Theoretische Grundlagen der Informatik

Übung am 02.02.2012

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Lehre im SS 2012

- Proseminar „Die $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$-Vermutung“
  - Nähere Informationen:

    `i11www.iti.uni-karlsruhe.de/teaching/sommer2012/pvsnp/index`
  - Fragen: Mail an Ignaz Rutter (`rutter@kit.edu`)
- Vorlesung „Algorithmen für planare Graphen“
  - Näheres bald auf unserer Homepage

Organisatorisches

- Erinnerung: Anmeldung zur Hauptklausur bis zum 8. Februar möglich
- Fragen/Sonderfälle $\rightarrow$ Übungsleiter
- Abmeldung nach dem 8. Februar
  - Persönlich bei Tanja Hartmann (Studierendenausweis mitbringen)
  - Vor Beginn der Klausur im Hörsaal
- Da ein Punkt auf diesem Blatt aus der Bewertung herausfällt (siehe Erklärung bei der Lösung zu Aufgabe 1)), werden insgesamt 90 Punkte für den Klausurbonus benötigt
- Sobald alles korrigiert: Aushang von Matrikelnummern von Studenten mit Bonus (zum Prüfen)

Wunschübung

- Nächster Donnerstag: Wunschübung statt Vorlesung
- Wunschthemen/Aufgabentypen?

Wunschübung

- Nächster Donnerstag: Wunschübung statt Vorlesung
- Wunschthemen/Aufgabentypen?
- Bis Sonntag auch per Mail an `tanja.hartmann@kit.edu` möglich

Hinweis zu Aufgabe 1

- Auf dem Übungsblatt ist ein Tippfehler in der gegebenen Grammatik
- Die Regel $S \rightarrow AB$ ist dort $S \rightarrow A$
- Hier: Lösung zur Grammatik mit Regel $S \rightarrow AB$, so wie in der Übung vorgestellt
- Zusatzmaterial auf Homepage
  - Lösung zu Aufgabe 1b), wie sie auf dem Übungsblatt gegeben war
  - Hinweise zur Bepunktung
- Bitte entschuldigt diese Unachtsamkeit!

Aufgabe 1

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die CH-2-Grammatik mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{A, B, C, D, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid aBCC \mid C \\
A &\to a \mid BD \mid \varepsilon \\
B &\to b \\
C &\to c \mid S \\
D &\to d \mid A \mid Daa
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1 a)

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die CH-2-Grammatik mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{A, B, C, D, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid aBCC \mid C \\
A &\to a \mid BD \mid \varepsilon \\
B &\to b \\
C &\to c \mid S \\
D &\to d \mid A \mid Daa
\end{aligned}
$$

- Lässt sich der CYK-Algorithmus auf G (ohne Modifikationen) anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1 a)

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die CH-2-Grammatik mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{A, B, C, D, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$\begin{aligned}
S &\to AB \mid aBCC \mid C \\
A &\to a \mid BD \mid \varepsilon \\
B &\to b \\
C &\to c \mid S \\
D &\to d \mid A \mid Daa
\end{aligned}$$

- Lässt sich der CYK-Algorithmus auf G (ohne Modifikationen) anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- Grammatik ist kontextfrei $\Rightarrow$ Prinzipiell kann CYK für das Wortproblem in $L(G)$ benutzt werden, **aber...**

Aufgabe 1 a)

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die CH-2-Grammatik mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{A, B, C, D, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$S \to AB \mid aBCC \mid C$$
$$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid A \mid Daa$$

- Lässt sich der CYK-Algorithmus auf G (ohne Modifikationen) anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- Grammatik ist kontextfrei $\Rightarrow$ Prinzipiell kann CYK für das Wortproblem in $L(G)$ benutzt werden, **aber...**
- Grammatik ist nicht in Chomsky-Normalform, also kann CYK nicht direkt benutzt werden!

Aufgabe 1 b)

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die CH-2-Grammatik mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{A, B, C, D, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid aBCC \mid C \\
A &\to a \mid BD \mid \varepsilon \\
B &\to b \\
C &\to c \mid S \\
D &\to d \mid A \mid Daa
\end{aligned}
$$

- Bringen Sie G mit Hilfe des Verfahrens aus der Vorlesung in Chomsky-Normalform.

Aufgabe 1 b)

$$S \to AB \mid aBCC \mid C$$
$$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid A \mid Daa$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 1: Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus V oder nur ein Symbol aus Σ

$$S \rightarrow AB \mid aBCC \mid C$$

$$A \rightarrow a \mid BD \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow c \mid S$$

$$D \rightarrow d \mid A \mid Daa$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 1: Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus V oder nur ein Symbol aus Σ

$S \to AB \mid Y_aBCC \mid C$

$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$

$B \to b$

$C \to c \mid S$

$D \to d \mid A \mid DY_aY_a$

$Y_a \to a$

Aufgabe 1 b)

Schritt 1: Alle Regeln haben Länge ≤ 2

$$S \rightarrow AB \mid Y_a BCC \mid C$$
$$A \rightarrow a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c \mid S$$
$$D \rightarrow d \mid A \mid DY_aY_a$$
$$Y_a \rightarrow a$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 1: Alle Regeln haben Länge ≤ 2

$$S \rightarrow AB \mid Y_a C_1 \mid C$$
$$A \rightarrow a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c \mid S$$
$$D \rightarrow d \mid A \mid DC_3$$
$$Y_a \rightarrow a$$
$$C_1 \rightarrow BC_2$$
$$C_2 \rightarrow CC$$
$$C_3 \rightarrow Y_a Y_a$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$S \to AB \mid Y_a C_1 \mid C$$
$$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid A \mid DC_3$$
$$Y_a \to a$$
$$C_1 \to BC_2$$
$$C_2 \to CC$$
$$C_3 \to Y_a Y_a$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$S \to AB \mid Y_a C_1 \mid C$$
$$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid A \mid DC_3$$
$$Y_a \to a$$
$$C_1 \to BC_2$$
$$C_2 \to CC$$
$$C_3 \to Y_a Y_a$$

$$V' = \{A\}$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$S \to B \mid Y_a C_1 \mid C$$
$$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid \varepsilon \mid DC_3$$
$$Y_a \to a$$
$$C_1 \to BC_2$$
$$C_2 \to CC$$
$$C_3 \to Y_a Y_a$$

Testweise: Ersetze A durch ε in rechten Seiten

$$V' = \{A\}$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$S \to B \mid Y_a C_1 \mid C$
$A \to a \mid BD \mid \varepsilon$
$B \to b$
$C \to c \mid S$
$D \to d \mid \varepsilon \mid DC_3$
$Y_a \to a$
$C_1 \to BC_2$
$C_2 \to CC$
$C_3 \to Y_a Y_a$

Testweise: Ersetze A durch ε in rechten Seiten

$V' = \{A, D\}$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$S \to B \mid Y_a C_1 \mid C$$
$$A \to a \mid B \mid \varepsilon$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid \varepsilon \mid C_3$$
$$Y_a \to a$$
$$C_1 \to B C_2$$
$$C_2 \to C C$$
$$C_3 \to Y_a Y_a$$

Testweise: Ersetze D durch ε in rechten Seiten

$$V' = \{A, D\}$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \rightarrow \varepsilon$ vor.

$$S \rightarrow AB \mid Y_a C_1 \mid C$$
$$A \rightarrow a \mid BD \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c \mid S$$
$$D \rightarrow d \mid A \mid DC_3$$
$$Y_a \rightarrow a$$
$$C_1 \rightarrow BC_2$$
$$C_2 \rightarrow CC$$
$$C_3 \rightarrow Y_a Y_a$$

$$V' = \{A, D\}$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid Y_aC_1 \mid C \mid B \\
A &\to a \mid BD \mid B \\
B &\to b \\
C &\to c \mid S \\
D &\to d \mid A \mid DC_3 \mid C_3 \\
Y_a &\to a \\
C_1 &\to BC_2 \\
C_2 &\to CC \\
C_3 &\to Y_aY_a
\end{aligned}
$$

$$V' = \{A, D\}$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

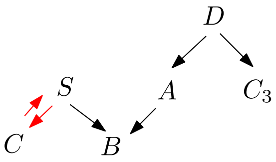
$$S \rightarrow AB \mid Y_a C_1 \mid C \mid B$$
$$A \rightarrow a \mid BD \mid B$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c \mid S$$
$$D \rightarrow d \mid A \mid DC_3 \mid C_3$$
$$Y_a \rightarrow a$$
$$C_1 \rightarrow BC_2$$
$$C_2 \rightarrow CC$$
$$C_3 \rightarrow Y_a Y_a$$

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$$S \to AB \mid Y_a C_1 \mid C \mid B$$
$$A \to a \mid BD \mid B$$
$$B \to b$$
$$C \to c \mid S$$
$$D \to d \mid A \mid DC_3 \mid C_3$$
$$Y_a \to a$$
$$C_1 \to BC_2$$
$$C_2 \to CC$$
$$C_3 \to Y_a Y_a$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \to AB \mid Y_a C_1 \mid B \mid c$

$A \to a \mid BD \mid B$

$B \to b$

$D \to d \mid A \mid DC_3 \mid C_3$

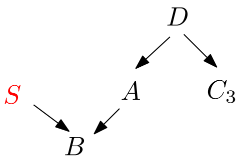
$Y_a \to a$

$C_1 \to BC_2$

$C_2 \to SS$

$C_3 \to Y_a Y_a$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \to AB \mid Y_aC_1 \mid B \mid c$

$A \to a \mid BD \mid B$

$B \to b$

$D \to d \mid A \mid DC_3 \mid C_3$

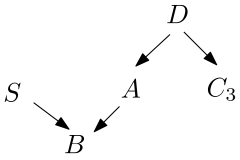
$Y_a \to a$

$C_1 \to BC_2$

$C_2 \to SS$

$C_3 \to Y_aY_a$

Abhängigkeitsgraph:



topologische Sortierung: D, S, A, C_3, B

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \rightarrow AB \mid Y_a C_1 \mid b \mid c$

$A \rightarrow a \mid BD \mid b$

$B \rightarrow b$

$D \rightarrow d \mid A \mid DC_3 \mid C_3$

$Y_a \rightarrow a$

$C_1 \rightarrow BC_2$

$C_2 \rightarrow SS$

$C_3 \rightarrow Y_a Y_a$

Abhängigkeitsgraph:

$$\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S \arrow[dr] & & A \arrow[dl] & & C_3 \\
 & B & & &
\end{tikzcd}$$

topologische Sortierung: D, S, A, C_3, B

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \to AB \mid Y_a C_1 \mid b \mid c$

$A \to a \mid BD \mid b$

$B \to b$

$D \to d \mid A \mid DC_3 \mid Y_a Y_a$

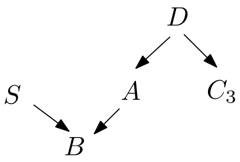
$Y_a \to a$

$C_1 \to BC_2$

$C_2 \to SS$

$C_3 \to Y_a Y_a$

Abhängigkeitsgraph:



topologische Sortierung: D, S, A, C_3, B

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \rightarrow AB \mid Y_aC_1 \mid b \mid c$

$A \rightarrow a \mid BD \mid b$

$B \rightarrow b$

$D \rightarrow d \mid a \mid BD \mid b \mid DC_3 \mid Y_aY_a$

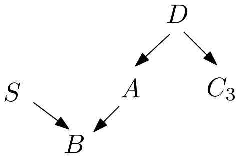
$Y_a \rightarrow a$

$C_1 \rightarrow BC_2$

$C_2 \rightarrow SS$

$C_3 \rightarrow Y_aY_a$

Abhängigkeitsgraph:



topologische Sortierung: D, S, A, C_3, B

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \to AB \mid Y_a C_1 \mid b \mid c$

$A \to a \mid BD \mid b$

$B \to b$

$D \to d \mid a \mid BD \mid b \mid DC_3 \mid Y_a Y_a$

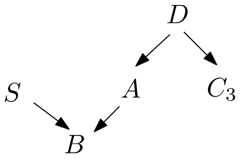
$Y_a \to a$

$C_1 \to BC_2$

$C_2 \to SS$

$C_3 \to Y_a Y_a$

Abhängigkeitsgraph:



topologische Sortierung: D, S, A, C_3, B

Aufgabe 1 b)

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln

$S \rightarrow AB \mid Y_a C_1 \mid b \mid c$

$A \rightarrow a \mid BD \mid b$

$B \rightarrow b$

$D \rightarrow d \mid a \mid BD \mid b \mid DC_3 \mid Y_a Y_a$

$Y_a \rightarrow a$

$C_1 \rightarrow BC_2$

$C_2 \rightarrow SS$

$C_3 \rightarrow Y_a Y_a$

Abhängigkeitsgraph:

$$\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S \arrow[dr] & & A \arrow[dl] & & C_3 \\
 & B & & &
\end{tikzcd}$$

topologische Sortierung: D, S, A, C_3, B

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$
- $L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$

so als

- $z = uvwxy$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq n$ und
- für alle ≥ 0 das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

Aufgabe 2 a)

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$$

Aufgabe 2 a)

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$$

Lösung:

- Annahme: L_1 ist kontextfrei
- Pumping-Lemma: $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$, so dass $uv^i wx^i y \in L_1$ für alle $i \geq 0$
- Wähle $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$
- Betrachte eine Zerlegung $z = uvwxy$ gemäß des Pumping-Lemmas

Aufgabe 2 a)

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$$

Lösung:

- $|vwx| \leq n$, d.h. vx kann nicht gleichzeitig a's und c's enthalten
- Fall 1: vx enthält keine a's
  - Fall 1.1: vx enthält mindestens ein b: Dann enthält uv^0wx^0y höchstens so viele b's wie a's
  - Fall 1.2: vx enthält kein b ($\Rightarrow$ also mindestens ein c): Dann enthält uv^0wx^0y höchstens so viele c's wie b's

Aufgabe 2 a)

Karlsruher Institut für Technologie

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$$

Lösung:

- $|vwx| \leq n$, d.h. vx kann nicht gleichzeitig a's und c's enthalten
- Fall 2: vx enthält keine c's
  - Falls vx mindestens ein b enthält, dann enthält uv^2wx^2y mindestens so viele b's wie c's
  - Falls vx mindestens ein a enthält, dann enthält uv^3wx^3y mindestens so viele a's wie c's
- In allen Fällen gibt es also $i \in \mathbb{N}_0$, so dass uv^iwx^iy nicht in L_1
- Dies ist ein Widerspruch zum Pumping-Lemma

Aufgabe 2 b)

$$L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Aufgabe 2 b)

$$L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Lösung:

- Annahme: L_2 ist kontextfrei
- Pumping-Lemma: $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$, so dass $uv^iwx^iy \in L_2$ für alle $i \geq 0$
- Wähle $z = 0^n1^n01^n$
- Betrachte eine Zerlegung $z = uvwxy$ gemäß des Pumping-Lemmas

Aufgabe 2 b)

$$L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Lösung:

- $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$
- $|vwx| \leq n$, d.h. es müssen nur folgende Fälle betrachtet werden:
  - Fall 1: v und x liegen komplett in der linken Hälfte des Wortes
  - Fall 2: v und x liegen komplett in der rechten Hälfte des Wortes
  - Fall 3: v und x sind Teilworte der mittleren beiden Blöcke

Aufgabe 2 b)

$$L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Lösung:

- $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$
- $|vwx| \leq n$, d.h. es müssen nur folgende Fälle betrachtet werden:
  - Fall 1: v und x liegen komplett in der linken Hälfte des Wortes
  - ... dann ist $uv^0wx^0y = 0^{n-j}1^{n-k}0^n1^n \notin L_2$, da $k \geq 1$ oder $j \geq 1$
  - Fall 2: v und x liegen komplett in der rechten Hälfte des Wortes
  - ... dann ist $uv^0wx^0y = 0^n1^n0^{n-j}1^{n-k} \notin L_2$, da $k \geq 1$ oder $j \geq 1$
  - Fall 3: v und x sind Teilworte der mittleren beiden Blöcke
  - ... dann ist $uv^0wx^0y = 0^n1^{n-j}0^{n-k}1^n \notin L_2$, da $k \geq 1$ oder $j \geq 1$

Aufgabe 2 b)

$$L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Lösung:

- $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$
- $|vwx| \leq n$, d.h. es müssen nur folgende Fälle betrachtet werden:
  - Fall 1: v und x liegen komplett in der linken Hälfte des Wortes
  - ... dann ist $uv^0wx^0y = 0^{n-j}1^{n-k}0^n1^n \notin L_2$, da $k \geq 1$ oder $j \geq 1$
  - Fall 2: v und x liegen komplett in der rechten Hälfte des Wortes
  - ... dann ist $uv^0wx^0y = 0^n1^n0^{n-j}1^{n-k} \notin L_2$, da $k \geq 1$ oder $j \geq 1$
  - Fall 3: v und x sind Teilworte der mittleren beiden Blöcke
  - ... dann ist $uv^0wx^0y = 0^n1^{n-j}0^{n-k}1^n \notin L_2$, da $k \geq 1$ oder $j \geq 1$
- In allen Fällen ist also uv^0wx^0y nicht in L_2
- Dies ist ein Widerspruch zum Pumping-Lemma

Aufgabe 3

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die Grammatik mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $V = \{A, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

Aufgabe 3 a)

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die Grammatik mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $V = \{A, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

- Liegen die Worte 00001 und 00101 in der von G erzeugten Sprache? Beantworten Sie diese Frage mit Hilfe des CYK-Algorithmus.

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

A				
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

A	A			
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

A	A	A		
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$				
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$				
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$				
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Aufgabe 3 a)

Karlsruher Institut für Technologie

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$			
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$			
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$			
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S				
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

S				
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

S				
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S				
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$				
S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

Aufgabe 3 a)

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

$\emptyset$				
S	A			
$\emptyset$	$\emptyset$	S		
A	A	A	$\emptyset$	
S	S	S	S	A
0	0	0	0	1

- S ist nicht in V_{15}, also liegt 00001 nicht in der von G erzeugten Sprache

Aufgabe 3 a)

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

S				
A	$\emptyset$			
S	$\emptyset$	$\emptyset$		
A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
S	S	A	S	A
0	0	1	0	1

- S ist in V_{15}, also liegt 00101 in der von G erzeugten Sprache

Aufgabe 3 b)

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ die Grammatik mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $V = \{A, S\}$ und der folgenden Regelmenge R:

$$S \rightarrow AA \mid 0$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

- Überführen Sie G mit Hilfe der Regeln (i) und (ii) aus dem Beweis zu Satz 5.23 in Greibach-Normalform.

Ersetzungsregel (i)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (i). Eine Regel

$$A \to \alpha_1 B \alpha_2$$

wobei

$$B \to \beta_1, \quad B \to \beta_2, \quad \ldots, \quad B \to \beta_r$$

alle Regeln sind, deren linke Seite B ist, kann durch die Regeln

$$\begin{gathered} A \to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \\ A \to \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \\ \ldots \\ A \to \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \end{gathered}$$

ersetzt werden.

Ersetzungsregel (ii)

Karlsruher Institut für Technologie

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (ii). Seien

$$\begin{aligned} A &\to A\alpha_1, \ldots, A \to A\alpha_r \\ A &\to \beta_1, \ldots, A \to \beta_s \end{aligned}$$

alle Regeln, deren linke Seite A ist, wobei β_i nicht mit A beginnen. Dann können die Regeln

$$A \to A\alpha_1, \ldots, A \to A\alpha_r$$

durch die Regeln

$$\begin{aligned} A &\to \beta_1 B, \ldots, A \to \beta_s B \\ B &\to \alpha_1, \ldots, B \to \alpha_r, \\ B &\to \alpha_1 B, \ldots, B \to \alpha_r B \end{aligned}$$

ersetzt werden. Dabei sei B eine neu eingeführte Variable.

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \to AA \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$\begin{aligned} S &\to AA \mid 0 \qquad\qquad (i) \\ A &\to SS \mid 1 \end{aligned}$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \to SSA \mid 1A \mid 0 \qquad \text{(i)}$$
$$A \to SS \mid 1$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \to SSA \mid 1A \mid 0$$
$$A \to SS \mid 1$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \rightarrow SSA \mid 1A \mid 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \rightarrow 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$A \rightarrow SS \mid 1$$
$$B \rightarrow SA \mid SAB$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$
\begin{aligned}
S &\to 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0 \\
A &\to SS \mid 1 \\
B &\to SA \mid SAB
\end{aligned}
$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$
\begin{aligned}
S &\to 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0 \\
A &\to SS \mid 1 \qquad\qquad (i) \\
B &\to SA \mid SAB
\end{aligned}
$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0 \\
A &\rightarrow 1AB \mid 0BS \mid 1AS \mid 0S \mid 1 \qquad \text{(i)} \\
B &\rightarrow SA \mid SAB
\end{aligned}
$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \to 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0$$
$$A \to 1AB \mid 0BS \mid 1AS \mid 0S \mid 1$$
$$B \to SA \mid SAB \qquad \text{(i)}$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$S \rightarrow 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0$$
$$A \rightarrow 1AB \mid 0BS \mid 1AS \mid 0S \mid 1$$
$$B \rightarrow 1ABA \mid 0BA \mid 1AA \mid 0A \qquad \text{(i)}$$
$$B \rightarrow 1ABAB \mid 0BAB \mid 1AAB \mid 0AB$$

Greibach-Normalform

Noch zu tun: Forme Grammatik so um, dass jede rechte Seite mit einem Terminal beginnt

$$
\begin{aligned}
S &\to 1AB \mid 0B \mid 1A \mid 0 \\
A &\to 1AB \mid 0BS \mid 1AS \mid 0S \mid 1 \\
B &\to 1ABA \mid 0BA \mid 1AA \mid 0A \\
B &\to 1ABAB \mid 0BAB \mid 1AAB \mid 0AB
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Sei G eine kontextfreie Grammatik und $w \in L(G)$ ein Wort der Länge n.

- Wie lang ist die Ableitung von w in G, wenn G in Chomsky-Normalform ist?
- Wie lang ist die Ableitung von w in G, wenn G in Greibach-Normalform ist?

Aufgabe 4 a)

Sei G eine kontextfreie Grammatik und $w \in L(G)$ ein Wort der Länge n.

- Wie lang ist die Ableitung von w in G, wenn G in Chomsky-Normalform ist?

Aufgabe 4 a)

Sei G eine kontextfreie Grammatik und $w \in L(G)$ ein Wort der Länge n.

- Wie lang ist die Ableitung von w in G, wenn G in Chomsky-Normalform ist?

Lösung:

- Sei $n := |w|$
- Beobachtung 1: Es werden genau n Ableitungsschritte gebraucht, die Variablen auf Terminale abbilden
- Beobachtung 2: Alle anderen Ableitungen erhöhen die Anzahl der Zeichen um genau eins
- Insgesamt benötigt die Ableitung also genau $n - 1 + n$ Ableitungsschritte

Aufgabe 4 b)

Sei G eine kontextfreie Grammatik und $w \in L(G)$ ein Wort der Länge n.

- Wie lang ist die Ableitung von w in G, wenn G in Greibach-Normalform ist?

Aufgabe 4 b)

Sei G eine kontextfreie Grammatik und $w \in L(G)$ ein Wort der Länge n.

- Wie lang ist die Ableitung von w in G, wenn G in Greibach-Normalform ist?

Lösung:

- Sei $n := |w|$
- Beobachtung: In jedem Schritt wird genau ein Nichtterminal erzeugt
- Insgesamt benötigt die Ableitung also genau n Ableitungsschritte

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$
\begin{array}{lcllcl}
(s,a,Z) & \mapsto & (s, YZ), & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\
(s,a,Y) & \mapsto & (s, YY), & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\
(s,b,Y) & \mapsto & (q, \; Y \;), & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}
$$

- Ist $\mathcal{A}$ deterministisch?
- Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes *aabaab*.
- Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage.
- Geben Sie die Sprache L_ϵ, die von $\mathcal{A}$ durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L_ϵ an.

Kellerautomaten - Arbeitsweise

Ein PDA *akzeptiert* ein $w \in \Sigma^*$ *durch leeren Stack*, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Kellerautomaten - Arbeitsweise

Ein PDA *akzeptiert* ein $w \in \Sigma^*$ *durch leeren Stack*, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Ein PDA *akzeptiert* ein $w \in \Sigma^*$ *durch einen akzeptierenden Endzustand*, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration (q, ε, γ) mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Kellerautomaten - Arbeitsweise

Ein PDA *akzeptiert* ein $w \in \Sigma^*$ *durch leeren Stack*, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Ein PDA *akzeptiert* ein $w \in \Sigma^*$ *durch einen akzeptierenden Endzustand*, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration (q, ε, γ) mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Ein PDA ist *deterministisch* (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$.

Aufgabe 5 a)

Karlsruher Institut für Technologie

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{array}{lclclcl} (s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & \quad & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\ (s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\ (s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z) \end{array}$$

Ist $\mathcal{A}$ deterministisch?

Aufgabe 5 a)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$
\begin{array}{lcllcl}
(s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\
(s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\
(s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}
$$

Ist $\mathcal{A}$ deterministisch?

Lösung:

Nein, A ist nicht deterministisch, denn $|\delta(s, a, Z)| + |\delta(s, \epsilon, Z)| > 1$

Aufgabe 5 b)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{array}{lcllcl}
(s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\
(s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\
(s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}$$

Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes *aabaab*. Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

Aufgabe 5 b)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$
\begin{array}{lcllcl}
(s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\
(s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\
(s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}
$$

Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes *aabaab*. Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

Lösung:

- $(s, aabaab, Z)$
- $(s, abaab, YZ)$
- $(s, baab, YYZ)$
- (q, aab, YYZ)
- (q, ab, YZ)
- (q, b, Z)
- (s, ε, Z)
- $(s, \varepsilon, \varepsilon)$

Aufgabe 5 c)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{array}{lclclcl} (s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\ (s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\ (s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z) \end{array}$$

Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Aufgabe 6 c)

Karlsruher Institut für Technologie

Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Im Zustand s wird für jedes a ein Y auf den Stack gelegt und in Zustand q wird für jedes a ein Y vom Stack genommen
- Der Kellerautomat befindet sich immer abwechselnd in Zustand s und q
- Wie sieht das Suffix eines Wortes aus, dessen Abarbeitung in q endet?
- Betrachte die Konfigurationsfolge, nachdem das letzte Mal von q nach s gewechselt wurde
- Wenn von q nach s gewechselt wird, ist dies mit der Regel $(q, b, Z) \mapsto (s, Z)$, es liegt also danach nur Z auf dem Stack

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Wenn nur Z auf dem Stack liegt, dann wird nach q gewechselt durch einlesen von $a^i b$ mit $i > 0$
- Der Kellerautomat bleibt dann in Zustand q, solange höchstens i a's eingelesen werden, also wenn das Suffix des Wortes von der Form $a^i b a^j$ mit $i > 0, j \leq i$ ist

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F, die von $\mathcal{A}$ durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Was kann vor diesem Suffix kommen?
- Zuvor kann beliebig oft von s nach q und wieder zurück gewechselt werden
- Von q nach s gewechselt werden kann nur, wenn gleich viele a's eingelesen werden wie zuvor in Zustand s
- Insgesamt kann also beliebig oft ein Wort der Form $a^i ba^i b$ mit $i > 0$ eingelesen werden
- Sei $L = \{a^i ba^i b \mid i > 0\}$
- Dann ist $L_f = L^* \cdot \{a^i ba^j \mid i > 0, j \leq i\}$

Aufgabe 5 d)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$
\begin{array}{lclclcl}
(s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & \quad & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\
(s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\
(s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}
$$

Geben Sie die Sprache L_ϵ, die von $\mathcal{A}$ durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Aufgabe 5 d)

Karlsruher Institut für Technologie

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
(s,a,Z) & \mapsto & (s,YZ), & (s,\epsilon,Z) & \mapsto & (s,\epsilon) \\
(s,a,Y) & \mapsto & (s,YY), & (q,a,Y) & \mapsto & (q,\epsilon) \\
(s,b,Y) & \mapsto & (q,\ Y\ ), & (q,b,Z) & \mapsto & (s,Z)
\end{array}$$

Geben Sie die Sprache L_ϵ, die von $\mathcal{A}$ durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Der Stack kann nur geleert werden, wenn sich der Kellerautomat in Zustand s befindet und keine Y's auf dem Stack liegen
- Wie bei Teilaufgabe c) überlegt, ist dies genau am Anfang der Fall und wenn beliebig oft ein Wort der Form a^iba^ib mit $i > 0$ eingelesen wird
- Sei $L = \{a^iba^ib \mid i > 0\}$, dann ist L_ϵ also genau L^*

Aufgabe 5 e)

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L_ϵ an.

Aufgabe 5 e)

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L_ϵ an.

Lösung:

- Theoretisch möglich mit Tripelkonstruktion
- Die Sprache ist jedoch hinreichend einfach, so dass direkt eine Grammatik angegeben werden kann
- $L_\epsilon = L^*$ mit $L = \{a^i b a^i b \mid i > 0\}$
- Kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{S, B\}, S, R')$ für L:

$$R' = \{S \rightarrow aBab, B \rightarrow aBa \mid b\}$$

- Kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{S, B\}, S, R)$ für L_ϵ:

$$R = \{S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid aBab, B \rightarrow aBa \mid b\}$$