Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Hauptklausur zur Vorlesung
Theoretische Grundlagen der Informatik
Wintersemester 2011/2012

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

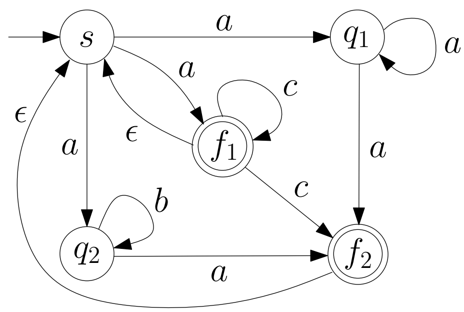
Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
1	1	4	-	-	5			-	-	
2	1	3	-	-	4			-	-	
3	3	4	-	-	7			-	-	
4	5	-	-	-	5		-	-	-	
5	4	1	-	-	5			-	-	
6	4	3	-	-	7			-	-	
7	3	-	-	-	3	-		-	-	
8	1	2	1	1	5					
9	2	1	3	3	9					
10	10x1				10					
Σ					60					

Aufgabe 1: (1 + 4 Punkte)

Gegeben sei der folgende endliche Automat $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



(a) Geben Sie die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{A})$ als regulären Ausdruck an. Es ist nicht verlangt, dass Sie hierzu das Verfahren aus der Vorlesung benutzen.

(b) Konstruieren Sie mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}'$, der dieselbe Sprache akzeptiert wie $\mathcal{A}$. Geben Sie das Ergebnis als Zustandsübergangsdiagramm an und bezeichnen Sie die Zustände mit den Teilmengen der Zustände in $\mathcal{A}$, die sie repräsentieren.

Aufgabe 2: (1+3 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalen $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, Nichtterminalen $V = \{S, A, B, C, D\}$, Startsymbol S und Produktionen

$$\begin{aligned} R = \{S &\rightarrow CB \\ A &\rightarrow a \mid CD \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow DA \mid AaDC \mid c \\ D &\rightarrow C \mid d \mid \epsilon\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Grammatik G ist eindeutig.

(b) Geben Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform an, die dieselbe Sprache wie G erzeugt. Gehen Sie dabei systematisch vor, und geben Sie die einzelnen Umformungsschritte in nachvollziehbarer Form an.

Aufgabe 3: (3+4 Punkte)

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache $L := \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a \geq 3|w|_b\}$ erzeugt. Dabei sei $|w|_x$ die Häufigkeit des Zeichens $x \in \{a,b\}$ im Wort w.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache L aus Teilaufgabe (a) maximal vom Chomsky-Typ 2 ist, d.h., dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Ein *einfacher Pfad* in einem gerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E, c)$ mit einer natürlichen Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{N}_0$ ist eine Folge $P = (v_1, \ldots, v_r)$ von Knoten, die jeden Knoten höchstens einmal enthält und für die $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $1 \leq i \leq r - 1$ gilt. Die Länge ℓ eines Pfades $P = (v_1, \ldots, v_r)$ ist definiert als $\ell := \sum_{i=1}^{r-1} c((v_i, v_{i+1}))$.

Problem ℓ-PFAD

Gegeben:	Gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit $c : E \to \mathbb{N}_0$, Parameter $\ell \in \mathbb{N}_0$.
Frage:	Gibt es einen einfachen Pfad der Länge ℓ in G?

Zeigen Sie, dass das Problem ℓ-PFAD $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Sie dürfen dazu benutzen, dass das Problem SUBSETSUM $\mathcal{NP}$-vollständig ist:

Problem SUBSETSUM

Gegeben:	Endliche Menge M, Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$, Parameter $k \in \mathbb{N}_0$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{m \in M'} w(m) = k$?

Aufgabe 5: (4 + 1 Punkte)

Gegeben sei folgende Sprache

$$L := \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = |w|_b \text{ und für jede Zerlegung } w = uv \text{ mit } |u| \geq 1 \text{ gilt } |u|_a \geq |u|_b\}.$$

Dabei sei $|w|_x$ die Häufigkeit des Zeichens $x \in \{a,b\}$ im Wort w.

(a) Zeigen Sie, dass L entscheidbar ist, indem Sie eine deterministische Turingmaschine $\mathcal{M} = (Q, \Sigma = \{a,b\}, \Gamma, \delta, s, F = \{q_J\})$ mit Zuständen $q_N, q_J \in Q$ angeben, die für jede Eingabe $w \in \Sigma^*$ entweder in q_J oder q_N hält und L durch Halten in q_J akzeptiert. Stellen Sie die Übergangsfunktion δ von $\mathcal{M}$ graphisch durch ein Zustandsübergangsdiagramm dar und bezeichnen Sie den Startzustand mit s. Beschreiben Sie kurz in Worten, wie Ihre Turingmaschine arbeitet.

(b) Dokumentieren Sie die Berechnung des Wortes $aababb \in L$ sowie die Berechnung des Wortes $abbaab \notin L$ durch die von Ihnen angegebene Turingmaschine $\mathcal{M}$. Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

Aufgabe 6: (4+3 Punkte)

(a) Sei L eine nicht entscheidbare Sprache.
Zeigen Sie: $L^R := \{w^R \mid w \in L \text{ und } w^R \text{ ist das Spiegelwort zu } w\}$ ist nicht entscheidbar.

(b) Sei $w \in \{0,1\}^*$ und $\mathcal{M}_w$ die Turingmaschine, die durch die Gödelnummer w beschrieben wird. Zeigen Sie, dass die Diagonalsprache $L_d := \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{M}_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$ nicht semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Sei L_1 eine kontextfreie Sprache und L_2 eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass $L_1 \cap L_2$ kontextfrei ist.

Aufgabe 8: (1+2+1+1 Punkte)

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, s, Z, \delta, \{f\})$ der Kellerautomat mit Zustandsmenge $Q = \{s, f\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Stack-Alphabet $\Gamma = \{Y, Z\}$, Anfangszustand s, Stack-Initialisierung Z, einzigem Endzustand f und der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{aligned} (s, 1, Z) &\mapsto (s, ZY) \\ (s, \varepsilon, Z) &\mapsto (f, \varepsilon) \\ (f, 0, Y) &\mapsto (f, \varepsilon) \end{aligned}$$

(a) Ist $\mathcal{A}$ determinininistisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Dokumentieren Sie eine durch Endzustand akzeptierende Berechung des Wortes 1110. Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

(c) Welche Sprache akzeptiert $\mathcal{A}$ durch akzeptierenden Endzustand?

(d) Welche Sprache akzeptiert $\mathcal{A}$ durch leeren Stack?

Aufgabe 9: (2+1+3+3 Punkte)

Gegeben sei eine endliche Menge M mit $|M| \geq 2$ und eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}$.
Für $M' \subseteq M$ sei $w(M') := \sum_{m \in M'} w(m)$.
Das Optimierungsproblem BALANCED PARTITION besteht darin, M so in zwei Teilmengen $A \subseteq M$ und $B := M \setminus A$ aufzuteilen, dass $\min\{w(A), w(B)\}$ maximal ist.
Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

Algorithmus 1: BALANCED PARTITION APPROXIMATION

Eingabe : Endliche Menge M mit $|M| \geq 2$ und Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}$
Ausgabe : Teilmengen $A \subseteq M$ und $B := M \setminus A$
Sortiere M nicht-aufsteigend nach Gewichten. Danach sei $M[i]$ das Element an i-ter Stelle, d.h. $w(M[i]) \geq w(M[i+1])$ für $1 \leq i \leq n-1$;
$A \leftarrow \{M[i] \mid i \text{ ungerade}\}$;
$B \leftarrow \{M[i] \mid i \text{ gerade}\}$;

(a) Gegeben sei die folgende BALANCED PARTITION Instanz $I = (M, w)$ mit $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ und Gewichtsfunktion w gegeben durch

$$w(m_1) = 8, \quad w(m_2) = 8, \quad w(m_3) = 10, \quad w(m_4) = 5.$$

Geben Sie eine optimale Lösung für die Instanz I an. Welchen Wert hat jede optimale Lösung?

Geben Sie zusätzlich die Lösung an, die Algorithmus **??** bei Eingabe von I berechnet. Welchen Wert hat diese Lösung?

(b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung, die Algorithmus **??** für eine beliebige Instanz zurück gibt, gilt:

$$w(A) \geq w(B) \geq w(A) - w_{\max}$$

wobei $w_{\max} := \max\{w(m) \mid m \in M\}$.

(c) Zeigen Sie, dass Algorithmus **??** 1-approximativ ist, d.h. dass Algorithmus **??** eine relative Gütegarantie von $1 + 1 = 2$ hat.

(d) Zeigen Sie: Falls $P \neq NP$, gibt es keinen absoluten Approximationsalgorithmus für Balanced Partition. Sie dürfen benutzen, dass Balanced Partition $\mathcal{NP}$-schwer ist.

Aufgabe 10: (10 Punkte)

Jeder der folgenden Aussagenblöcke umfasst drei Einzelaussagen. Die sich unterscheidenden Aussagenbausteine sind durch Kästchen gekennzeichnet. Kreuzen Sie genau jene Bausteine an, die in einer wahren Einzelaussage enthalten sind. Jeder Aussagenblock enthält mindestens eine wahre Einzelaussage. Unvollständig oder falsch angekreuzte Aussagenblöcke werden mit null Punkten bewertet, Sie erhalten einen Punkt für jeden Aussagenblock, für den Sie genau die richtige Menge an Aussagenbausteinen angekreuzt haben.

Die Sprache $L = \{(yx^iz)(zxz)^j | i, j \in \mathbb{N}, i < 19, j \leq 17\}$
- ☐ ist maximal vom Chomsky-Typ 0.
- ☐ wird von keiner Grammatik erzeugt.
- ☐ ist regulär.

Ist L eine
- ☐ reguläre
- ☐ nichtentscheidbare
- ☐ kontextsensitive

Sprache so gilt: Für jedes Wort $w \in L$ gibt es einen DEA $\mathcal{A}_w$, der w akzeptiert.

Jede Sprache, die von einer Grammatik erzeugt wird, ist
- ☐ endlich.
- ☐ entscheidbar.
- ☐ semi-entscheidbar.

Für die regulären Ausdrücke (a^*b^+) und $(a^*b)^*$ gilt:
- ☐ $(a^*b^+) = (a^*b)^*$.
- ☐ $(a^*b^+) \subseteq (a^*b)^*$.
- ☐ $(a^*b^+) \supset (a^*b)^*$.

Ist Σ ein endliches Alphabet, so ist Σ^*
- ☐ kontextfrei.
- ☐ NP-vollständig.
- ☐ entscheidbar.

Das Entscheidungsproblem SAT ist
- ☐ unentscheidbar.
- ☐ semi-entscheidbar.
- ☐ in $\mathcal{NP}$.

Falls es einen Approximationsalgorithmus für CLIQUE mit absoluter Gütegarantie gibt, so gilt:
- ☐ $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
- ☐ $\mathcal{NPC} = \mathcal{P} \setminus \{\Sigma^*, \emptyset\}$.
- ☐ $\mathcal{NPI} \neq \emptyset$.

Für nicht entscheidbare Sprachen L gilt:

☐ Die zugeörige Nerode-Relation hat unendlichen Index.
☐ Die Komplementsprache L^c ist nicht semi-entscheidbar.
☐ $L \notin \mathcal{NPC}$.

Für das Optimierungsproblem KNAPSACK gibt es

☐ einen pseudopolynomiellen optimalen Algorithmus.
☐ ein $FPAS$.
☐ ein PAS.

Zu jeder Sprache L, die durch einen nichtdeterministischen Kellerautomaten mit leerem Stack akzeptiert wird, gibt es

☐ einen deterministischen Kellerautomaten, der L mit leerem Stack akzeptiert.
☐ einen nichtdeterministischen Kellerautomaten, der L durch akzeptierenden Endzustand akzeptiert.
☐ eine Grammatik vom Chomsky-Typ 1, die L erzeugt.