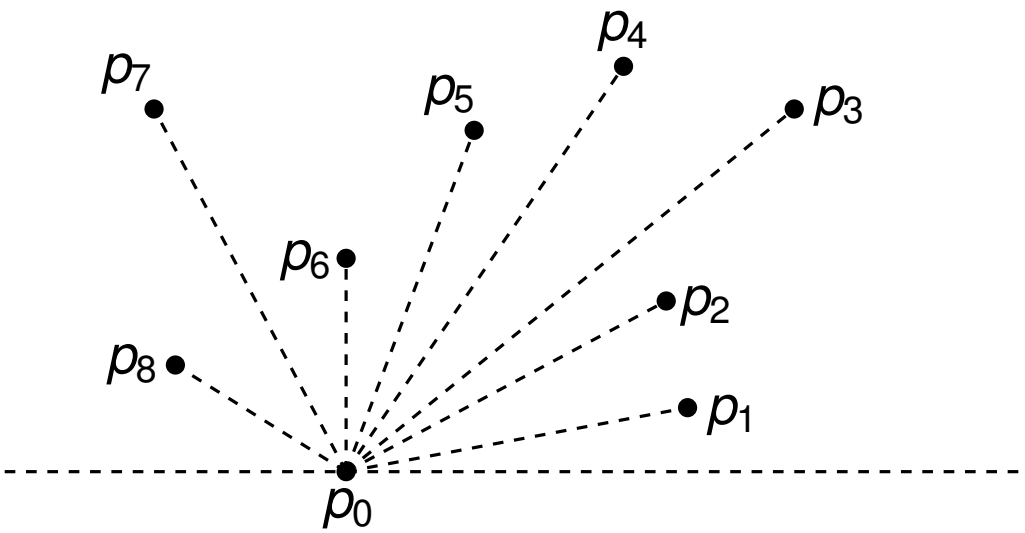
p_0

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

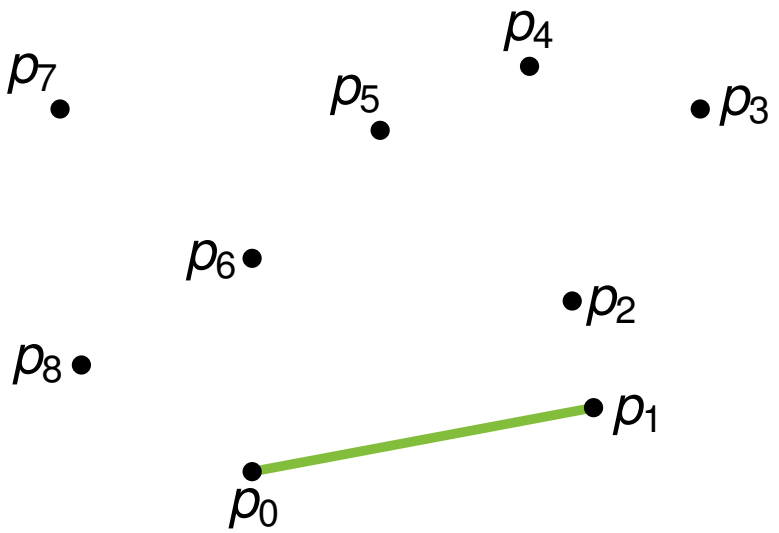
p_0

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

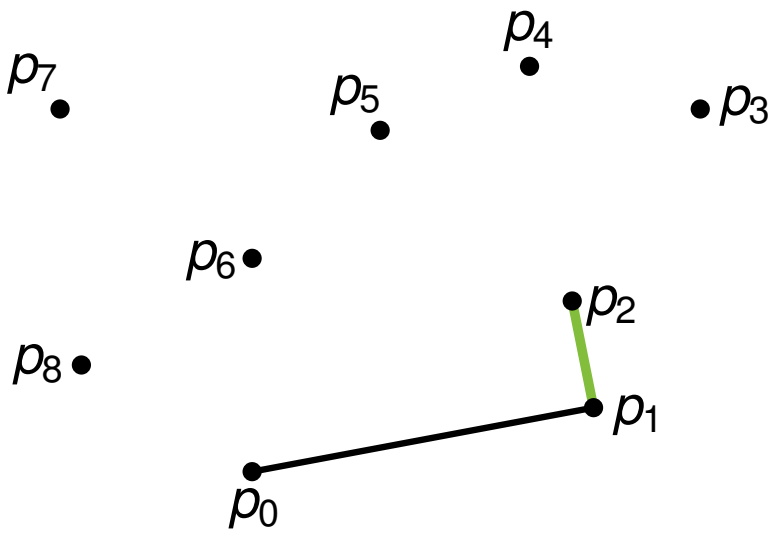
p_0 p_1

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

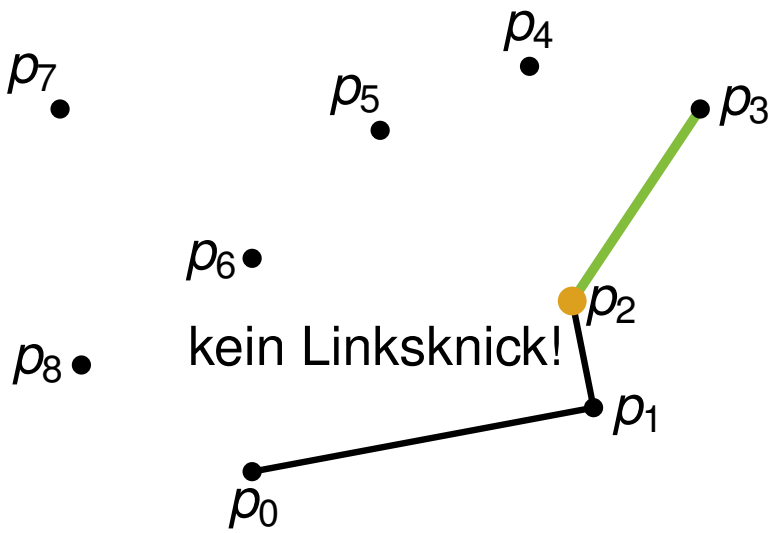
p_0 p_1 p_2

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

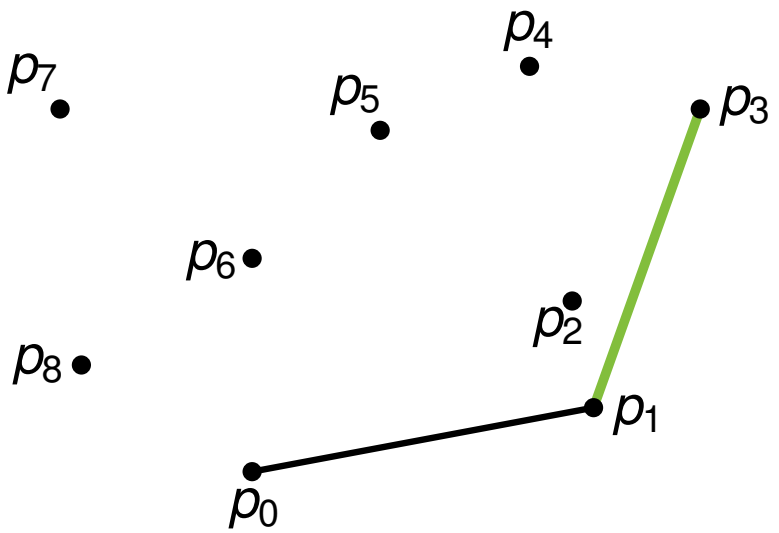
p_0 p_1 p_2 p_3

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

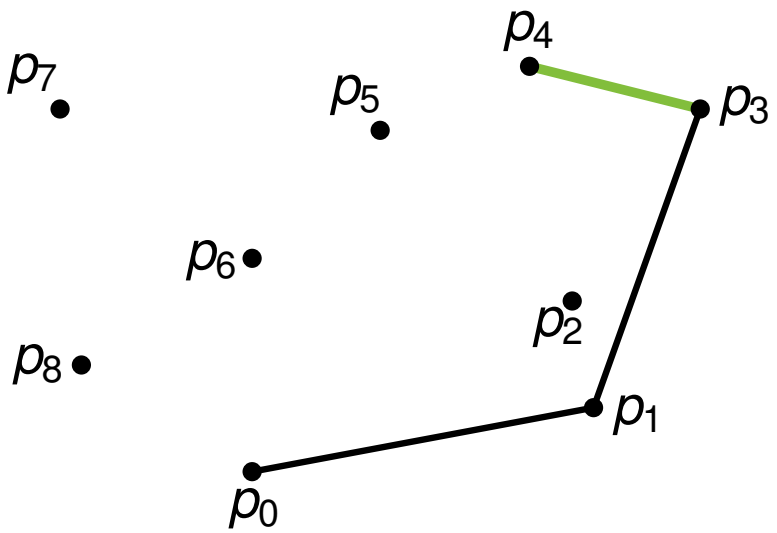
p_0 p_1 p_3

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

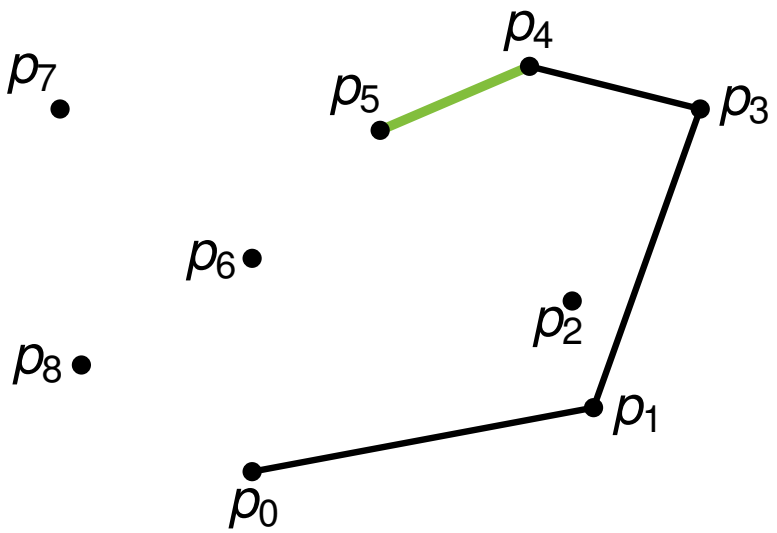
p_0 p_1 p_3 p_4

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

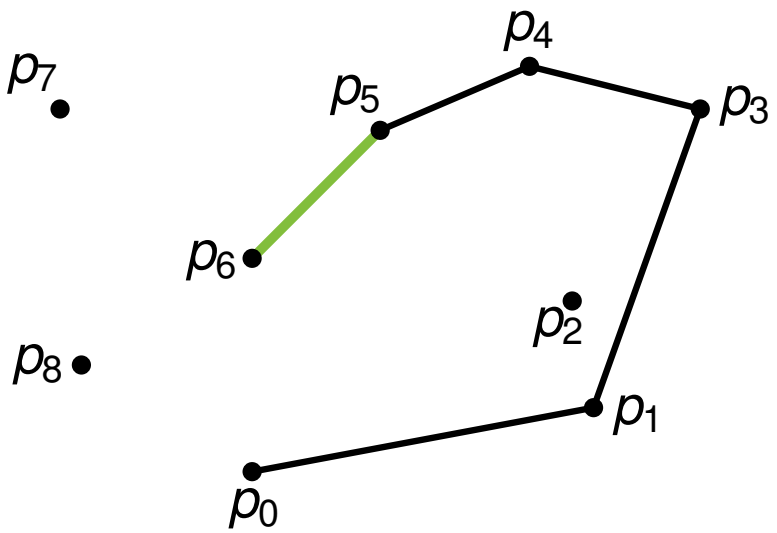
p_0 p_1 p_3 p_4 p_5

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

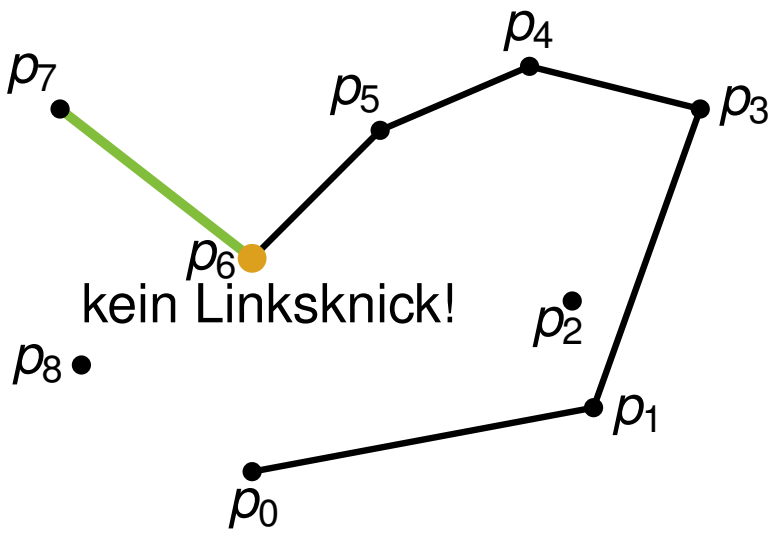
p_0 p_1 p_3 p_4 p_5 p_6

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

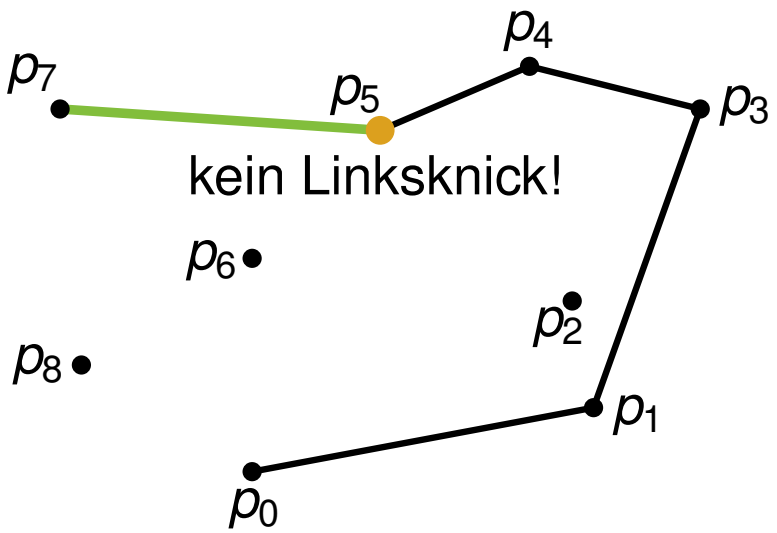
p_0 p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_5 p_7

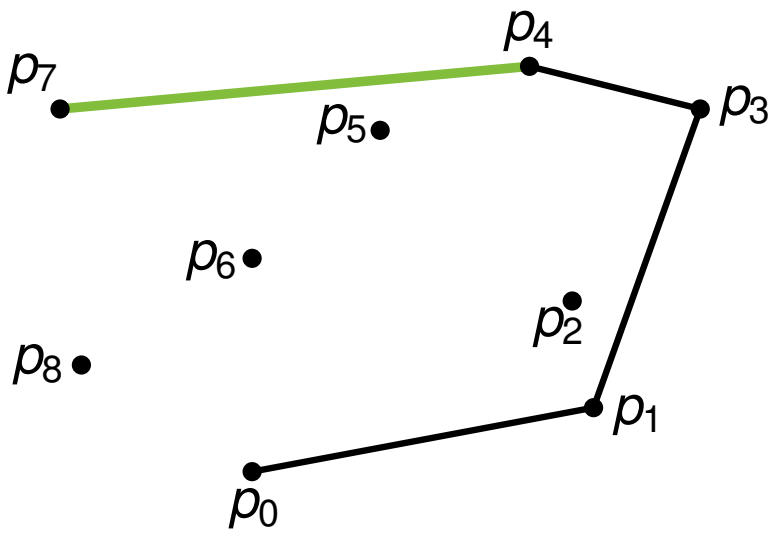
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

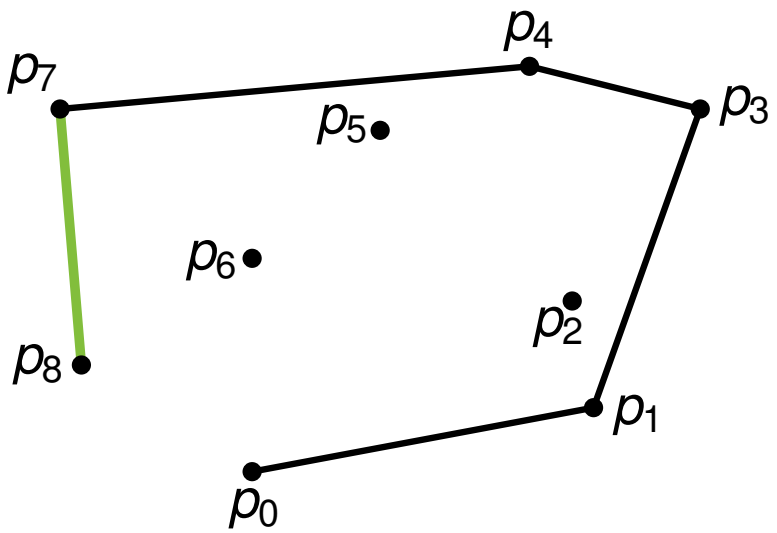
p_0 p_1 p_3 p_4 p_7

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

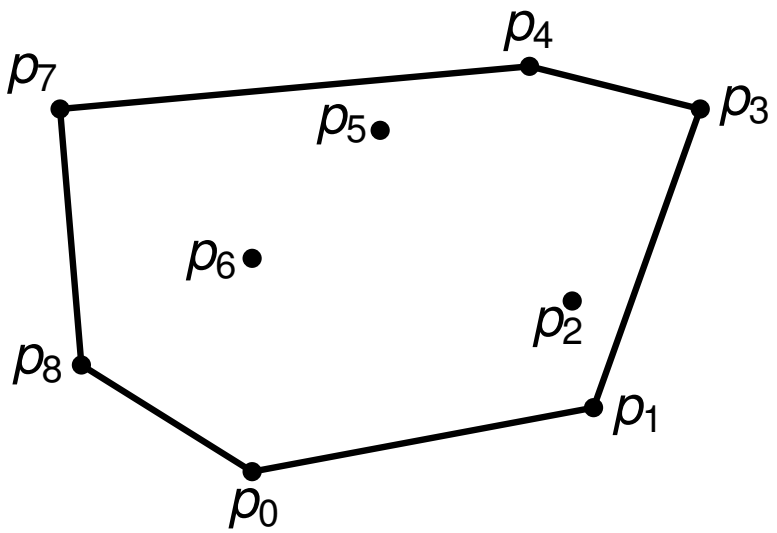
p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

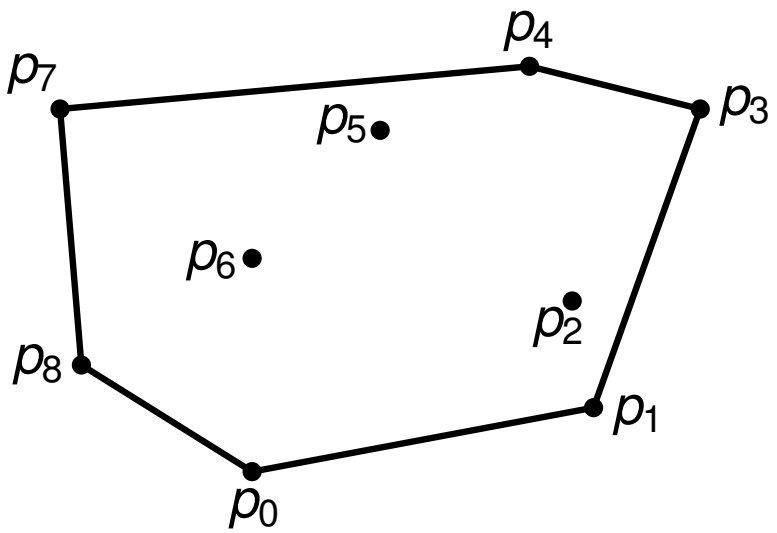
p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

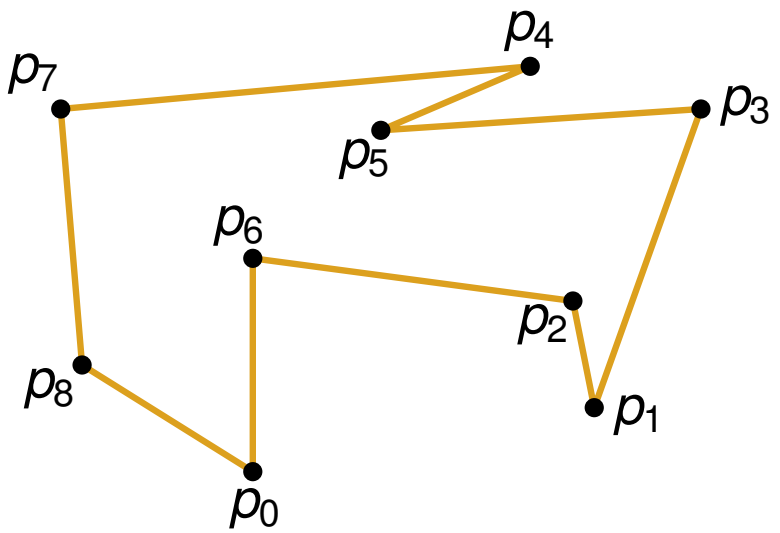
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



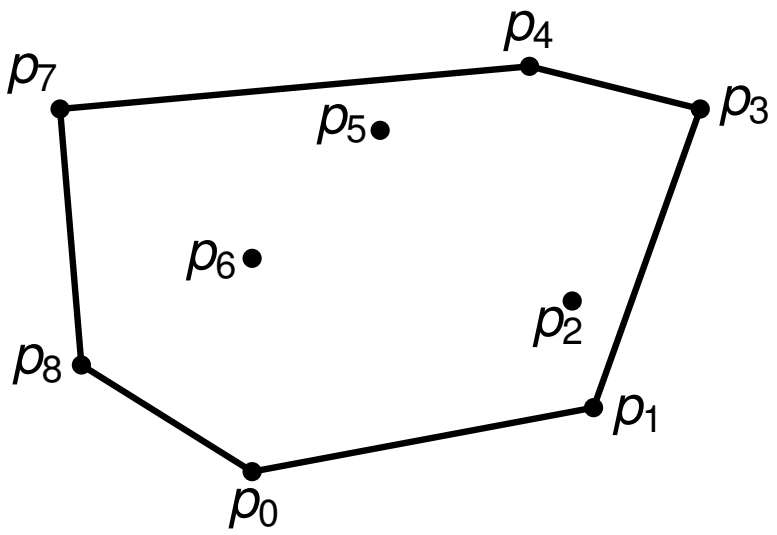
Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

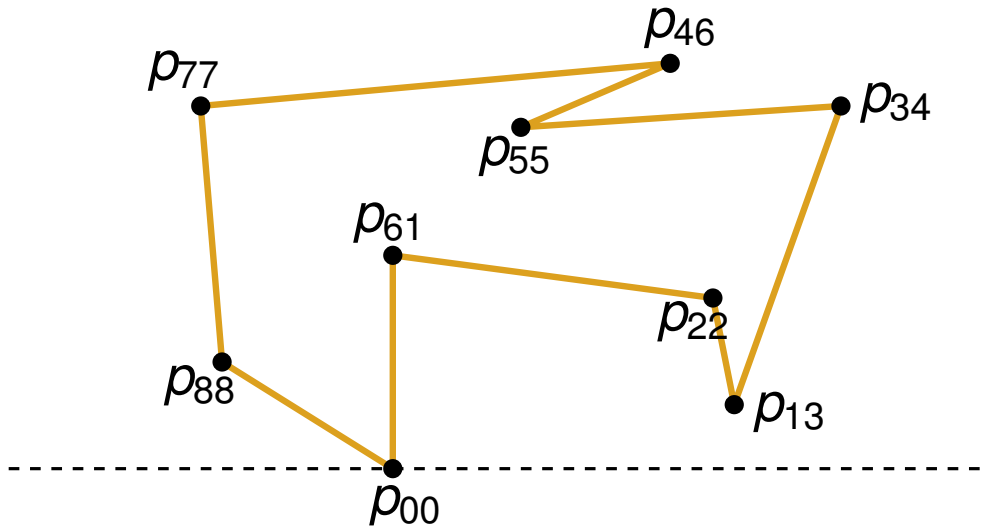
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00}

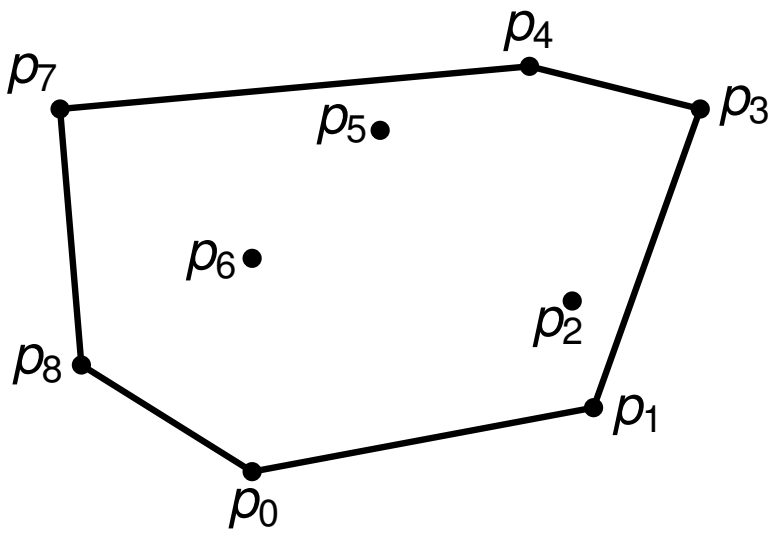
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

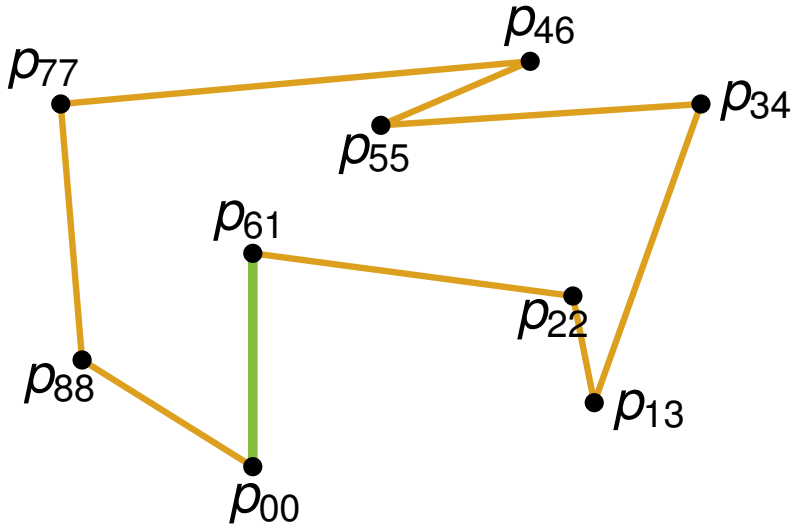
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{61}

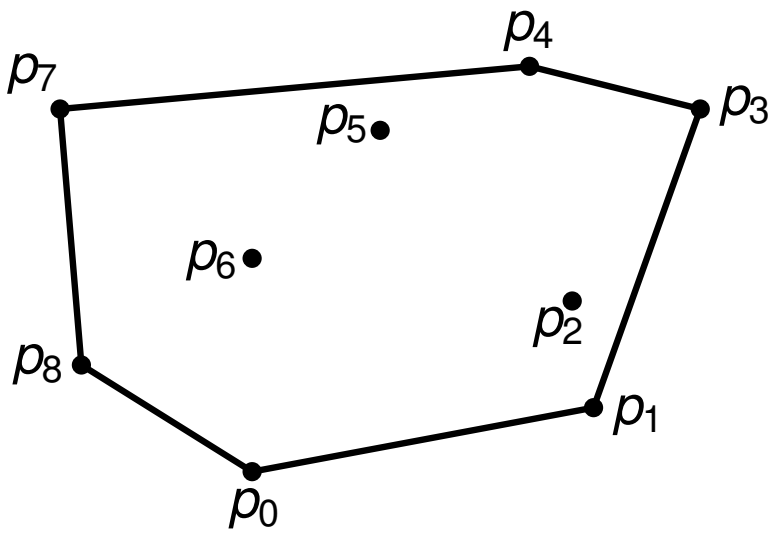
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

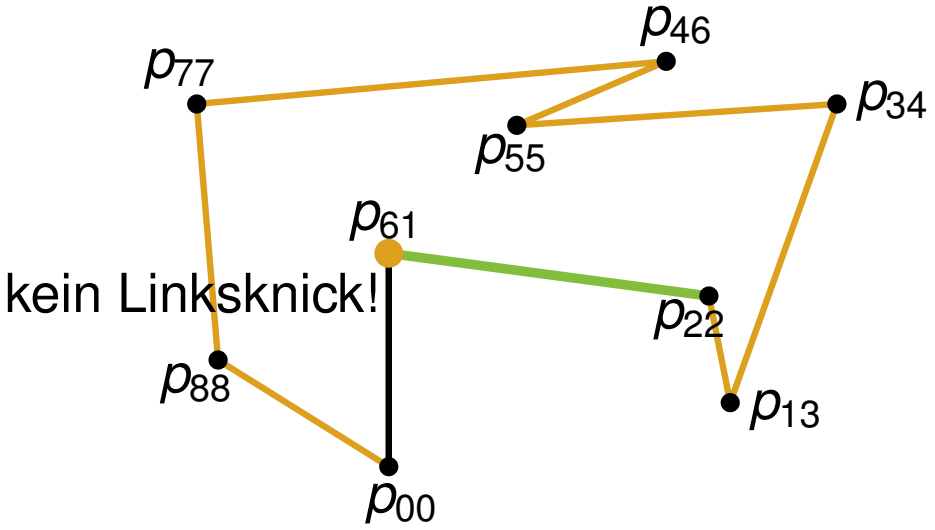
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{61} p_{22}

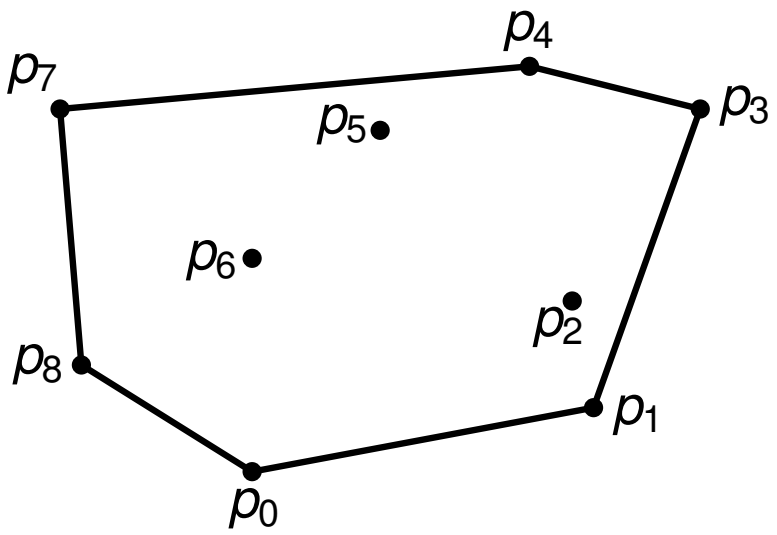
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

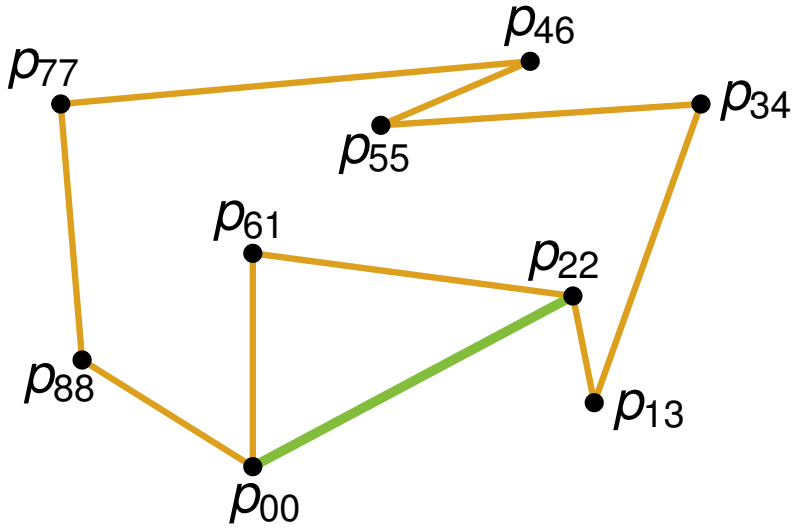
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{22}

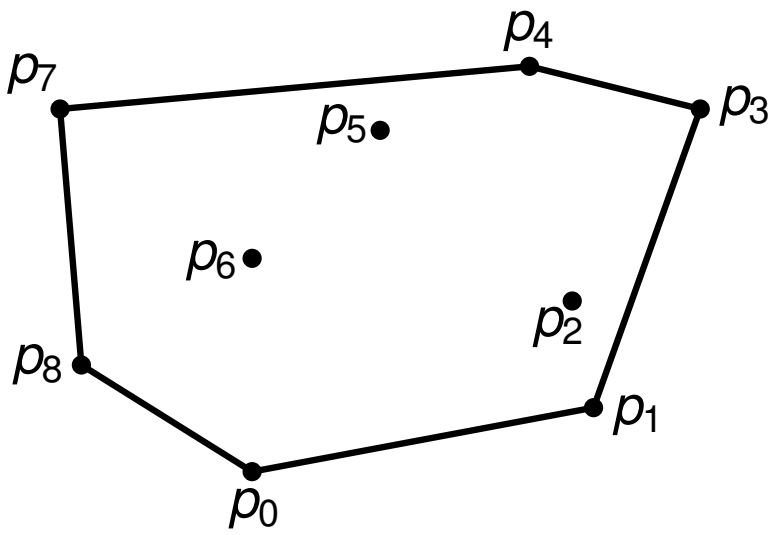
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

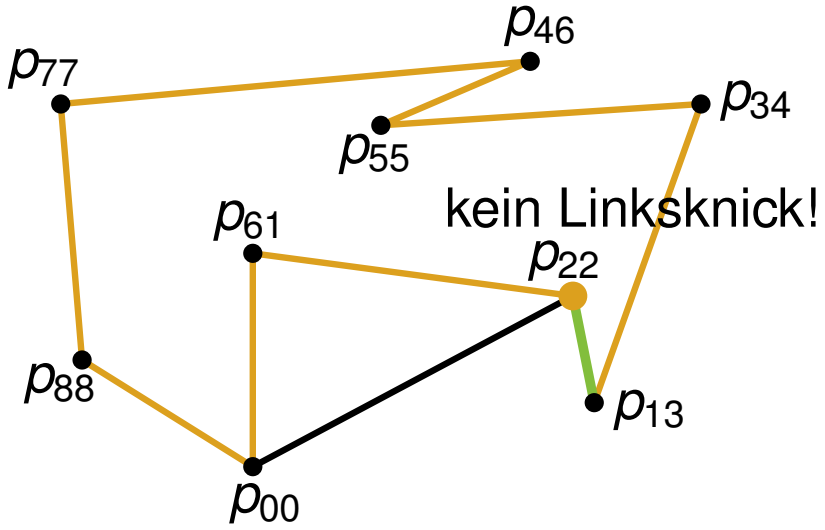
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{22} p_{13}

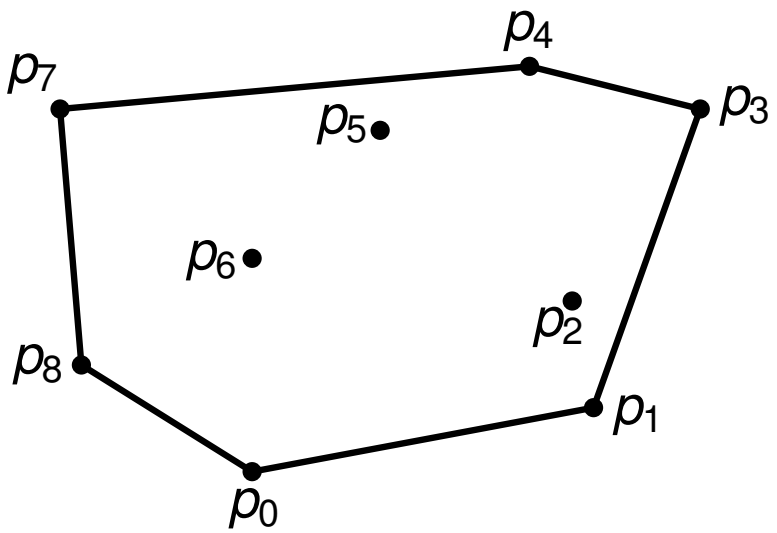
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

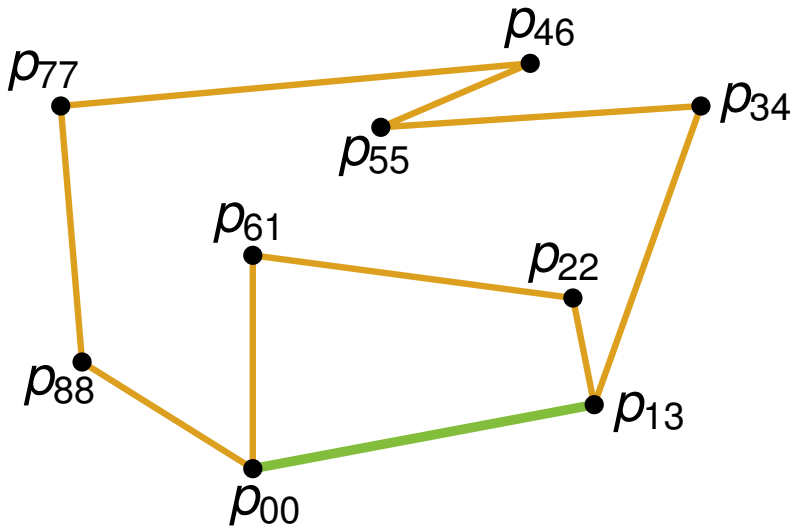
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13}

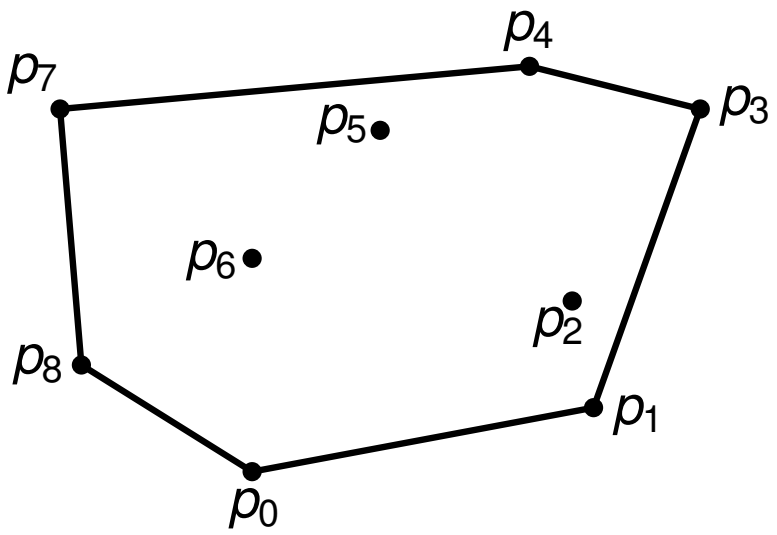
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

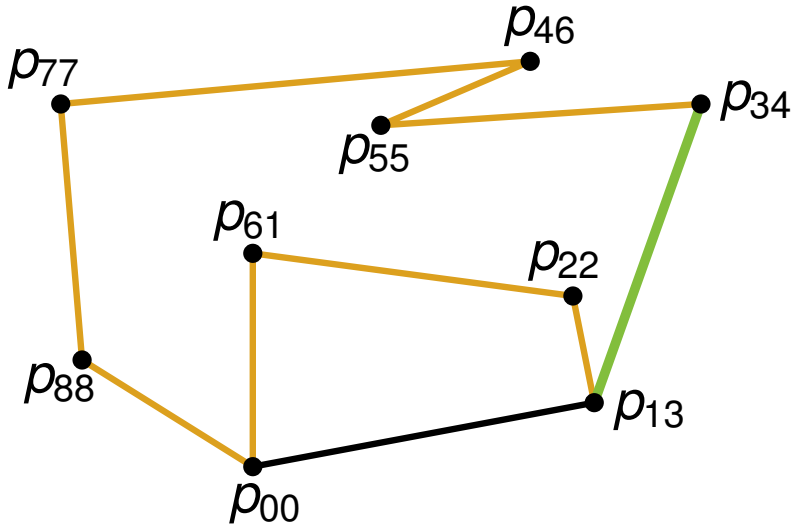
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13} p_{34}

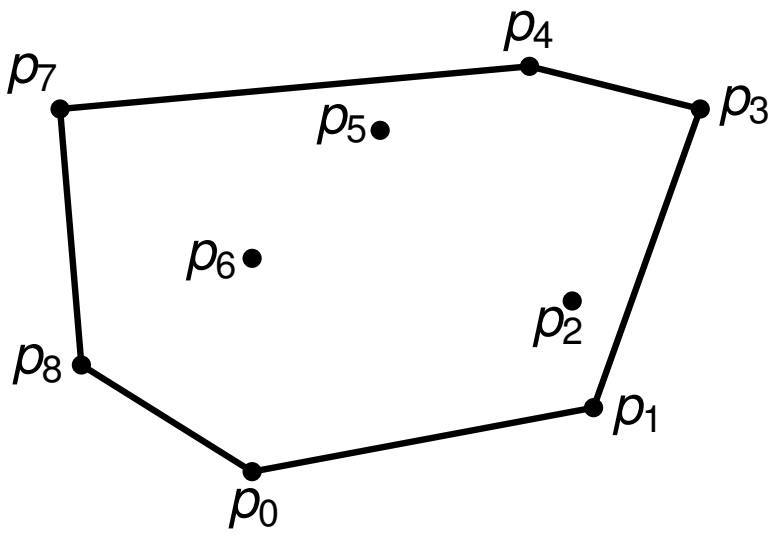
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

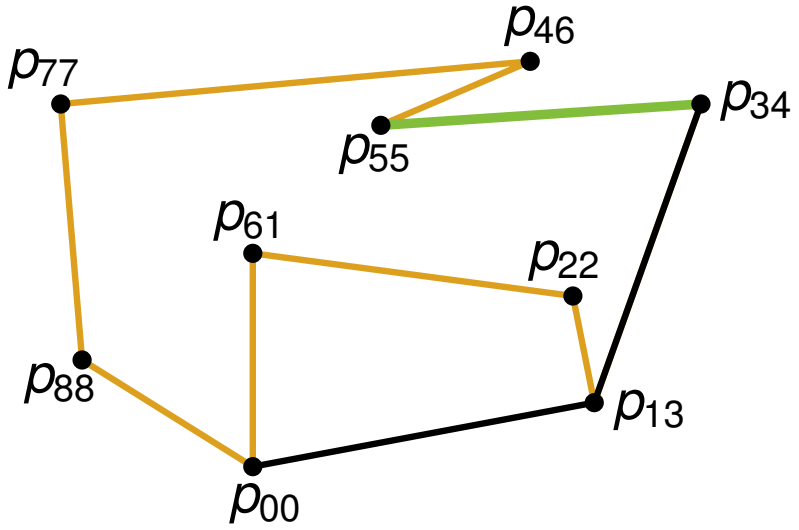
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13} p_{34} p_{55}

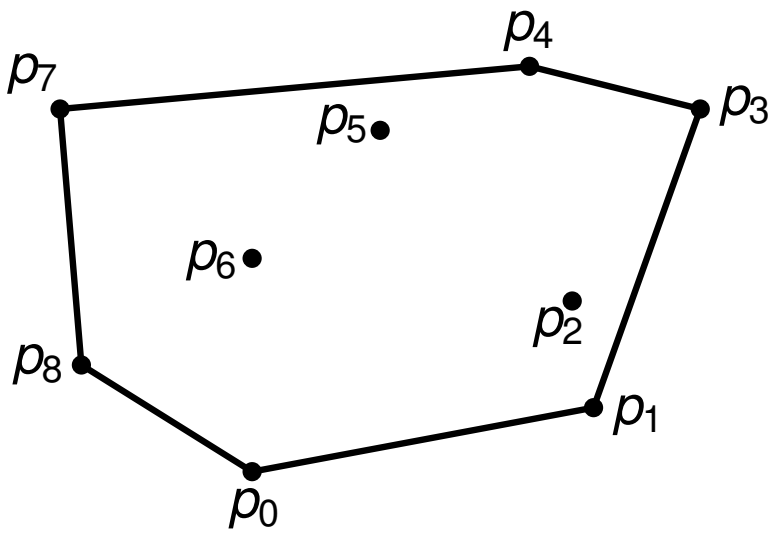
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

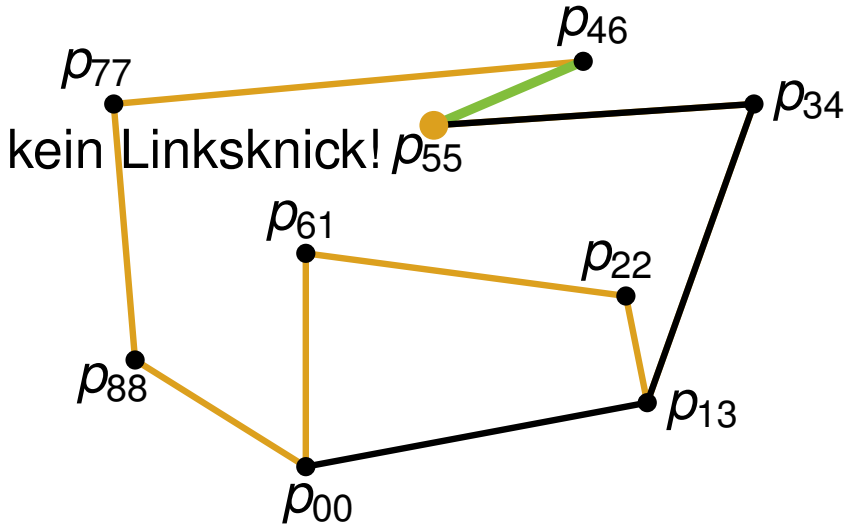
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13} p_{34} p_{55} p_{46}

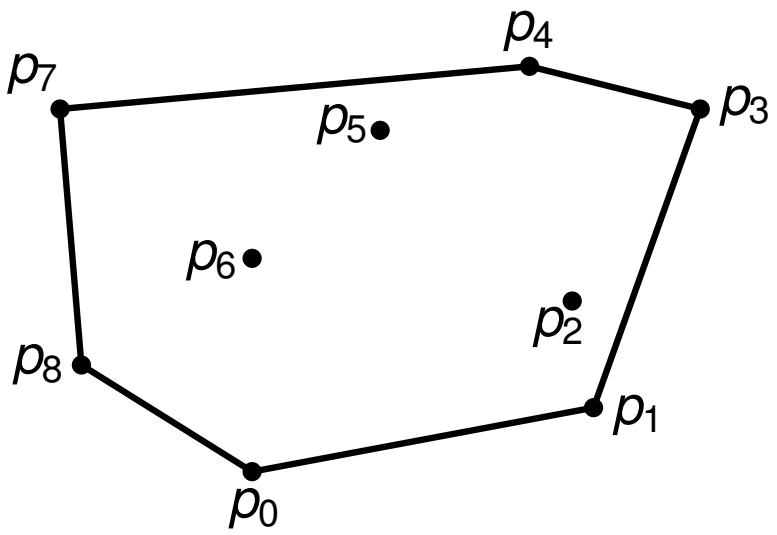
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

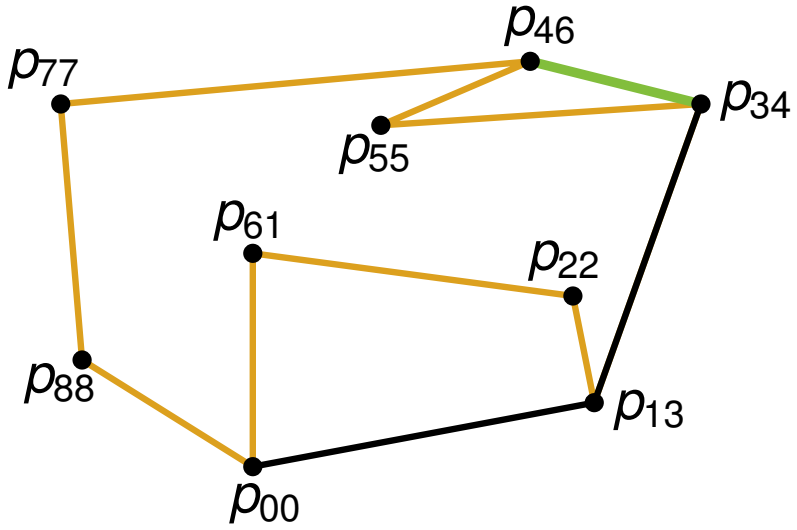
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13} p_{34} p_{46}

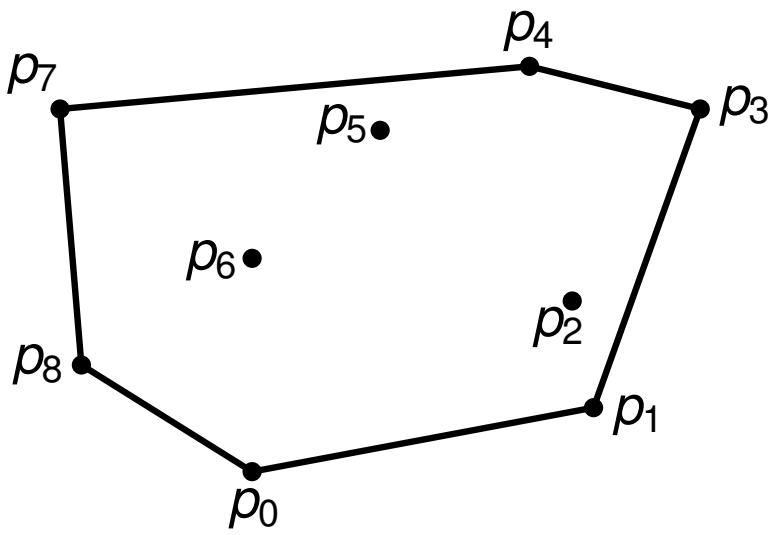
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

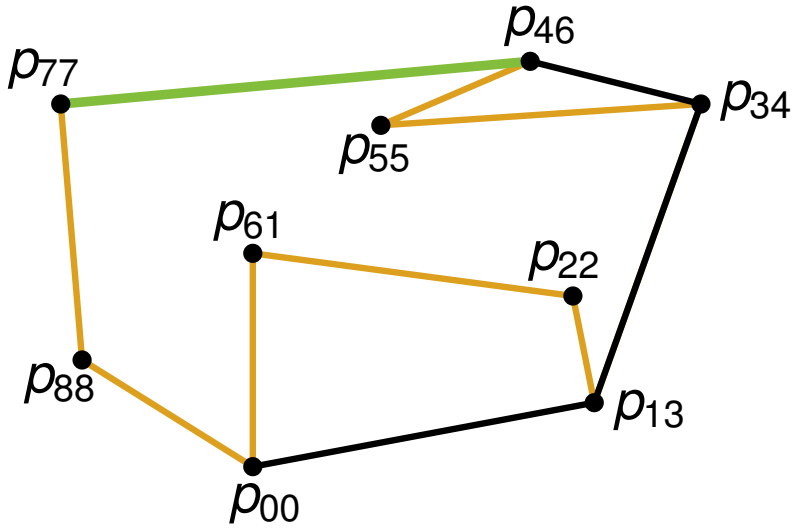
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13} p_{34} p_{46} p_{77}

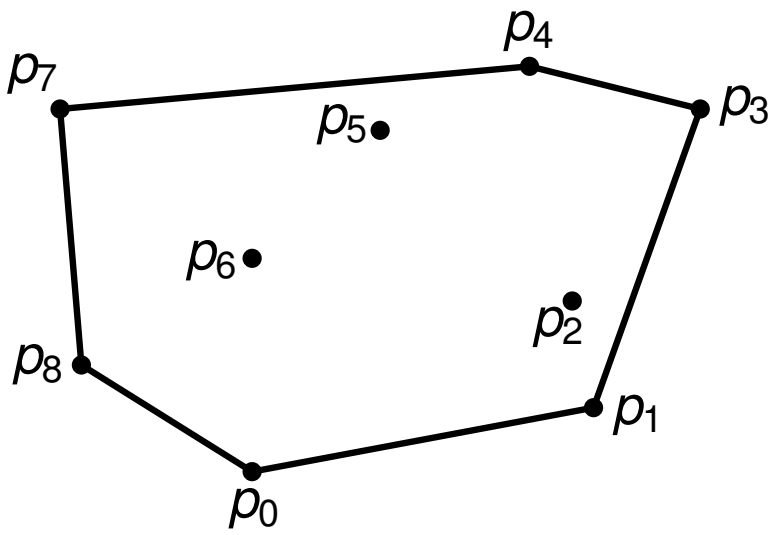
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

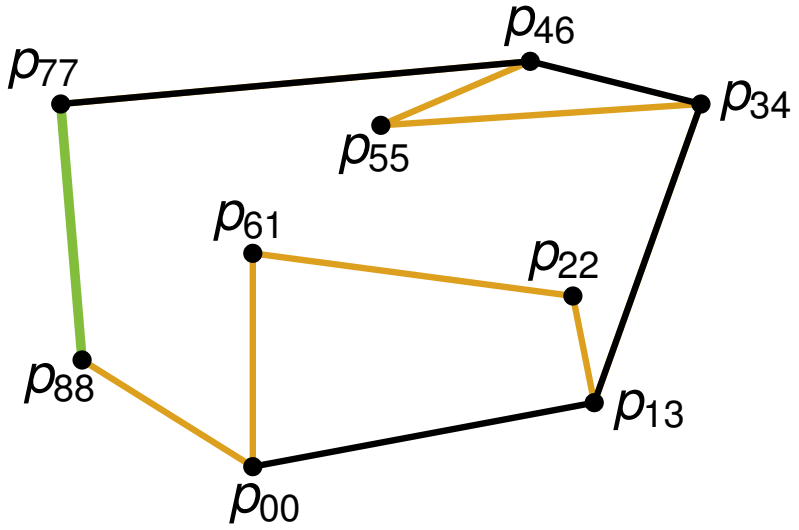
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

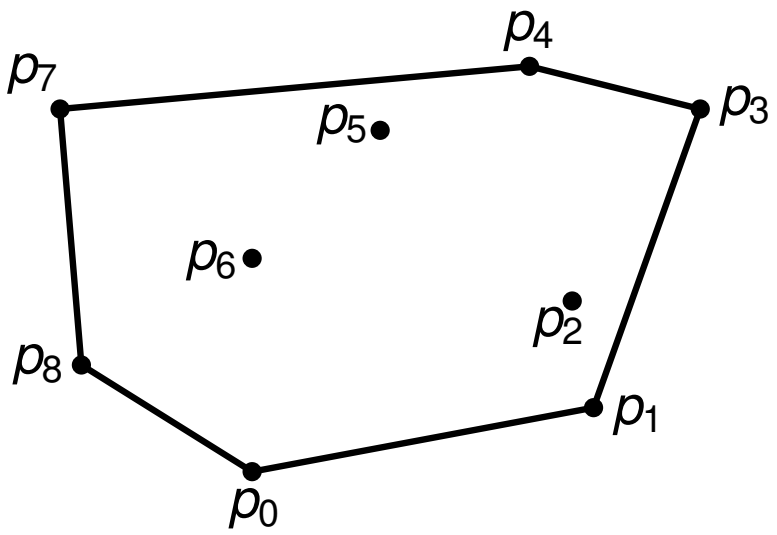
p_{00} p_{13} p_{34} p_{46} p_{77} p_{88}

Problem 3(a)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

Idee: Benutze Graham Scan, nur mit anderer Knotenreihenfolge.

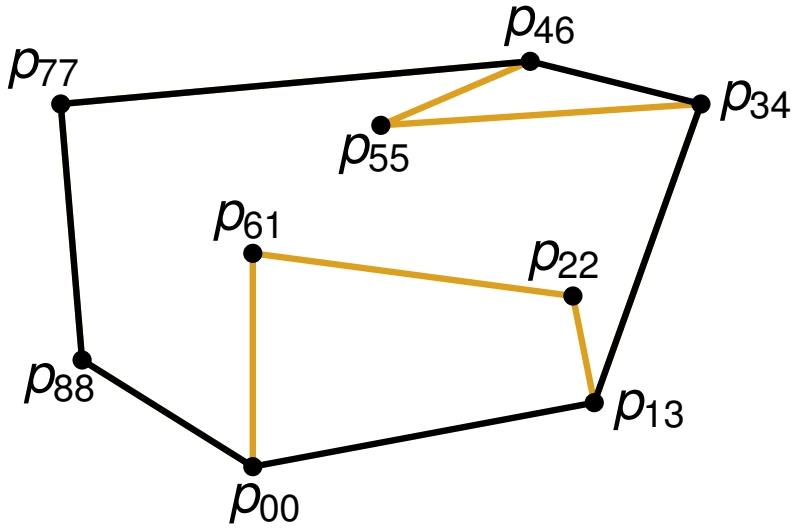
Beispiel – Graham Scan:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_0 p_1 p_3 p_4 p_7 p_8

Beispiel – Graham Scan für Polygon:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_{00} p_{13} p_{34} p_{46} p_{77} p_{88}

Problem 3(a)

Warum funktioniert das?

Problem 3(a)

Warum funktioniert das?

Zeige wie beim Graham Scan die folgenden beiden Invarianten:

- Wird ein Punkt entfernt, so ist er nicht Eckpunkt von der konvexen Hülle.
- Das bisher berechnete Polygon bestimmt stets ein konvexes Polygon.

Problem 3(a)

Warum funktioniert das?

Zeige wie beim Graham Scan die folgenden beiden Invarianten:

- Wird ein Punkt entfernt, so ist er nicht Eckpunkt von der konvexen Hülle.
- Das bisher berechnete Polygon bestimmt stets ein konvexes Polygon.

Wie ist die Laufzeit?

Problem 3(a)

Warum funktioniert das?

Zeige wie beim Graham Scan die folgenden beiden Invarianten:

- Wird ein Punkt entfernt, so ist er nicht Eckpunkt von der konvexen Hülle.
- Das bisher berechnete Polygon bestimmt stets ein konvexes Polygon.

Wie ist die Laufzeit?

- Untersten Punkt finden: $O(n)$
- Reihenfolge der Punkte bestimmen: $O(n)$
- Jeder Knoten wird nur einmal in das bisher berechnete Polygon eingefügt: amortisiert $O(1)$ pro Schritt

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit: $O(n)$

Problem 3(b)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit zur Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge mit n Punkten in $\Theta(n \log n)$ liegt. Es gibt also keinen Algorithmus, der asymptotisch echt weniger als $n \log n$ Schritte benötigt. Warum ist das kein Widerspruch zu Teilaufgabe (a)?

Problem 3(b)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit zur Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge mit n Punkten in $\Theta(n \log n)$ liegt. Es gibt also keinen Algorithmus, der asymptotisch echt weniger als $n \log n$ Schritte benötigt. Warum ist das kein Widerspruch zu Teilaufgabe (a)?

- Der Beweis aus der Vorlesung reduziert das Problem Zahlen zu sortieren auf das Problem eine konvexe Hülle zu berechnen.
- Vergleichsbasiertes Sortieren liegt in $\Theta(n \log n)$.

Problem 3(b)

(a) Sei P ein einfaches (nicht notwendigerweise konvexes) Polygon mit n Eckpunkten. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ zur Berechnung der konvexen Hülle von P an.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit zur Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge mit n Punkten in $\Theta(n \log n)$ liegt. Es gibt also keinen Algorithmus, der asymptotisch echt weniger als $n \log n$ Schritte benötigt. Warum ist das kein Widerspruch zu Teilaufgabe (a)?

- Der Beweis aus der Vorlesung reduziert das Problem Zahlen zu sortieren auf das Problem eine konvexe Hülle zu berechnen.
- Vergleichsbasiertes Sortieren liegt in $\Theta(n \log n)$.

- Wir haben hier nicht nur die Punktmenge sondern auch ein einfaches Polygon gegeben.
- Sortierte Reihenfolge der Zahlen ist schon durch Reihenfolge der Knoten im Polygon gegeben.

Problem 4(a)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $p, q \in Q$ zwei Punkte, sodass p der am weitesten von q entfernte Punkt ist. Dann ist p ein Eckpunkt der konvexen Hülle $H(Q)$.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

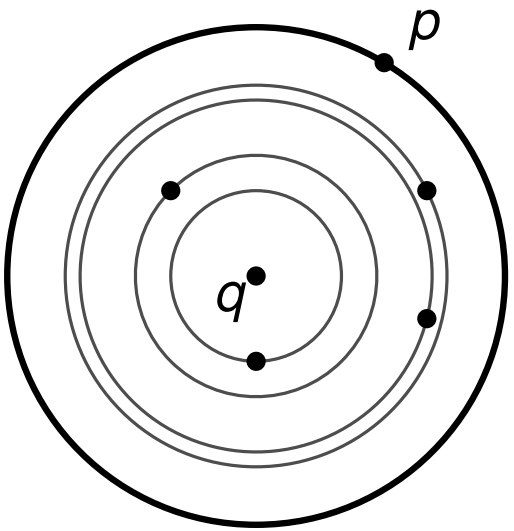
Problem 4(a)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $p, q \in Q$ zwei Punkte, sodass p der am weitesten von q entfernte Punkt ist. Dann ist p ein Eckpunkt der konvexen Hülle $H(Q)$.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

(a)



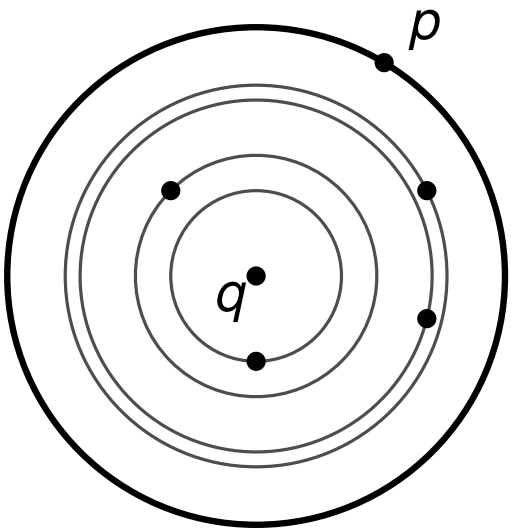
Problem 4(a)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $p, q \in Q$ zwei Punkte, sodass p der am weitesten von q entfernte Punkt ist. Dann ist p ein Eckpunkt der konvexen Hülle $H(Q)$.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

(a)



- Der Kreis K um q mit Radius $|\overline{qp}|$ enthält alle anderen Punkte in Q.

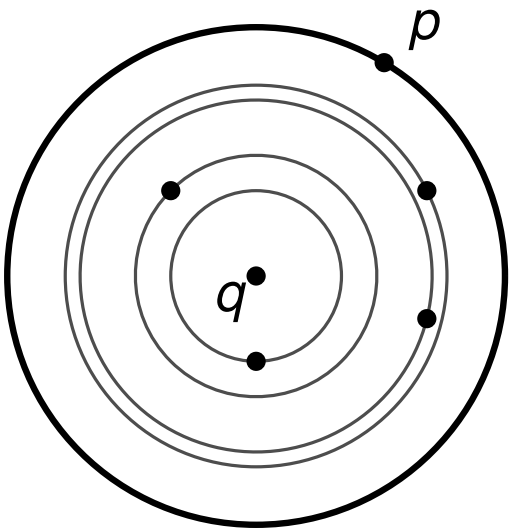
Problem 4(a)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $p, q \in Q$ zwei Punkte, sodass p der am weitesten von q entfernte Punkt ist. Dann ist p ein Eckpunkt der konvexen Hülle $H(Q)$.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

(a)



- Der Kreis K um q mit Radius $|\overline{qp}|$ enthält alle anderen Punkte in Q.
- Außerdem ist ein Kreis konvex.

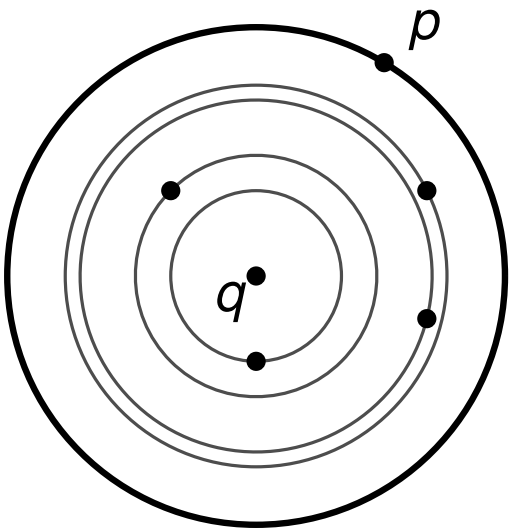
Problem 4(a)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $p, q \in Q$ zwei Punkte, sodass p der am weitesten von q entfernte Punkt ist. Dann ist p ein Eckpunkt der konvexen Hülle $H(Q)$.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

(a)



- Der Kreis K um q mit Radius $|\overline{qp}|$ enthält alle anderen Punkte in Q.
- Außerdem ist ein Kreis konvex.

$\Rightarrow$ die konvexe Hülle $H(Q)$ ist im Kreis K enthalten.

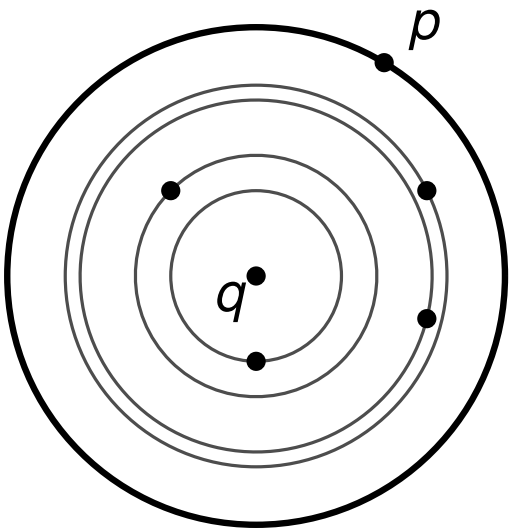
Problem 4(a)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien $p, q \in Q$ zwei Punkte, sodass p der am weitesten von q entfernte Punkt ist. Dann ist p ein Eckpunkt der konvexen Hülle $H(Q)$.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

(a)



- Der Kreis K um q mit Radius $|\overline{qp}|$ enthält alle anderen Punkte in Q.
- Außerdem ist ein Kreis konvex.

$\Rightarrow$ die konvexe Hülle $H(Q)$ ist im Kreis K enthalten.

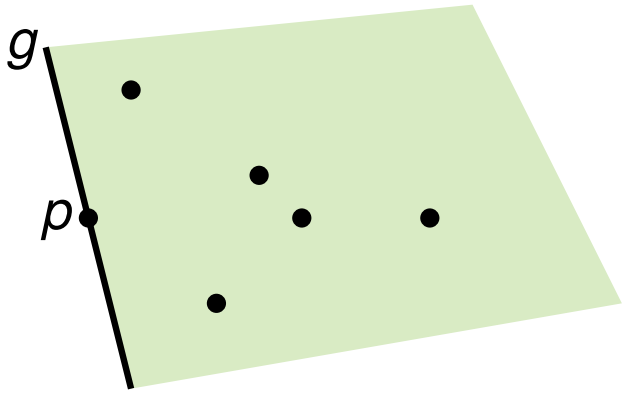
$\Rightarrow$ der Randpunkt p von K muss auch Randpunkt von $H(Q)$ sein.

Problem 4(b)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

Richtung 1: Es gibt Gerade $g \Rightarrow p$ ist Eckpunkt von $H(Q)$.

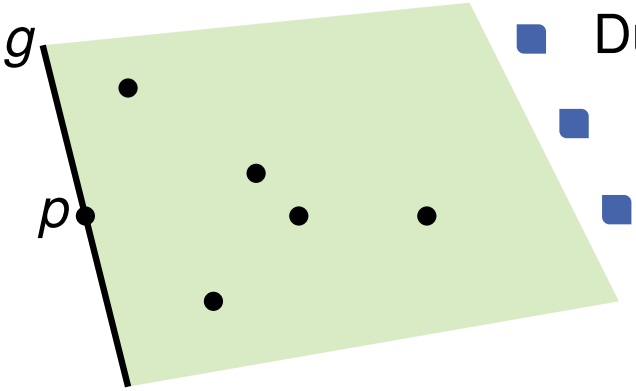


Problem 4(b)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

Richtung 1: Es gibt Gerade $g \Rightarrow p$ ist Eckpunkt von $H(Q)$.



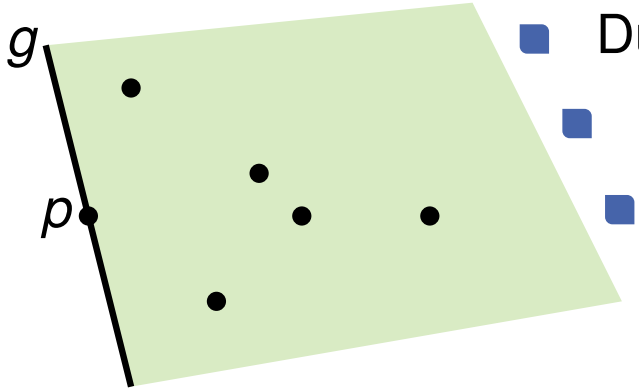
- Durch g begrenzte Halbebenen enthält alle Punkte in Q.
- Halbebenen sind konvex.
- Gleiches Argument wie beim Kreis zeigt: g ist Eckpunkt von $H(Q)$.

Problem 4(b)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

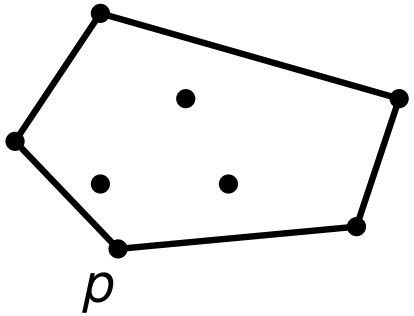
(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

Richtung 1: Es gibt Gerade $g \Rightarrow p$ ist Eckpunkt von $H(Q)$.



- Durch g begrenzte Halbebenen enthält alle Punkte in Q.
- Halbebenen sind konvex.
- Gleiches Argument wie beim Kreis zeigt: g ist Eckpunkt von $H(Q)$.

Richtung 2: p ist Eckpunkt von $H(Q) \Rightarrow$ es gibt Gerade g.

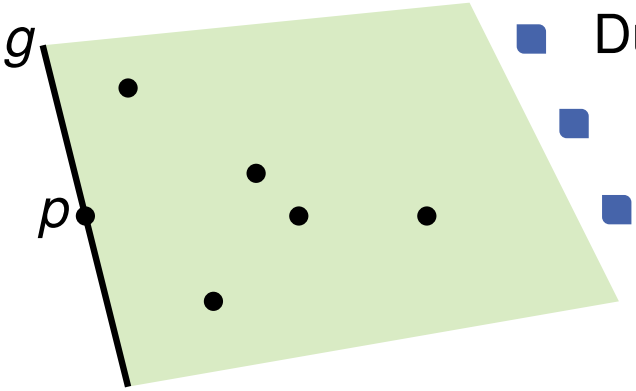


Problem 4(b)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

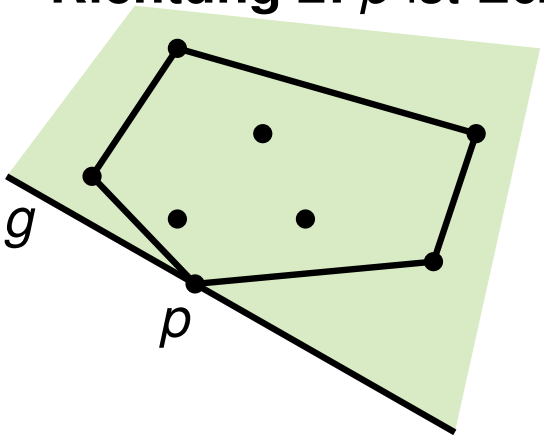
(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

Richtung 1: Es gibt Gerade $g \Rightarrow p$ ist Eckpunkt von $H(Q)$.



- Durch g begrenzte Halbebenen enthält alle Punkte in Q.
- Halbebenen sind konvex.
- Gleiches Argument wie beim Kreis zeigt: g ist Eckpunkt von $H(Q)$.

Richtung 2: p ist Eckpunkt von $H(Q) \Rightarrow$ es gibt Gerade g.



- Sei g eine Gerade durch p, die beide Nachbarn auf dem Rand von $H(Q)$ auf der Gleichen Seite hat.

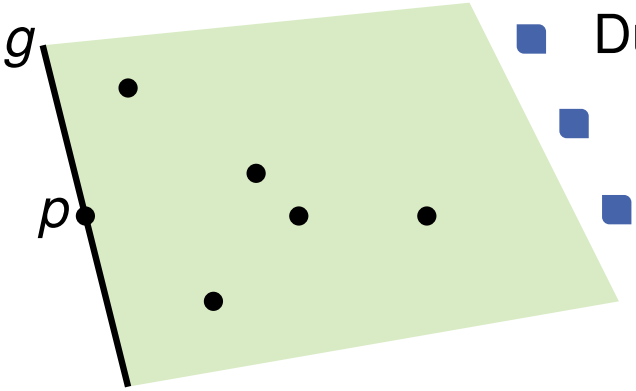
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Problem 4(b)

Gegeben sei eine Punktmenge Q. Zeigen Sie folgende Aussagen.

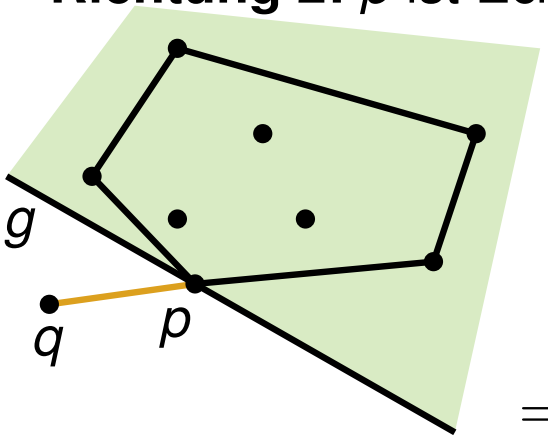
(b) Ein Punkt $p \in Q$ ist ein Eckpunkt der Konvexen Hülle $H(Q)$ genau dann, wenn es eine Gerade g durch p gibt, sodass alle Punkte $Q \setminus \{p\}$ auf der gleichen Seite von g liegen.

Richtung 1: Es gibt Gerade $g \Rightarrow p$ ist Eckpunkt von $H(Q)$.



- Durch g begrenzte Halbebenen enthält alle Punkte in Q.
  - Halbebenen sind konvex.
    - Gleiches Argument wie beim Kreis zeigt: g ist Eckpunkt von $H(Q)$.

Richtung 2: p ist Eckpunkt von $H(Q) \Rightarrow$ es gibt Gerade g.



- Sei g eine Gerade durch p, die beide Nachbarn auf dem Rand von $H(Q)$ auf der Gleichen Seite hat.
- Für einen Punkt q auf der anderen Seite von g würde $\overline{pq}$ nicht in $H(Q)$ liegen. $\Rightarrow$ Widerspruch zur Konvexität.

$\Rightarrow$ g tut das gewünschte.