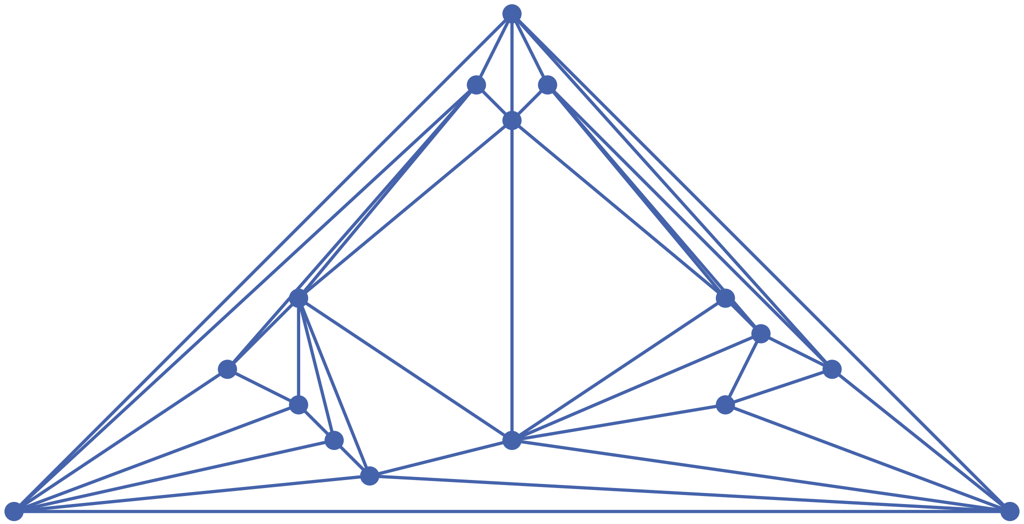
Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Gitterlayouts für planare Graphen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK – LEHRSTUHL ALGORITHMIK I

MARCUS KRUG



bevor’s losgeht

Vorschlag für Prüfungstermine

- Donnerstag, 1. März ab 9:00 Uhr
- Freitag, 30. März ab 9:00 Uhr
- Anmeldung im Sekretariat (Frau Beckert, Raum 321) bis 10 Tage vor der Prüfung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I

Inkrementelle Verfahren (Fortsetzung)

Allgemeine Vorgehensweise

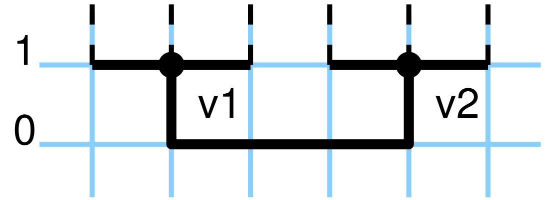
- bestimme geeignete Knoten-Ordnung
- berechne Layout inkrementell durch iteratives Hinzufügen der Knoten

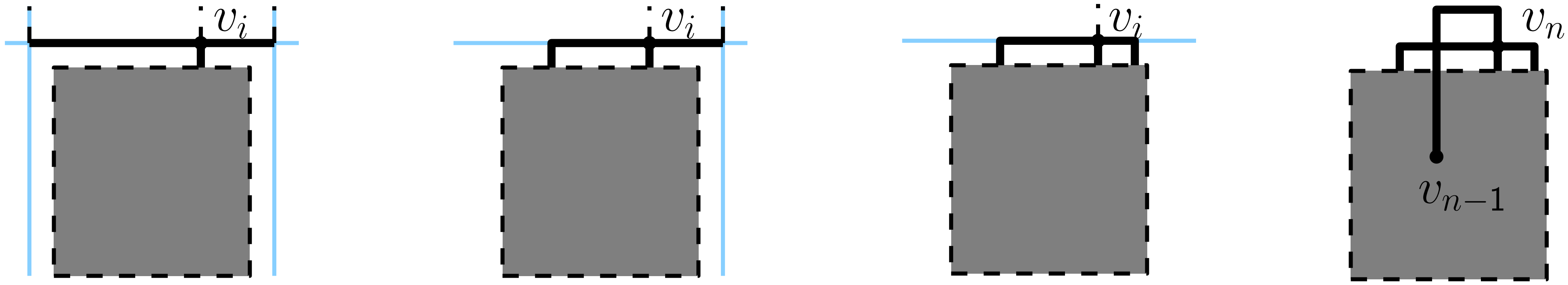
Beispiel: Orthogonale Zeichnung von Graphen mit Maximalgrad ≤ 4

Vorgehensweise

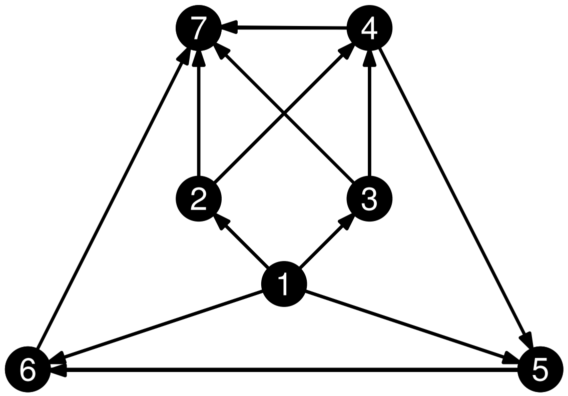
- 2-fach-Zusammenhangskomponenten berechnen
- für jede 2-fach-Zusammenhangskomponente geeignete Knoten-Ordnung berechnen
- Inkrementelles Layout für Zusammenhangskomponente
- rekursiver Ansatz für Gesamt-Graph

Algorithmus für Blöcke

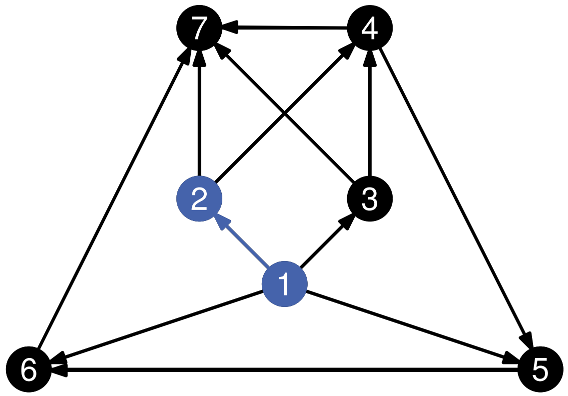




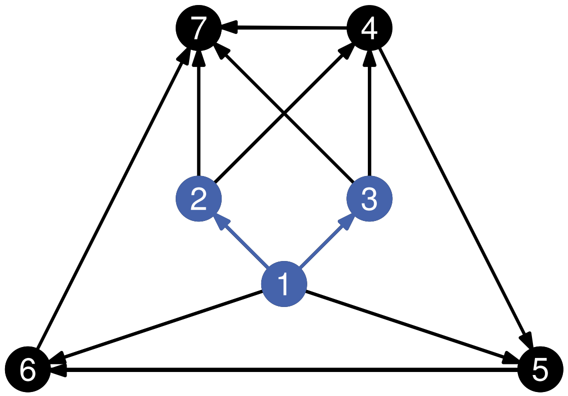
Beispiel

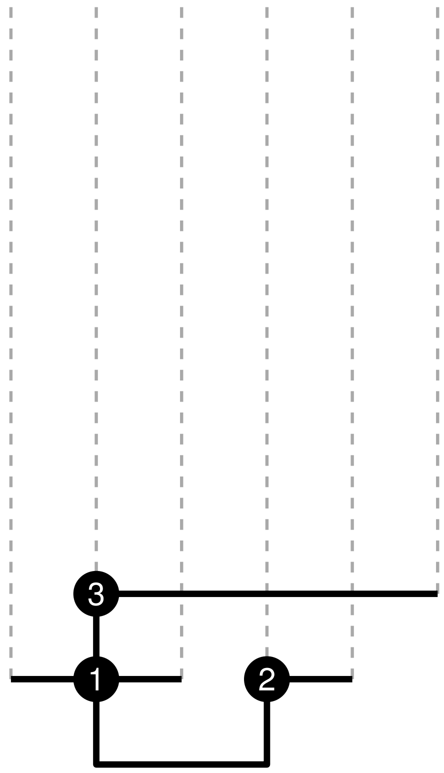


Beispiel

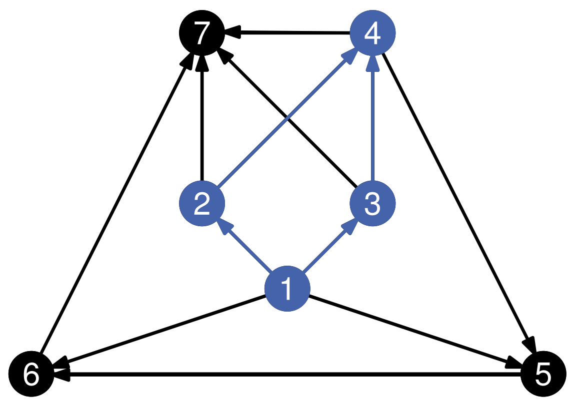


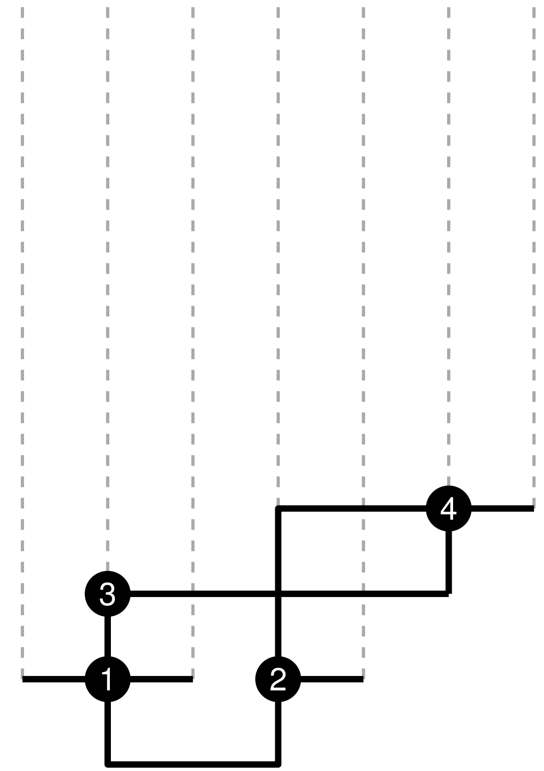
Beispiel



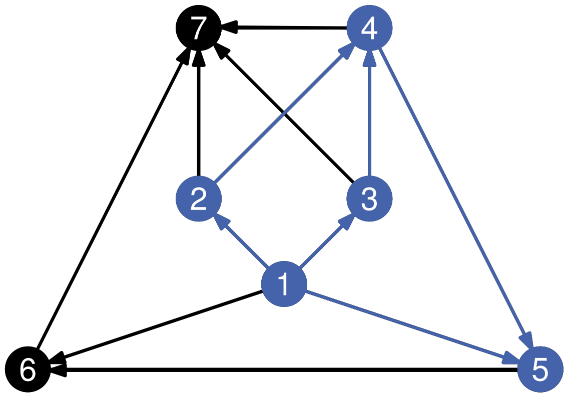


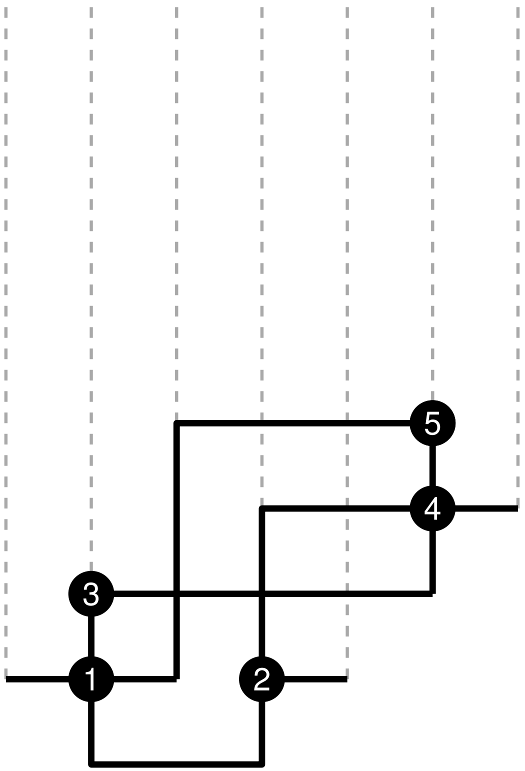
Beispiel



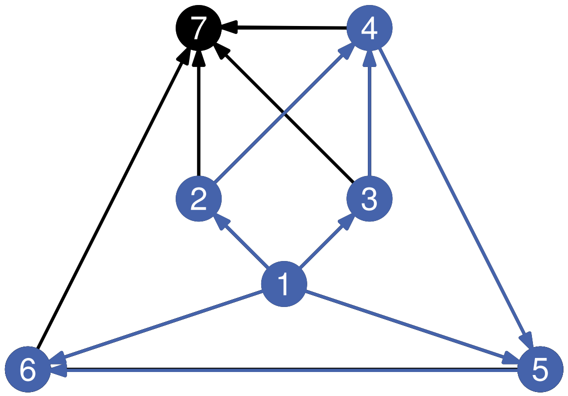


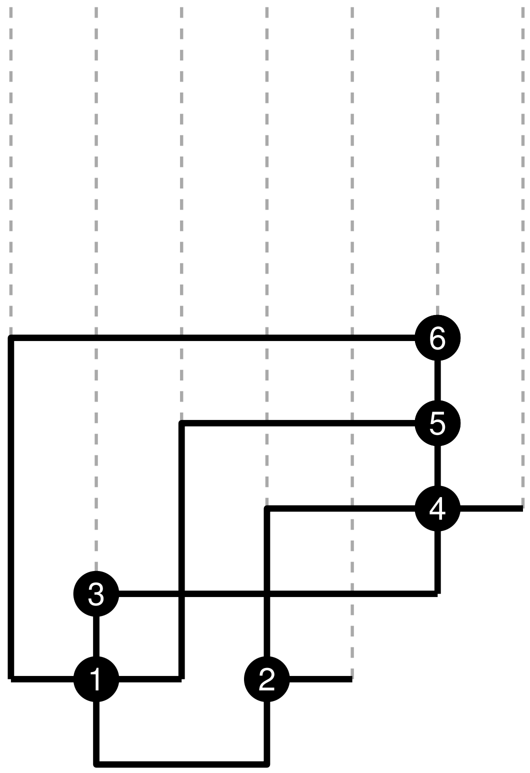
Beispiel



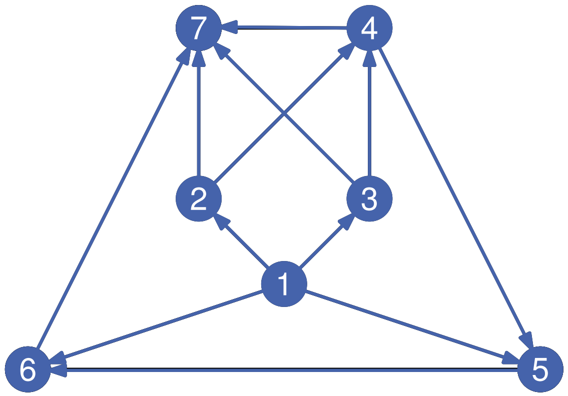


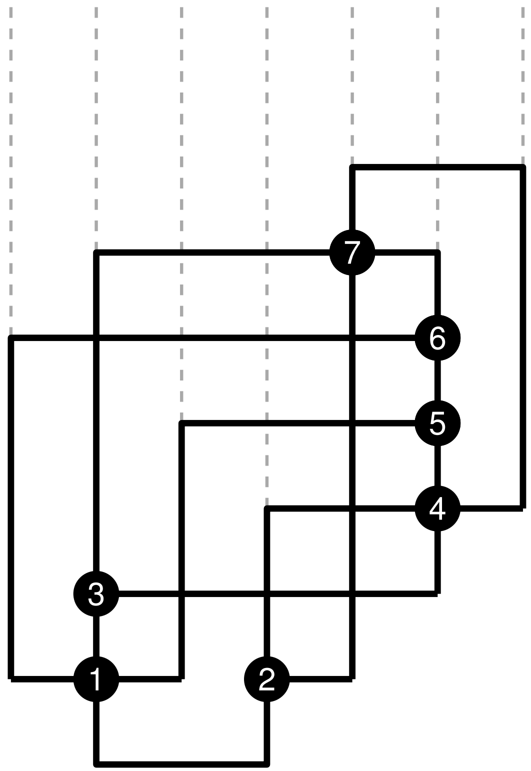
Beispiel



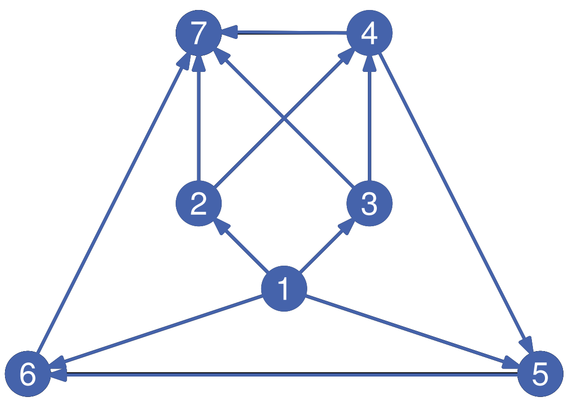


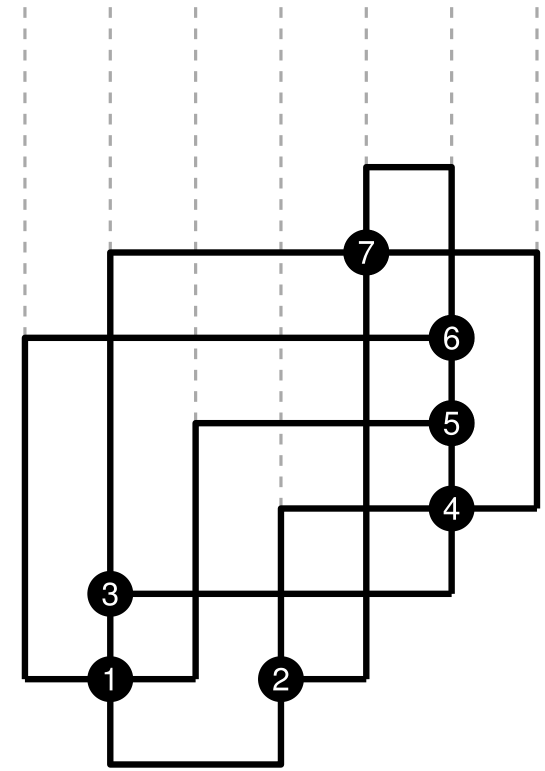
Beispiel



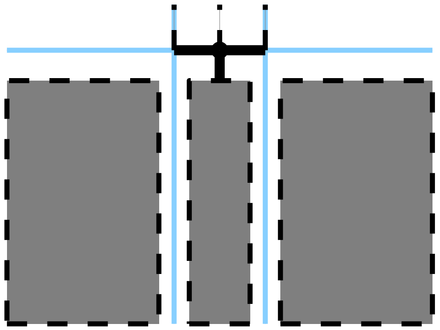


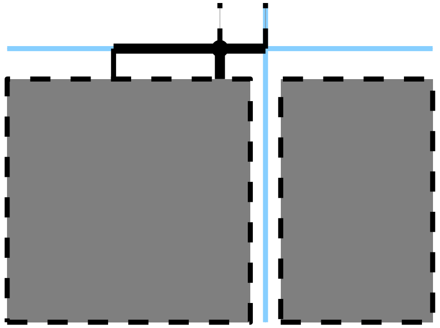
Beispiel

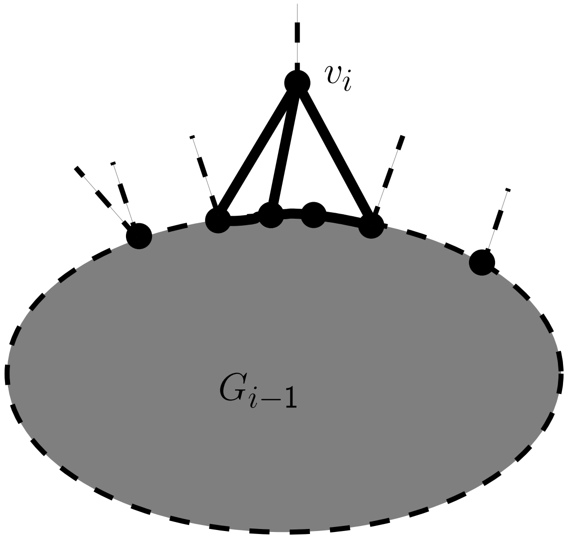




Planarität







Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I

Analyse

Satz [Biedl & Kant '94]

Die benötigte Gittergröße ist höchstens $(m - n + 1) \times n$.

Analyse

Satz [Biedl & Kant '94]

Die benötigte Gittergröße ist höchstens $(m - n + 1) \times n$.

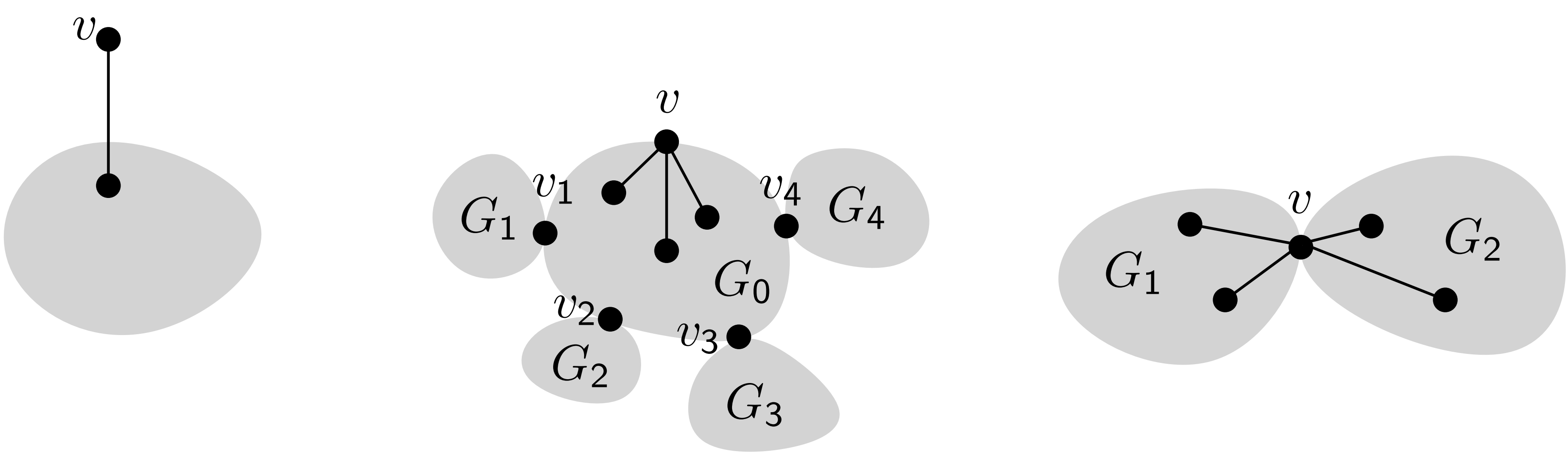
Satz [Biedl & Kant '94]

Die Gesamtzahl der Knicke ist höchstens $2m - 2n + 4$, und keine Kante hat mehr als zwei Knicke, es sei denn G ist ein Oktaeder.

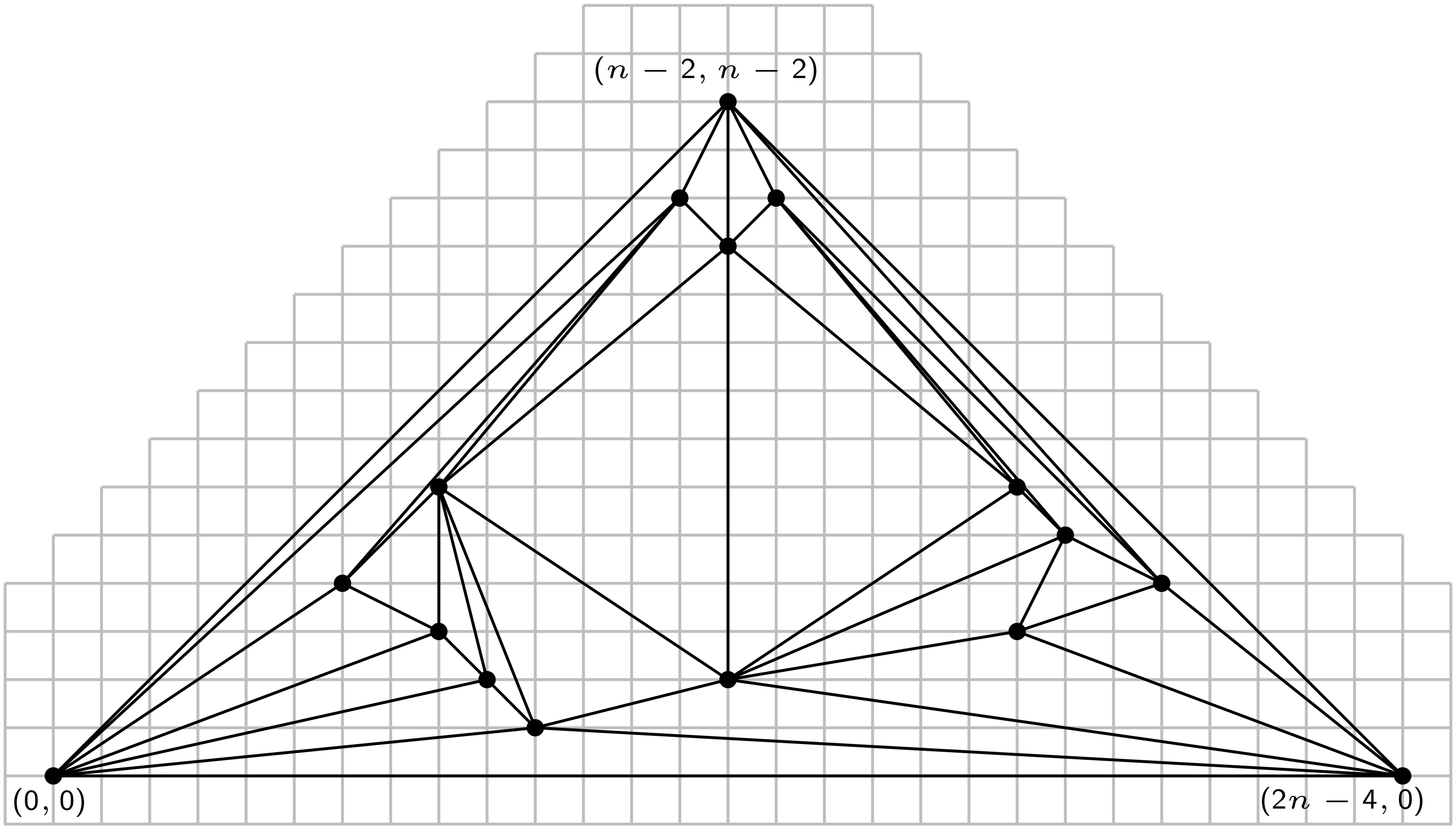
Algorithmus für allgemeine Graphen

Satz [Biedl & Kant '94]

Sei G ein einfach zusammenhängender Graph mit Maximalgrad 4. Dann kann G auf einem Gitter der Größe $n \times n$ mit höchstens 2 Knicken pro Kante eingebettet werden.



Gitterlayouts für planare Graphen



Kanonische Knotenordnung

Definition: Kanonische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein triangulierter, planar eingebetteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Eine Knotenordnung $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ heißt kanonische Ordnung, falls gilt

- der von $\{v_1, \ldots v_k\}$ induzierte Teilgraph G_k ist 2-zusammenhängend und intern trianguliert

Kanonische Knotenordnung

Definition: Kanonische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein triangulierter, planar eingebetteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Eine Knotenordnung $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ heißt kanonische Ordnung, falls gilt

- der von $\{v_1, \ldots v_k\}$ induzierte Teilgraph G_k ist 2-zusammenhängend und intern trianguliert
- (v_1, v_2) ist Außenkante von G_k

Kanonische Knotenordnung

Definition: Kanonische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein triangulierter, planar eingebetteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Eine Knotenordnung $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ heißt kanonische Ordnung, falls gilt

- der von $\{v_1, \dots v_k\}$ induzierte Teilgraph G_k ist 2-zusammenhängend und intern trianguliert
- (v_1, v_2) ist Außenkante von G_k
- für $k < n$ liegt v_{k+1} in der äußeren Facette von G_k und alle Nachbarn von v_{k+1} in G_k bilden ein Intervall auf dem Rand $C_o(G_k)$ der äußeren Facette von G_k

Kanonische Knotenordnung

Karlsruhe Institute of Technology

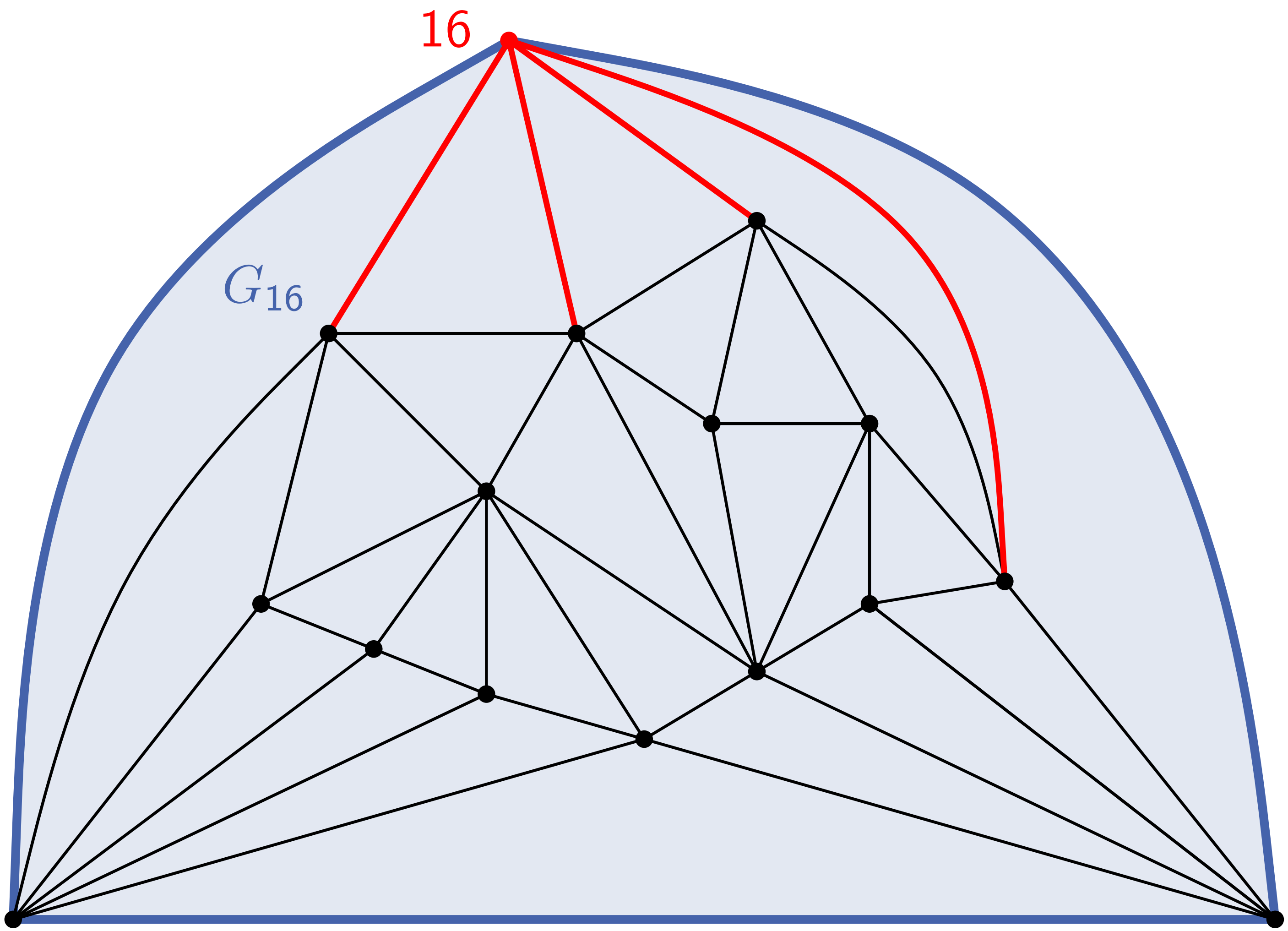
Definition: Kanonische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein triangulierter, planar eingebetteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Eine Knotenordnung $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ heißt kanonische Ordnung, falls gilt

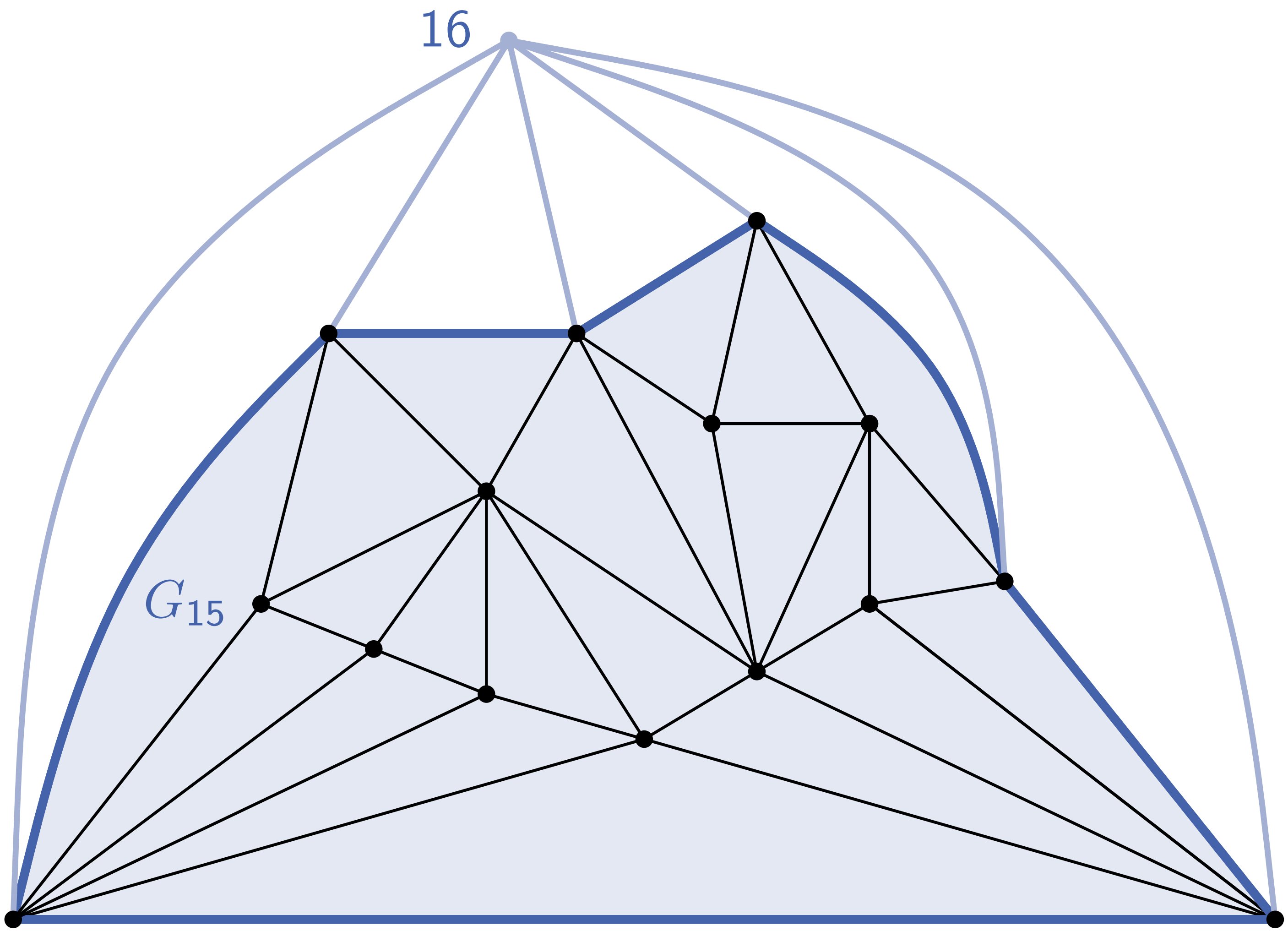
- der von $\{v_1, \ldots v_k\}$ induzierte Teilgraph G_k ist 2-zusammenhängend und intern trianguliert
- (v_1, v_2) ist Außenkante von G_k
- für $k < n$ liegt v_{k+1} in der äußeren Facette von G_k und alle Nachbarn von v_{k+1} in G_k bilden ein Intervall auf dem Rand $C_o(G_k)$ der äußeren Facette von G_k

Unterschied zu st-Ordnung?

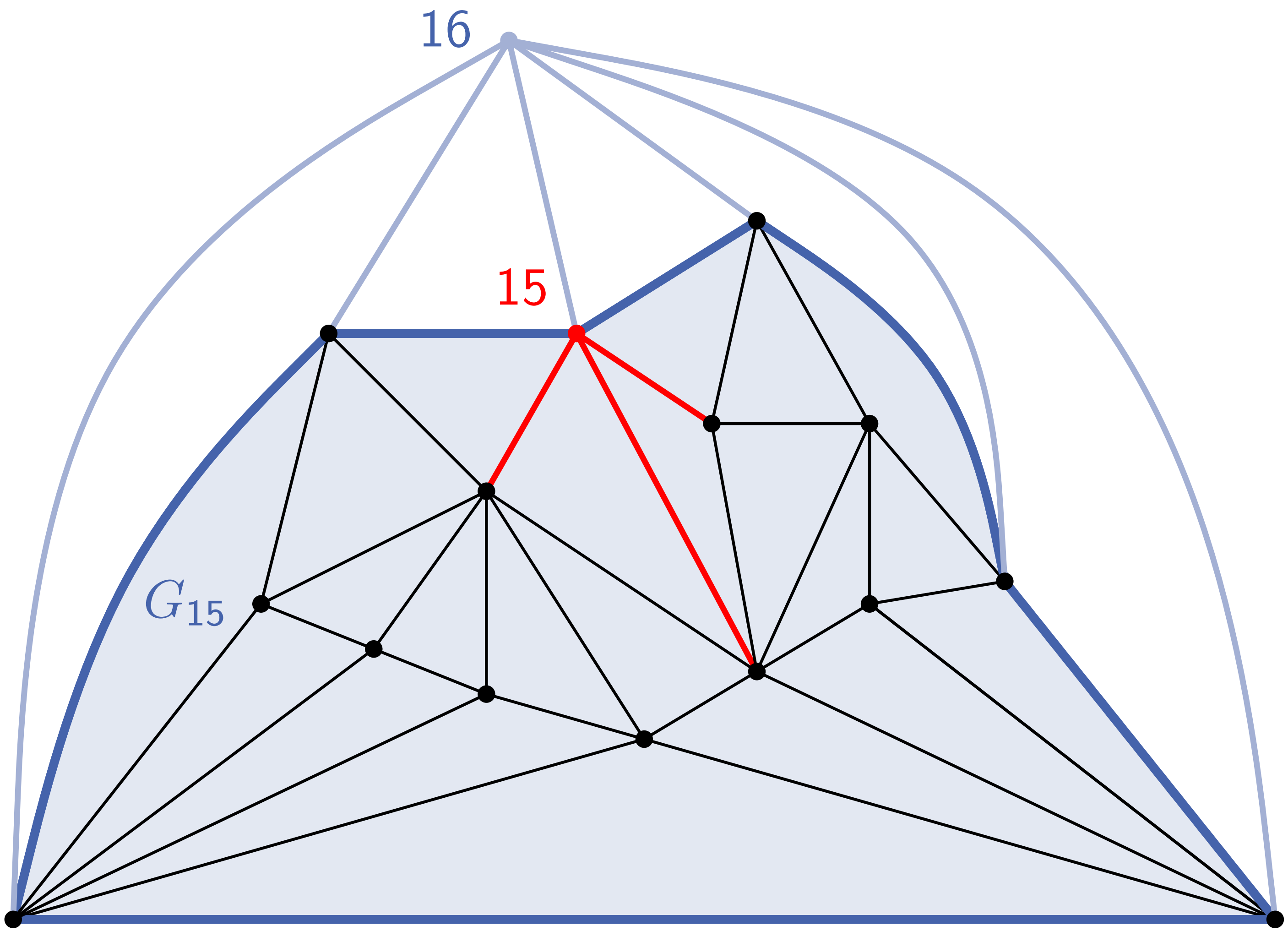
Berechnung kanonische Ordnung



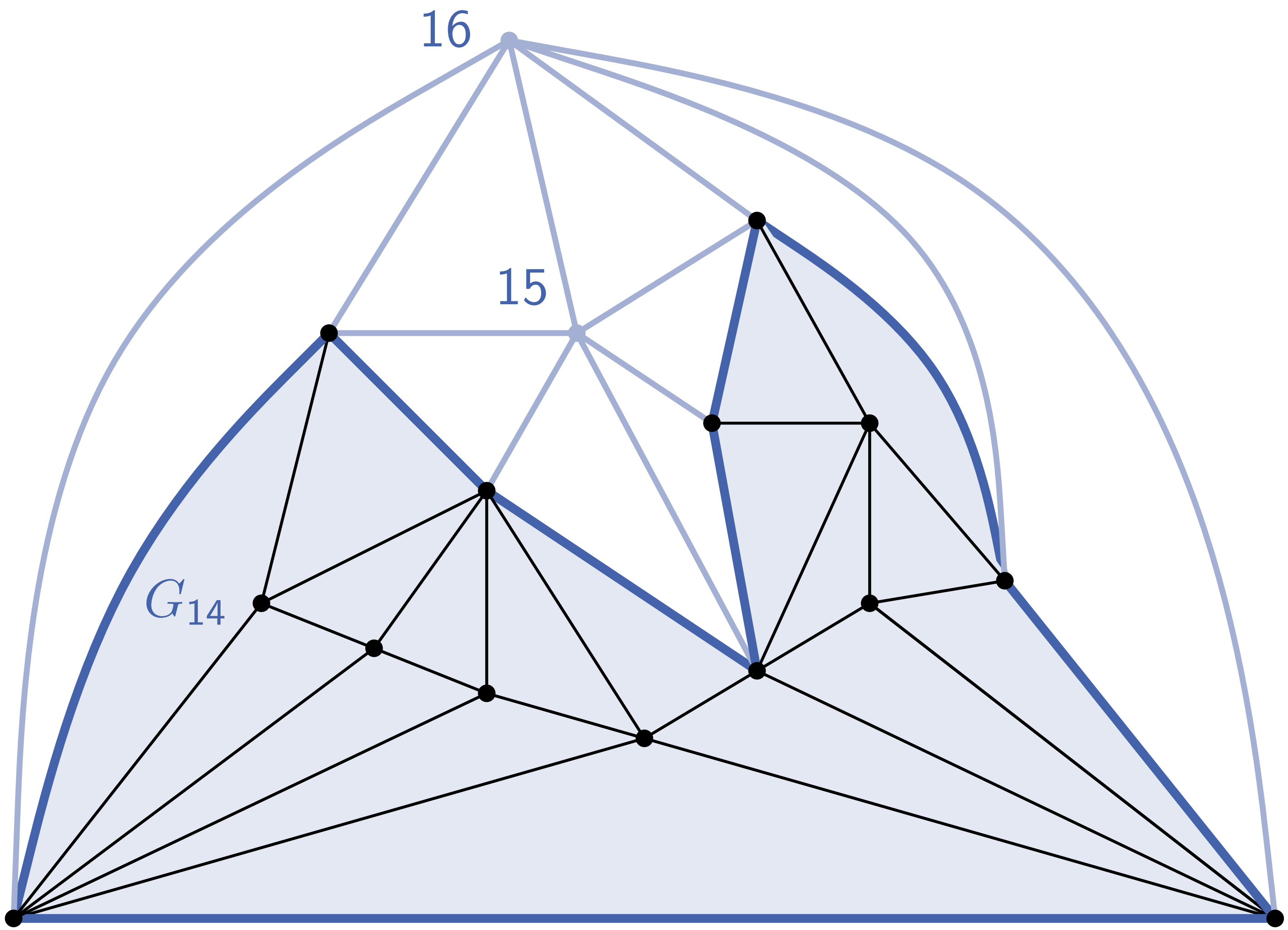
Berechnung kanonische Ordnung



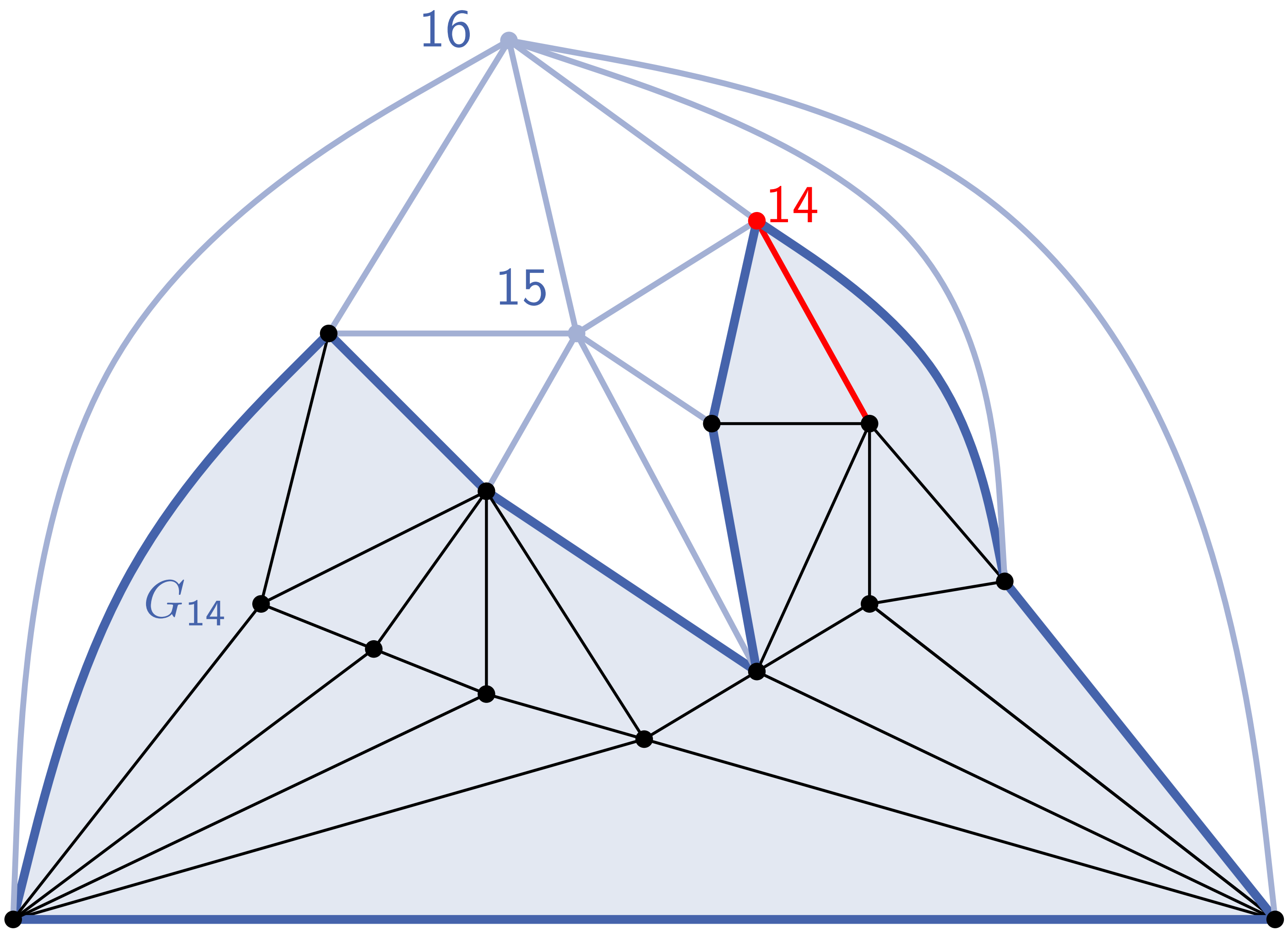
Berechnung kanonische Ordnung



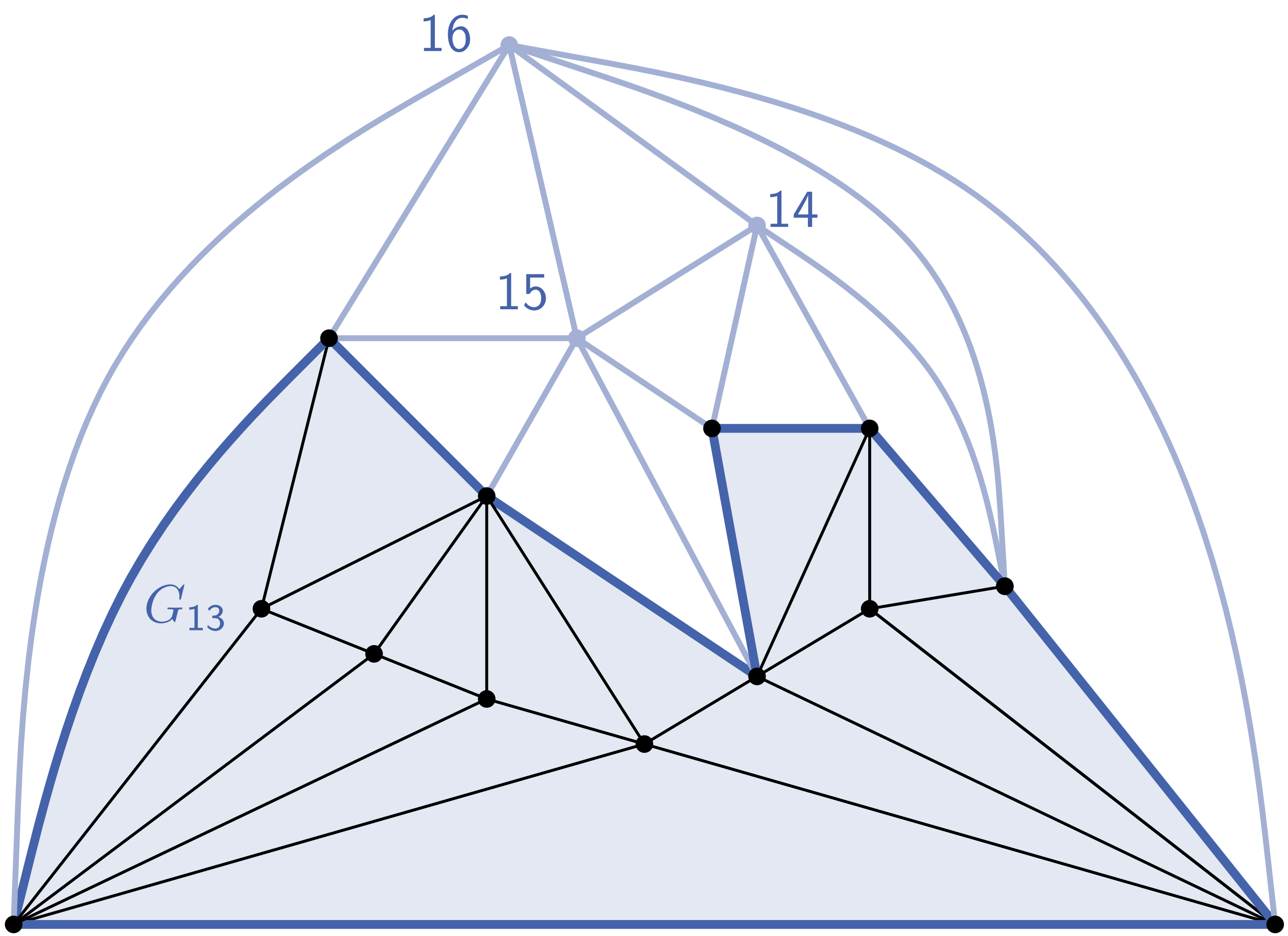
Berechnung kanonische Ordnung



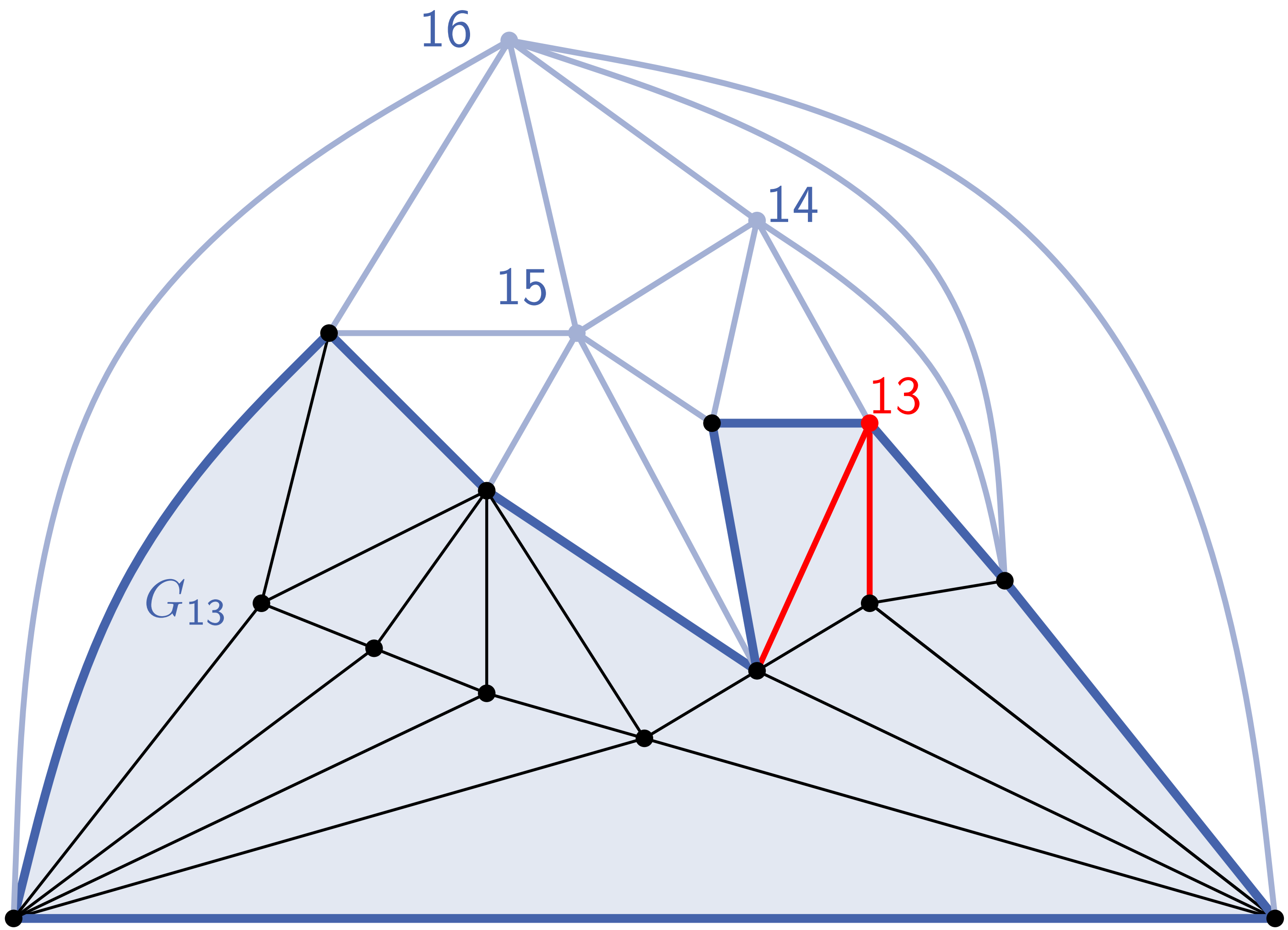
Berechnung kanonische Ordnung



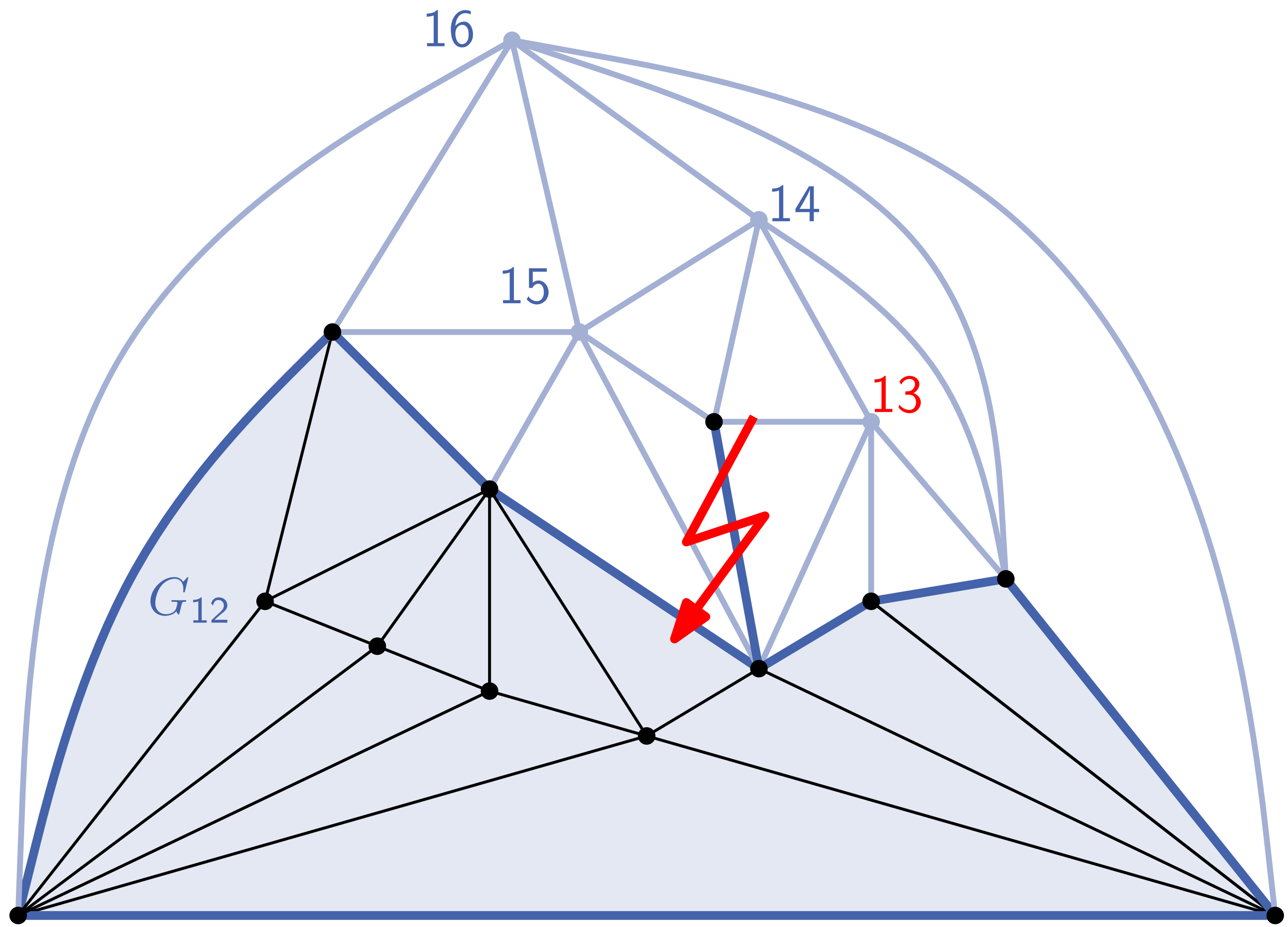
Berechnung kanonische Ordnung



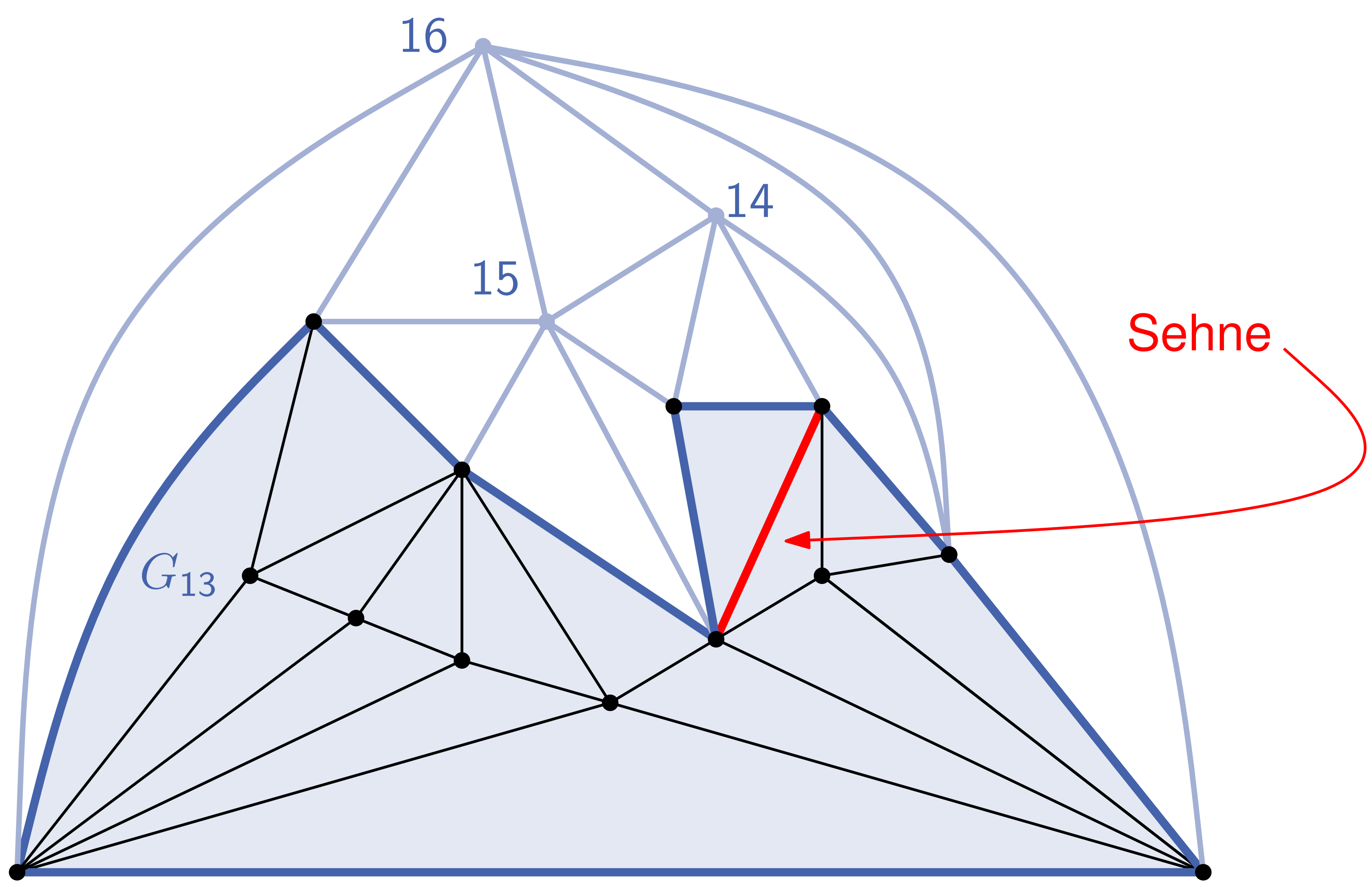
Berechnung kanonische Ordnung



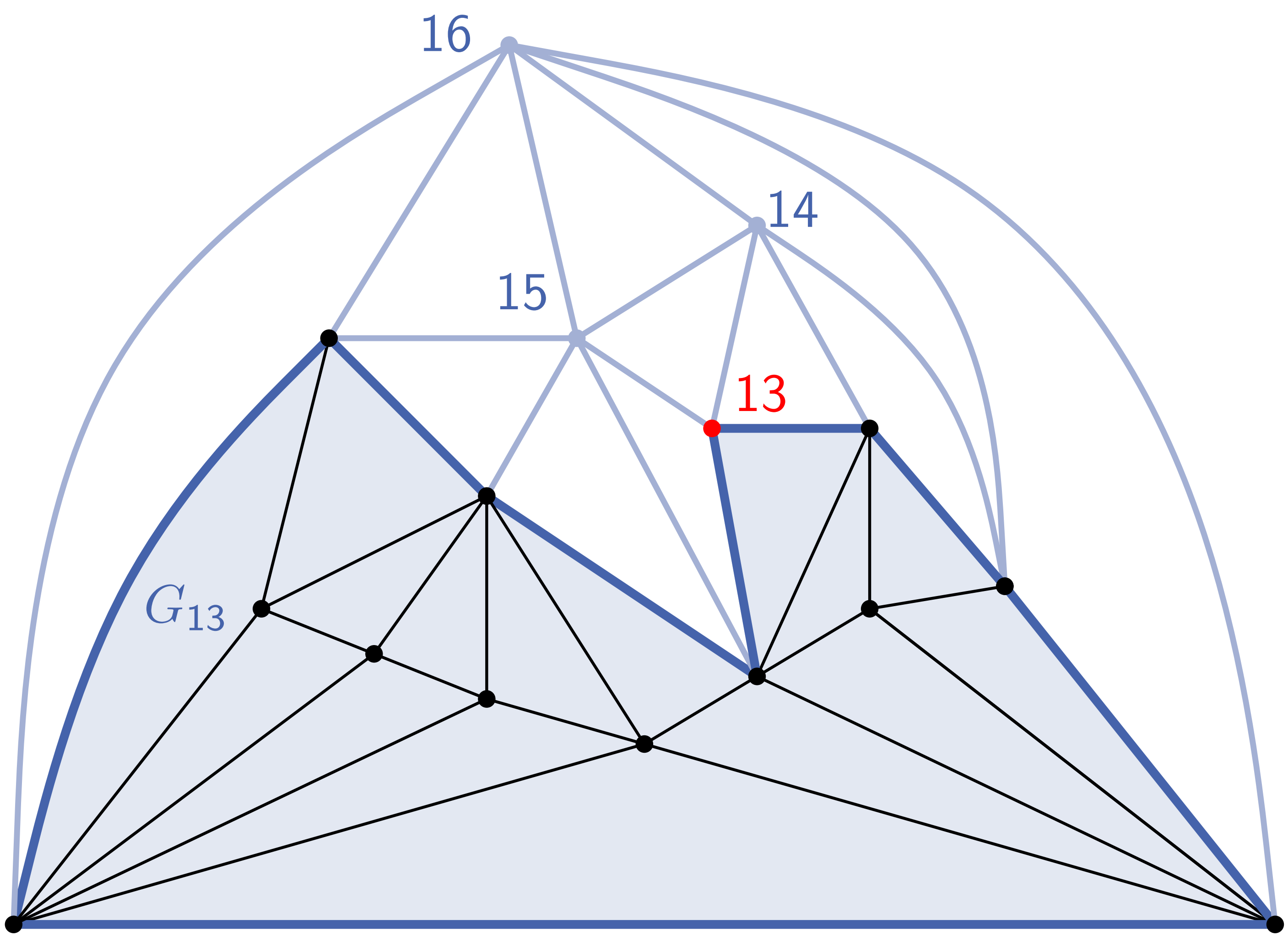
Berechnung kanonische Ordnung



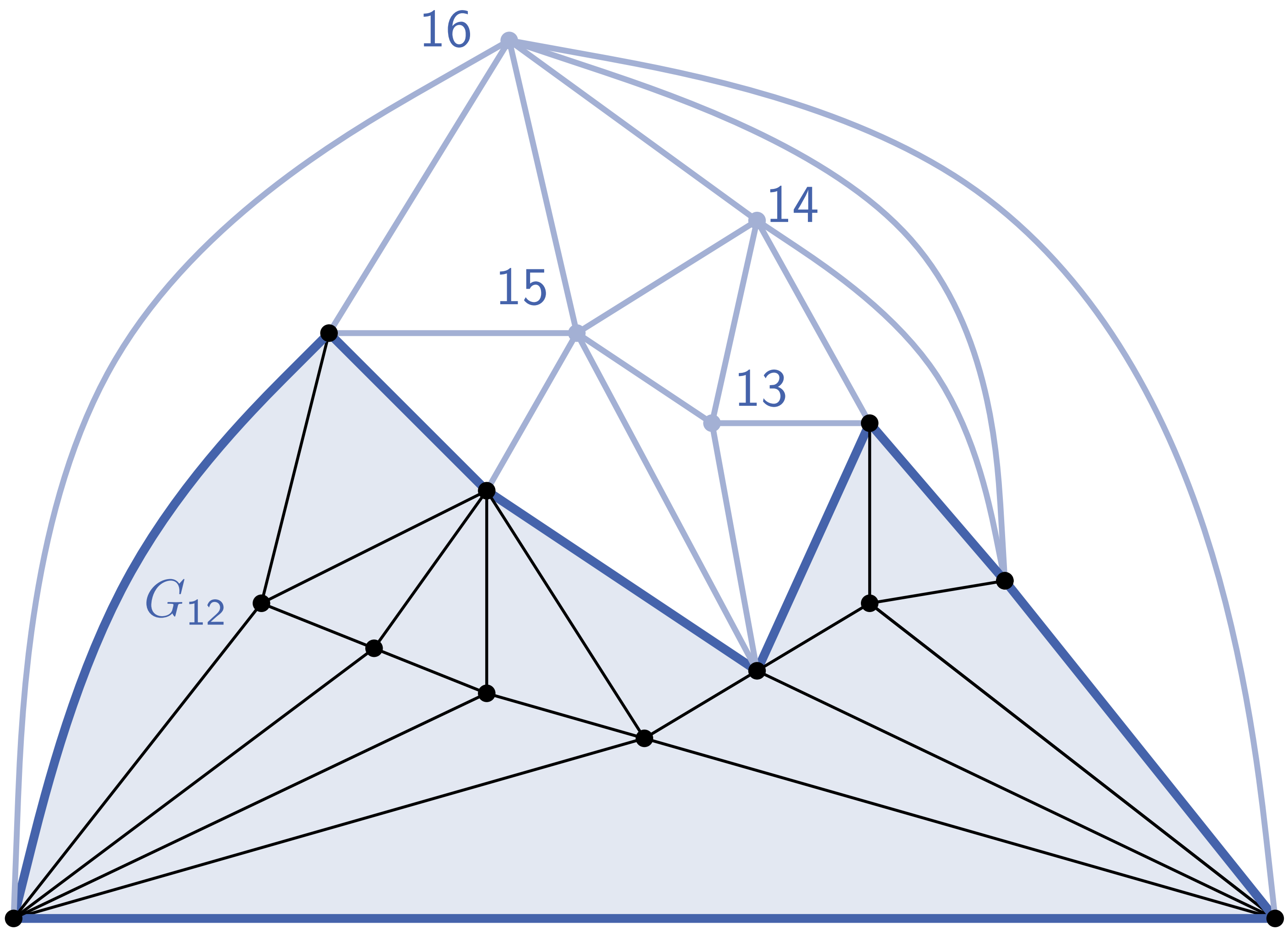
Berechnung kanonische Ordnung



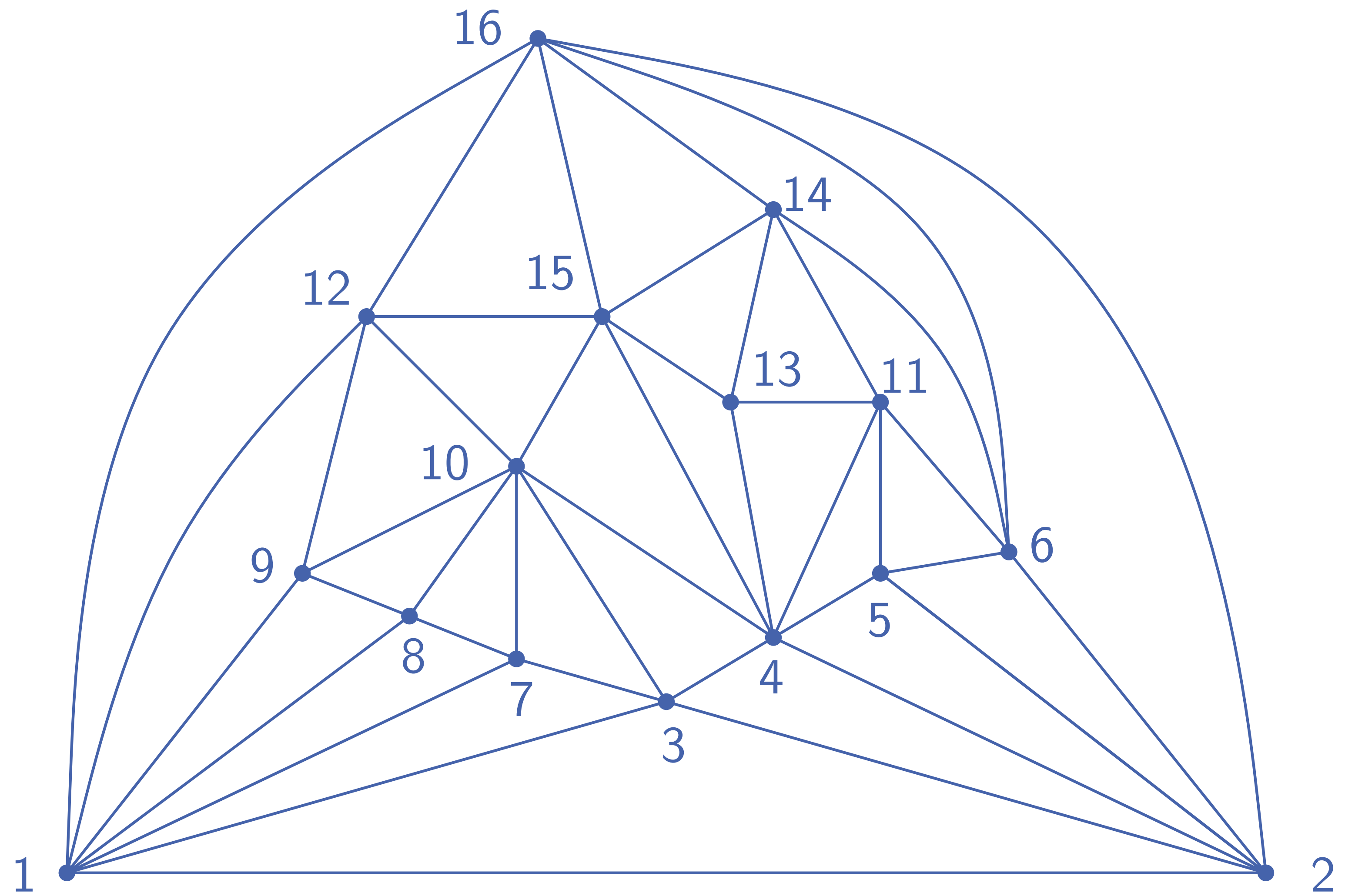
Berechnung kanonische Ordnung



Berechnung kanonische Ordnung



Berechnung kanonische Ordnung



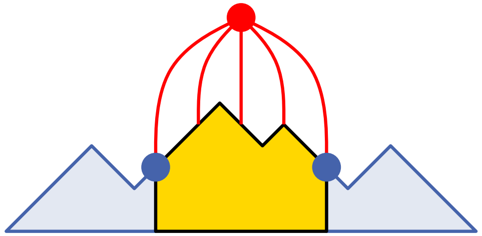
Algorithmus kanonische Ordnung

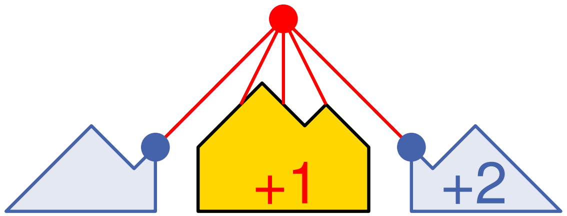
Algorithmus Kanonische Ordnung

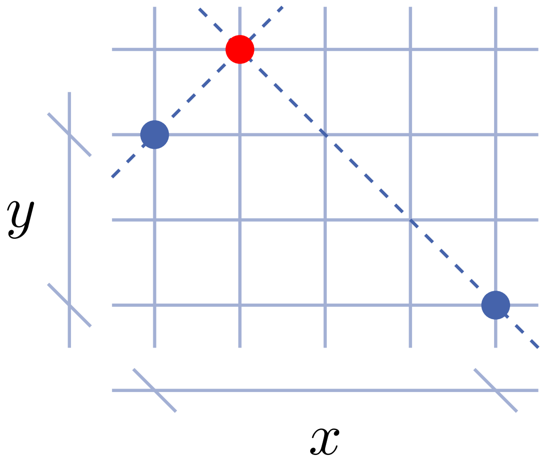
forall the $v \in V$ **do**
- chords(v) $\leftarrow$ 0; out(v) $\leftarrow$ false; mark(v) $\leftarrow$ false;

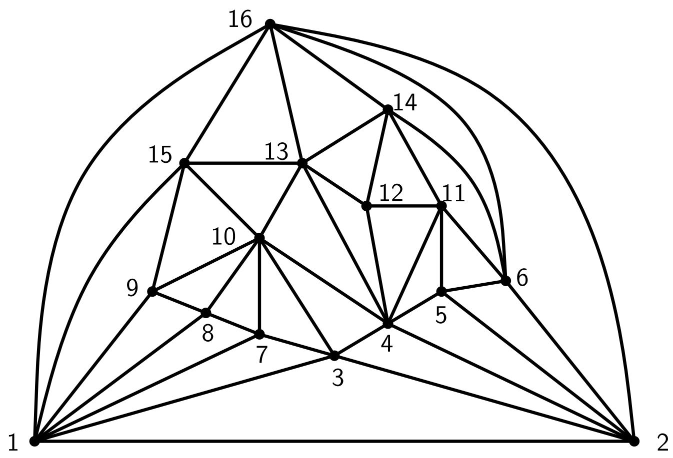
out(v_1), out(v_2), out(v_n) $\leftarrow$ true;
for $k = n$ **to** 3 **do**
- wähle $v \neq v_1, v_2$ mit mark(v) = false, out(v) = true, chords(v) = 0;
- $v_k \leftarrow v$; mark(v) $\leftarrow$ true;
- $(w_1 = v_1, w_2, \ldots, w_{t-1}, w_t = v_2) \leftarrow C_o(G_{k-1})$;
- $(w_p, \ldots, w_q) \leftarrow$ unmarkierte Nachbarn von v_k;
- out(w_i) $\leftarrow$ true for all $p < i < q$;
- aktualisiere chords($\cdot$) für diese w_i und ihre Nachbarn;

Zeichenalgorithmus

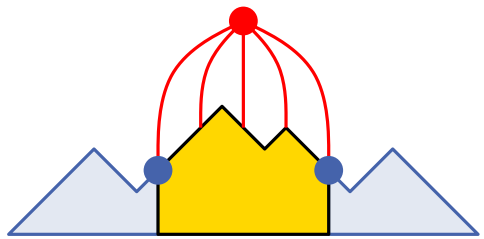


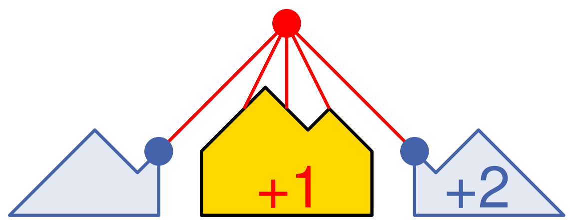


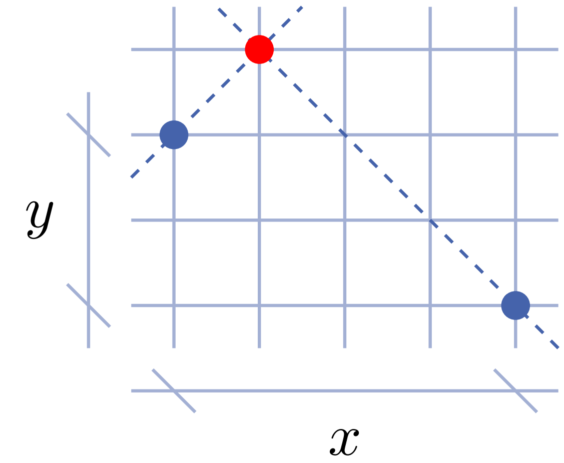


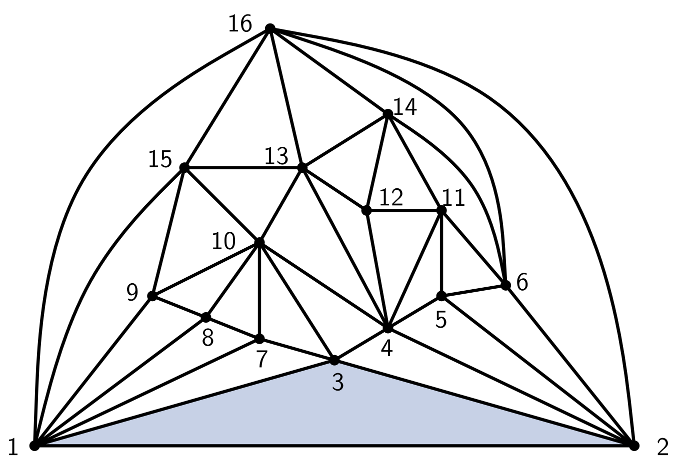


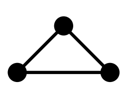
Zeichenalgorithmus





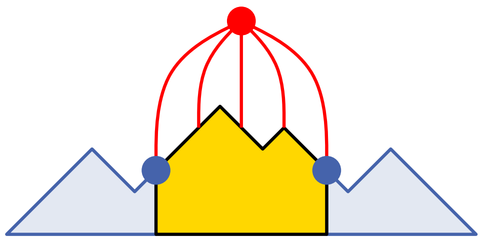


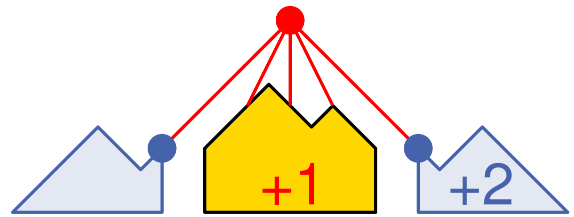


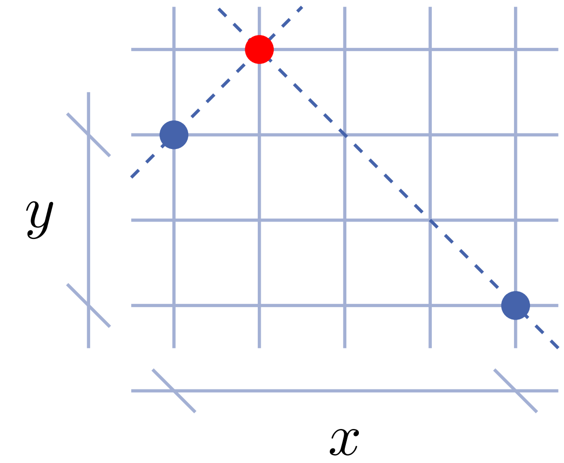


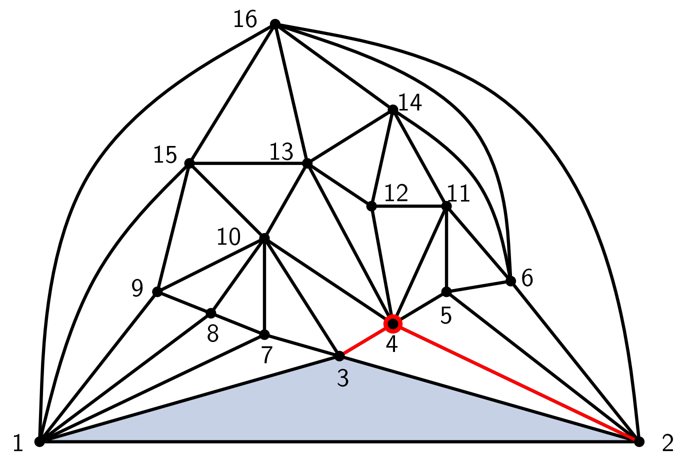
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I

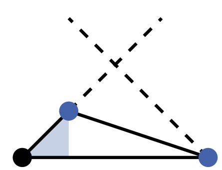
Zeichenalgorithmus





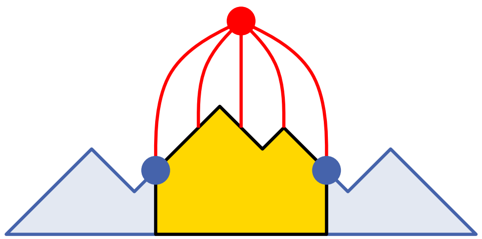


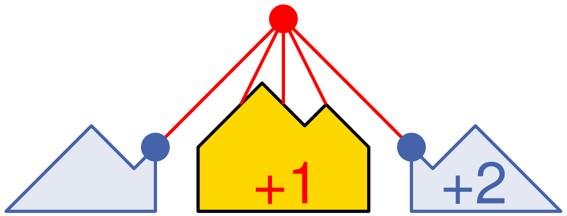


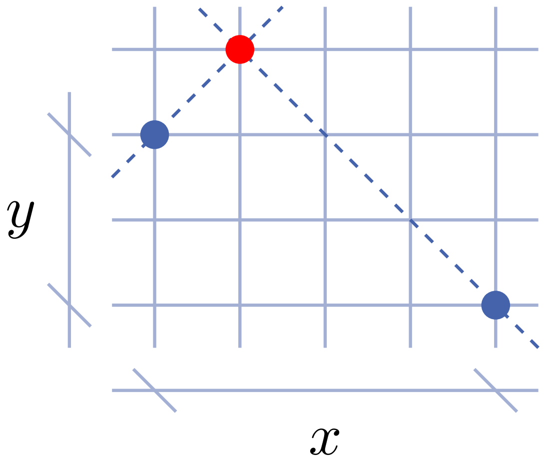


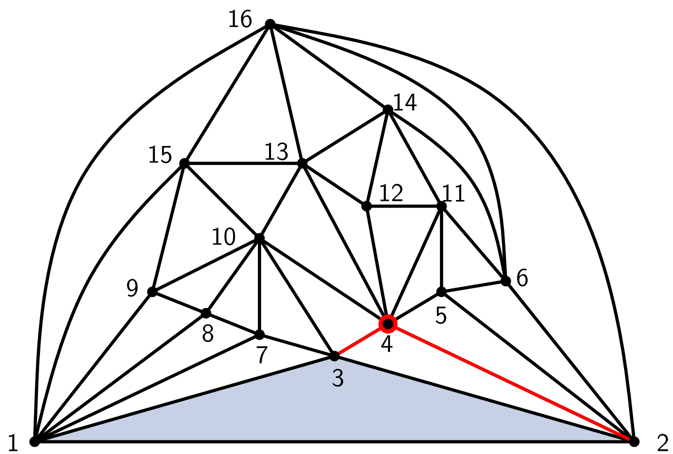
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I

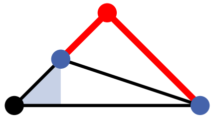
Zeichenalgorithmus



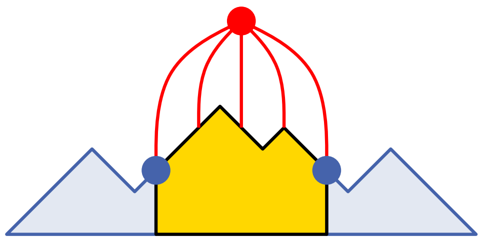


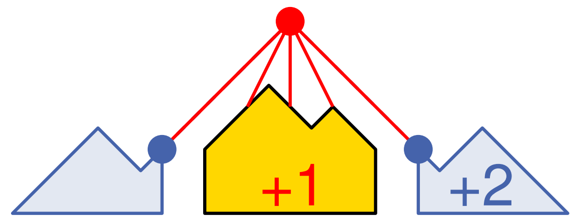


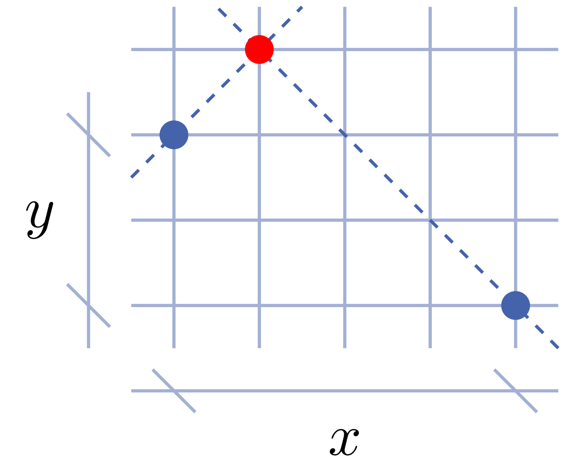


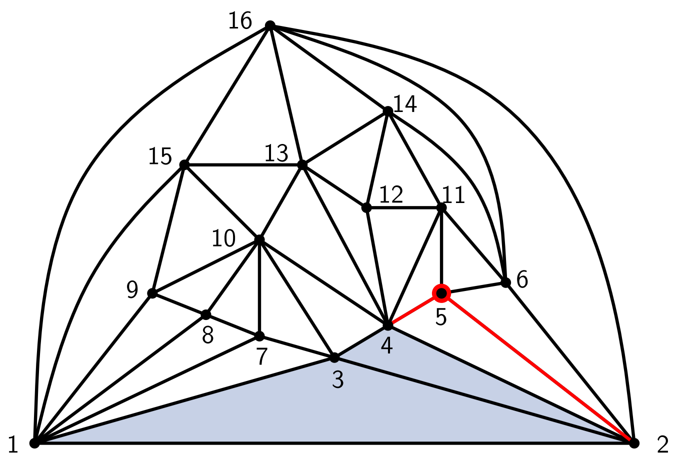


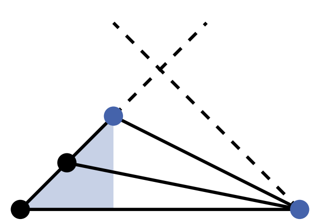
Zeichenalgorithmus



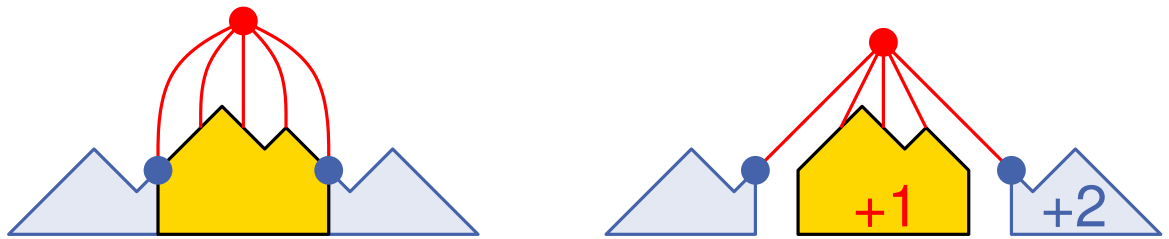


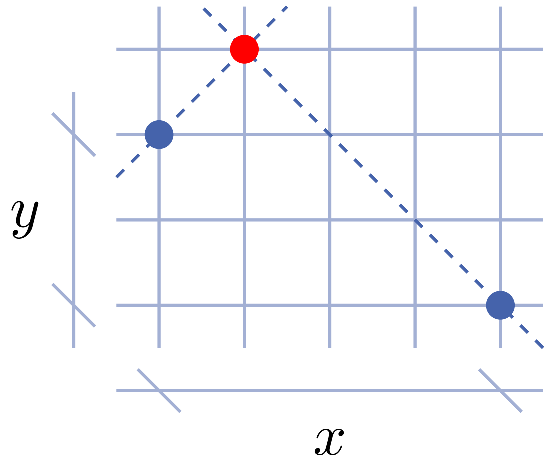


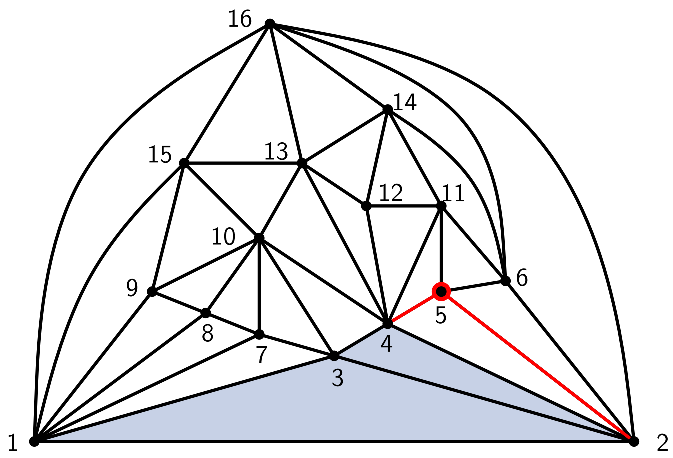


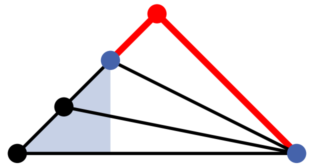


Zeichenalgorithmus

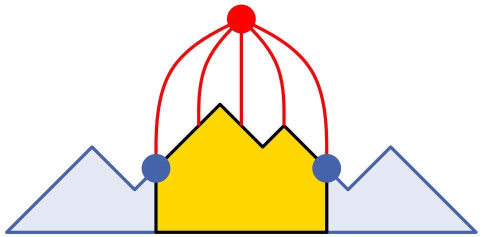


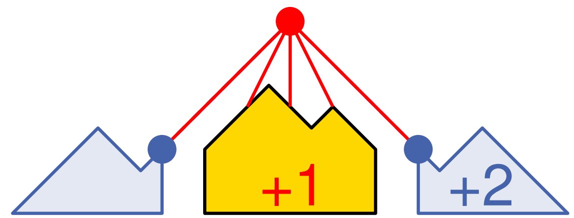


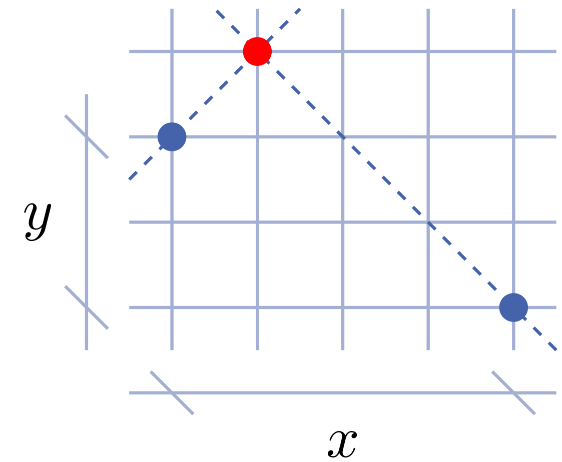


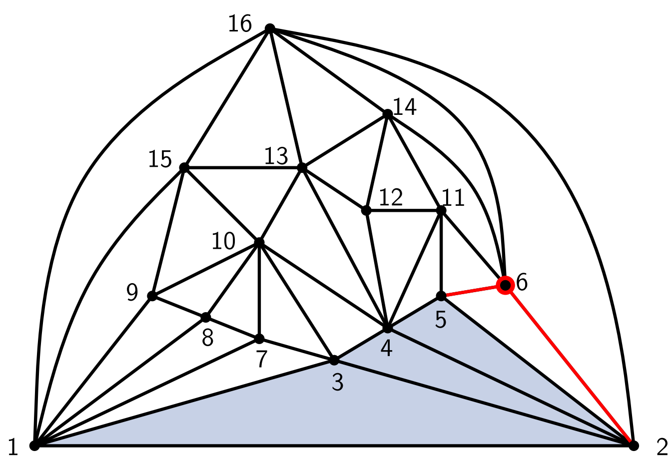


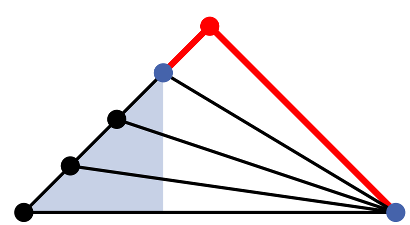
Zeichenalgorithmus



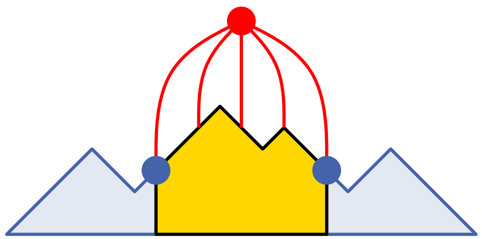


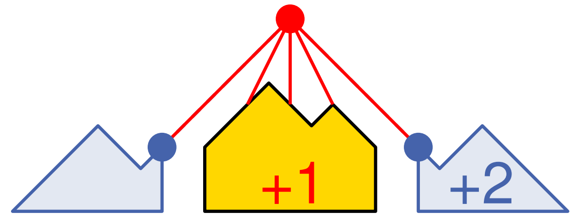


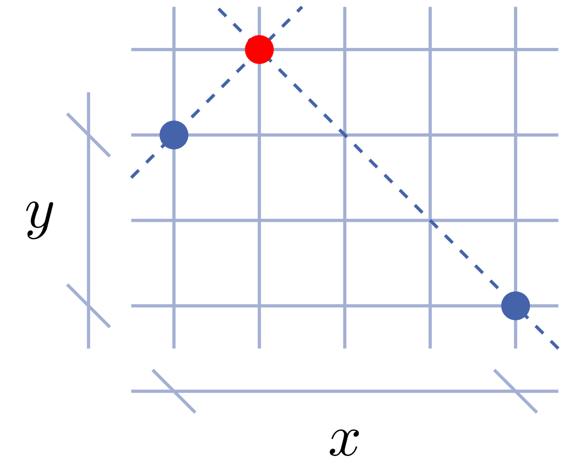


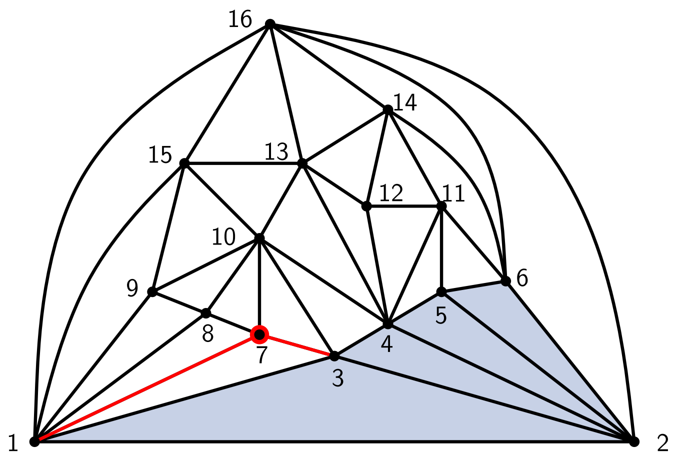


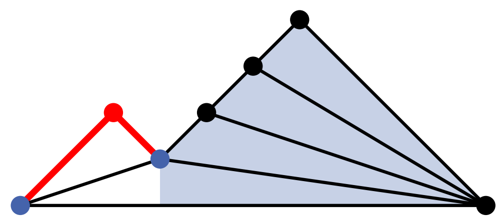
Zeichenalgorithmus





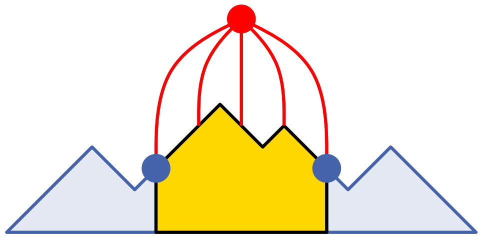


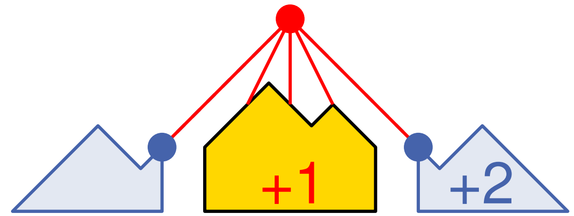


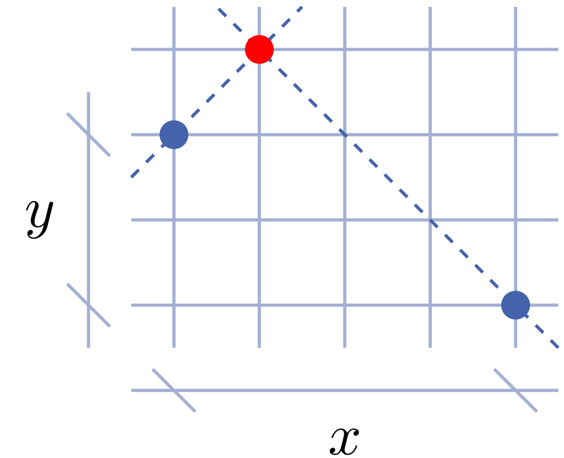


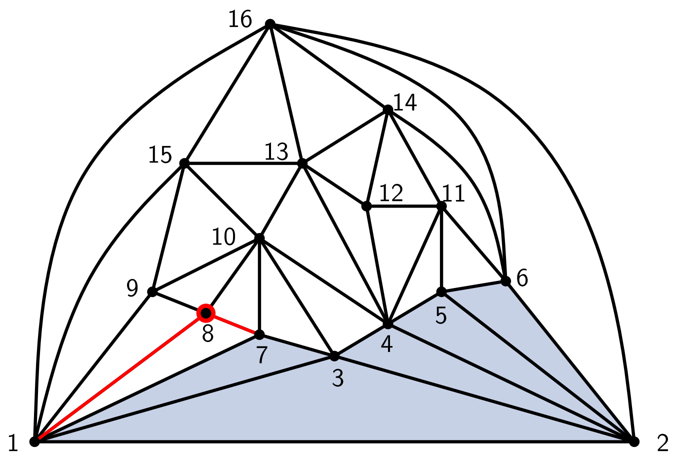
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I

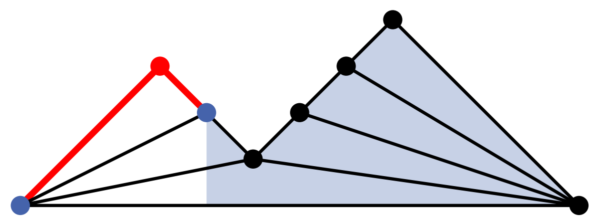
Zeichenalgorithmus



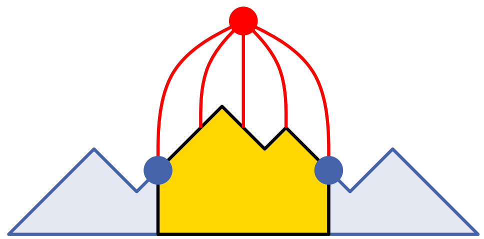


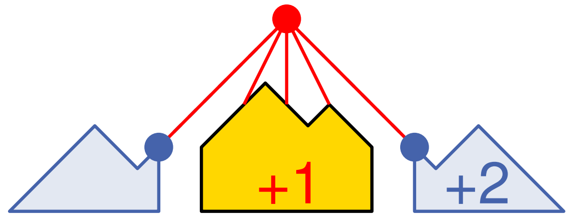


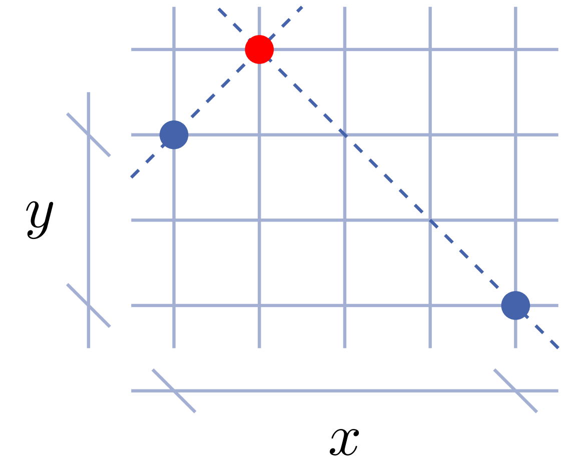


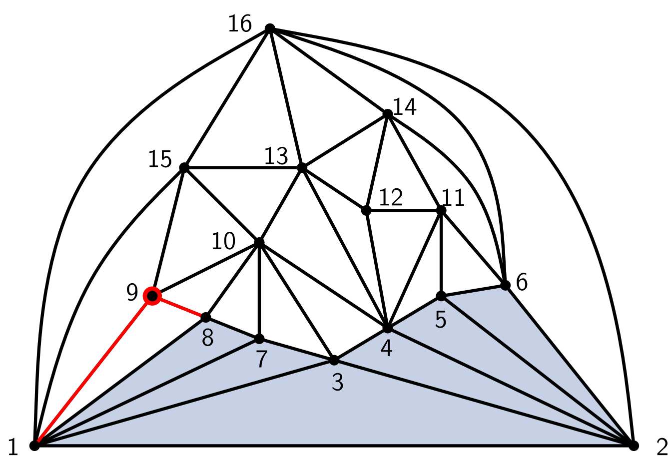


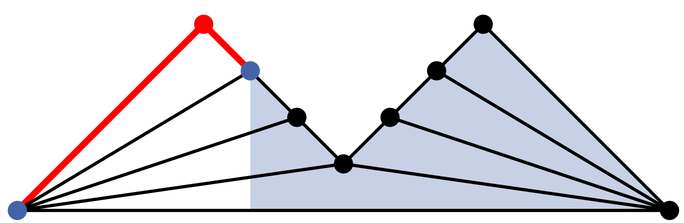
Zeichenalgorithmus





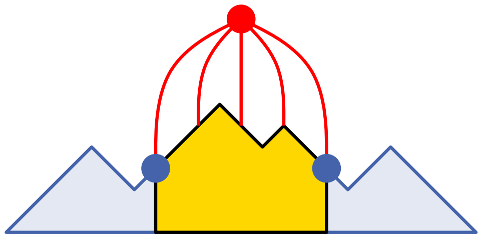


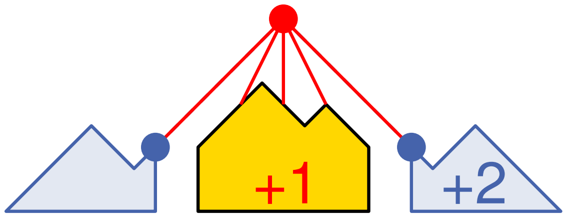


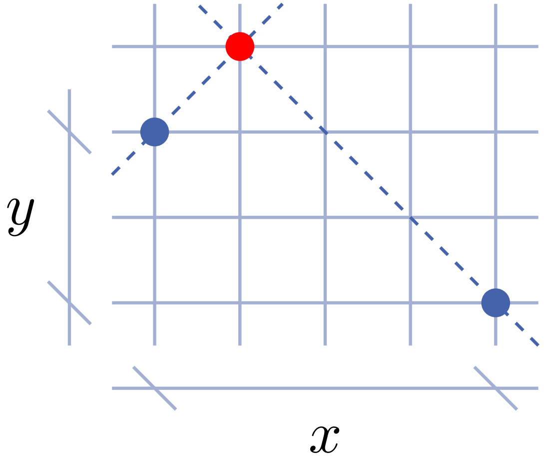


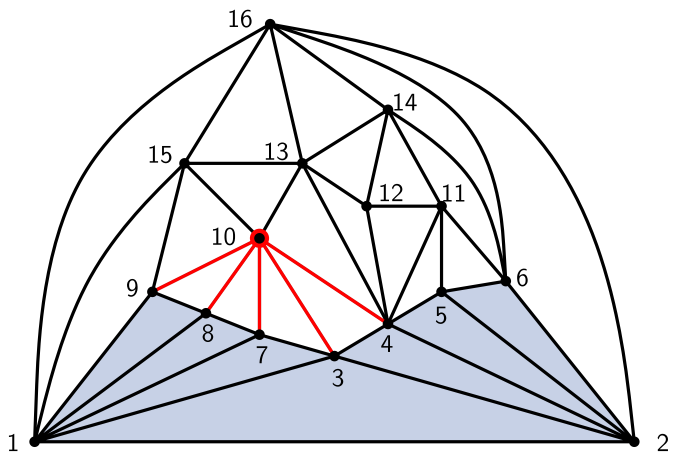
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I

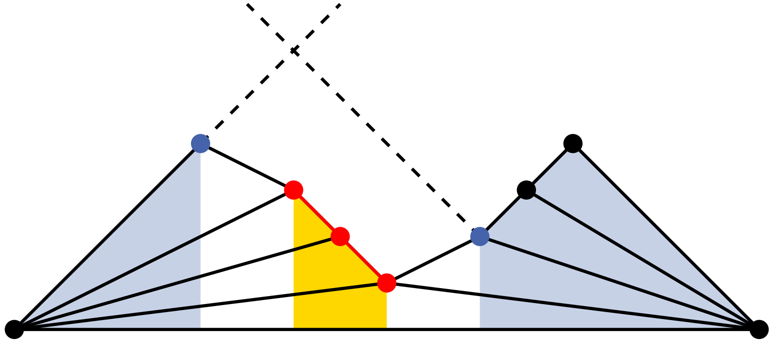
Zeichenalgorithmus



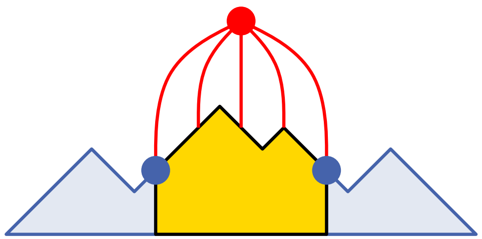


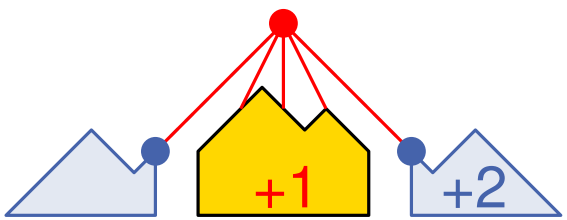


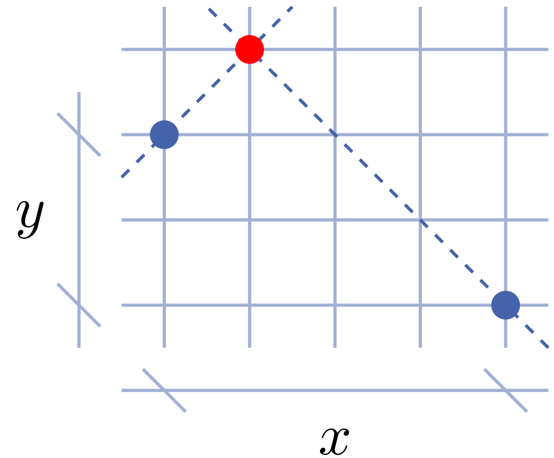


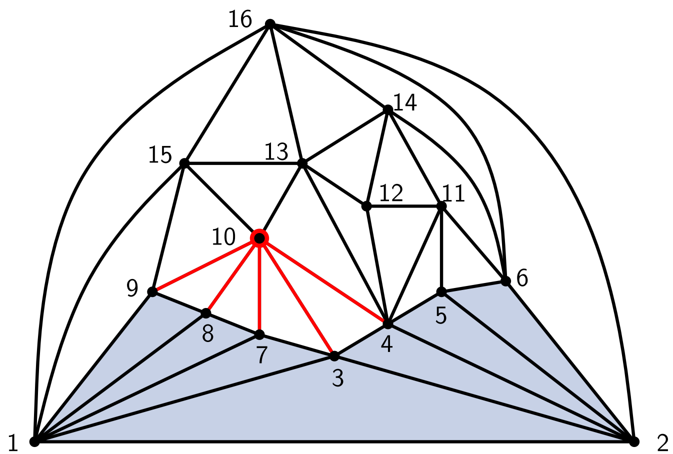


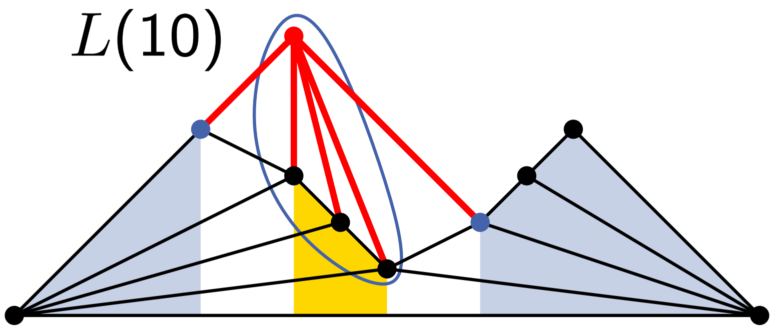
Zeichenalgorithmus



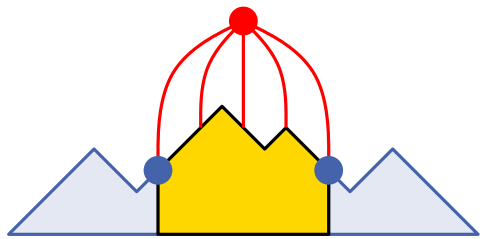


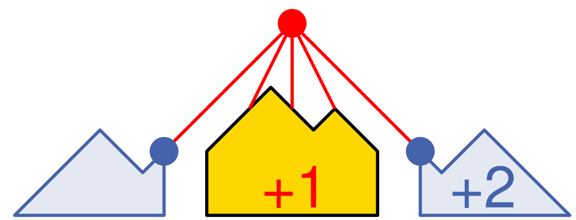


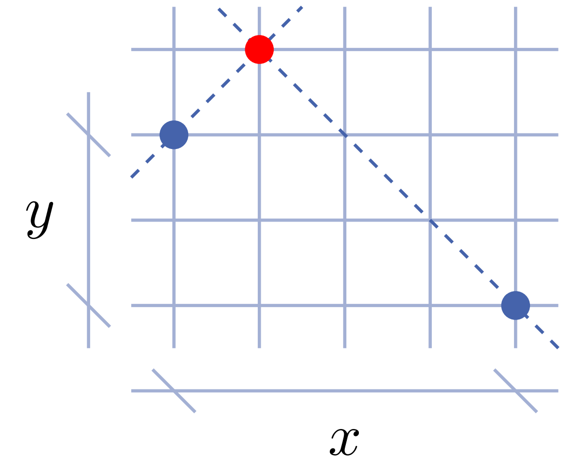


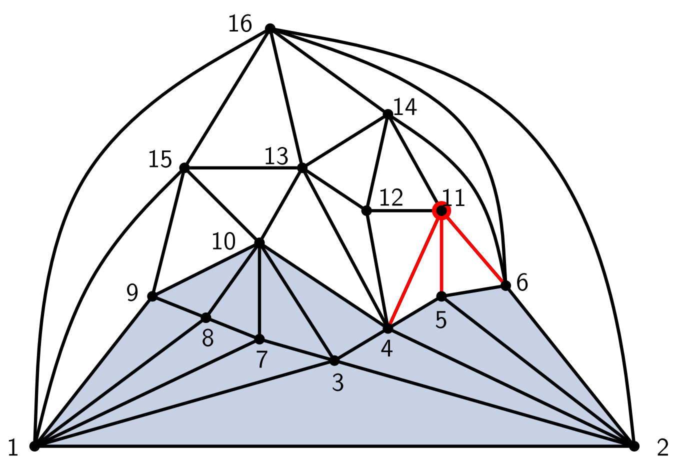


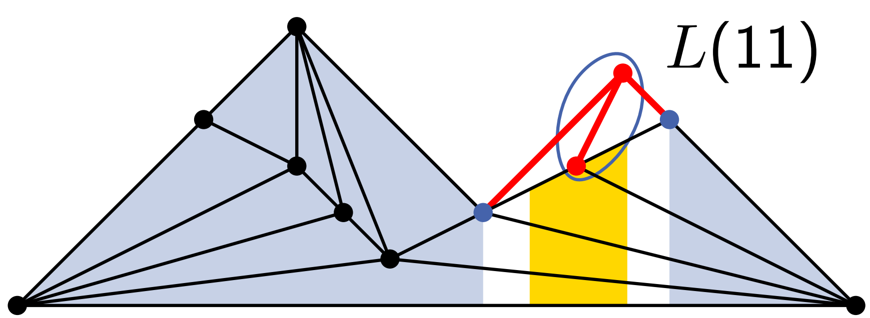
Zeichenalgorithmus



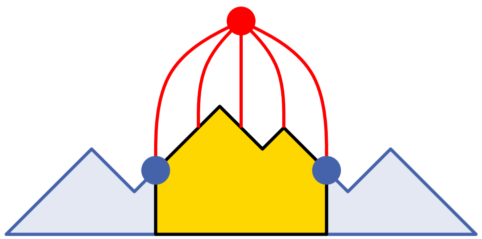


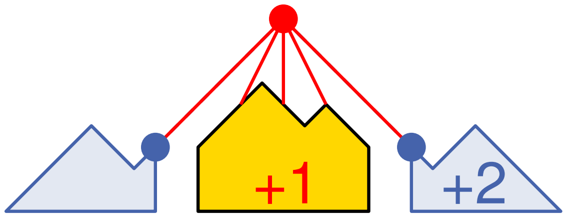


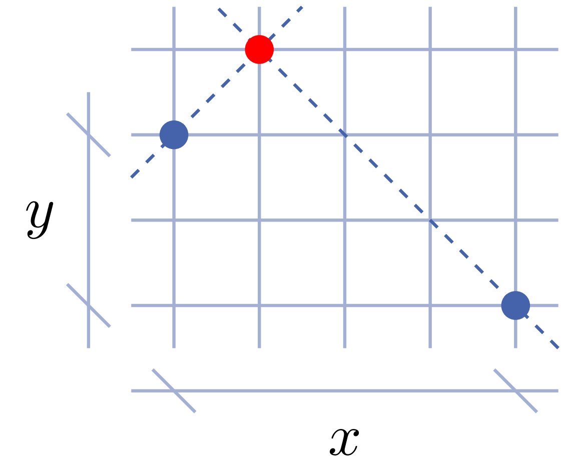


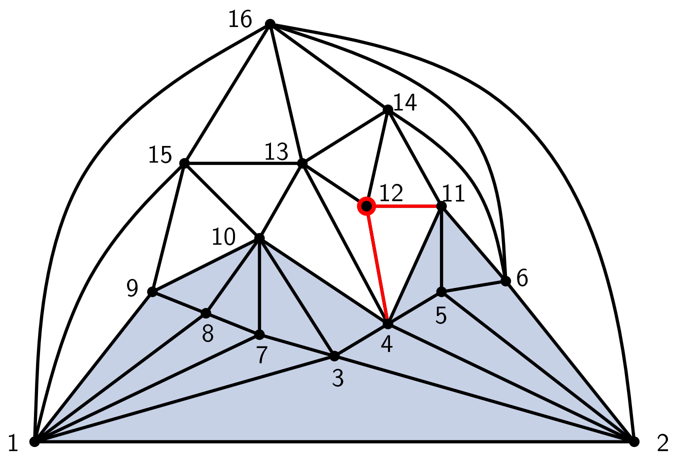


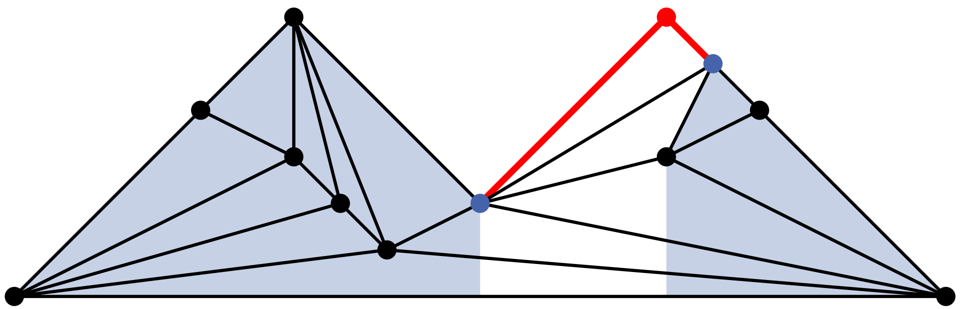
Zeichenalgorithmus



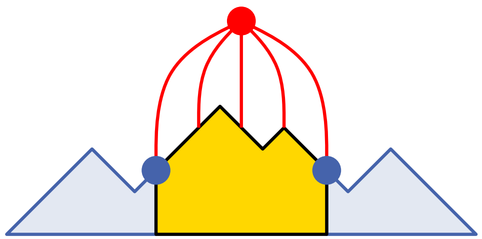


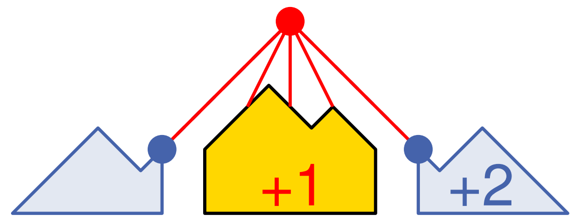


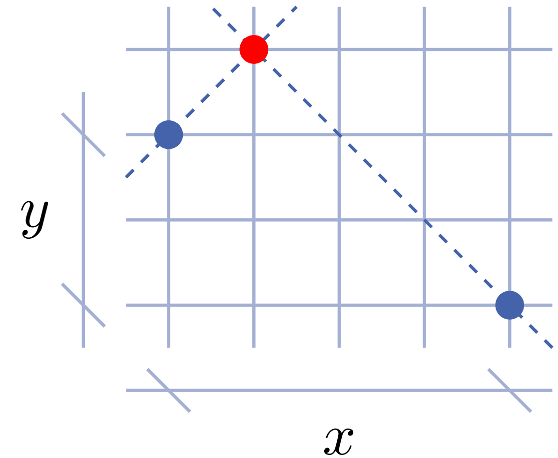


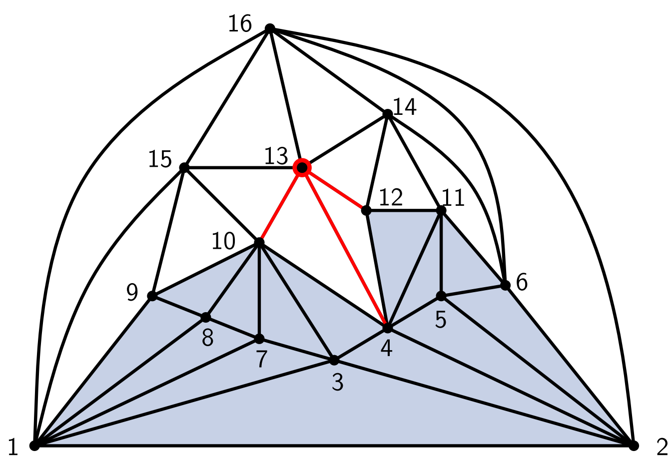


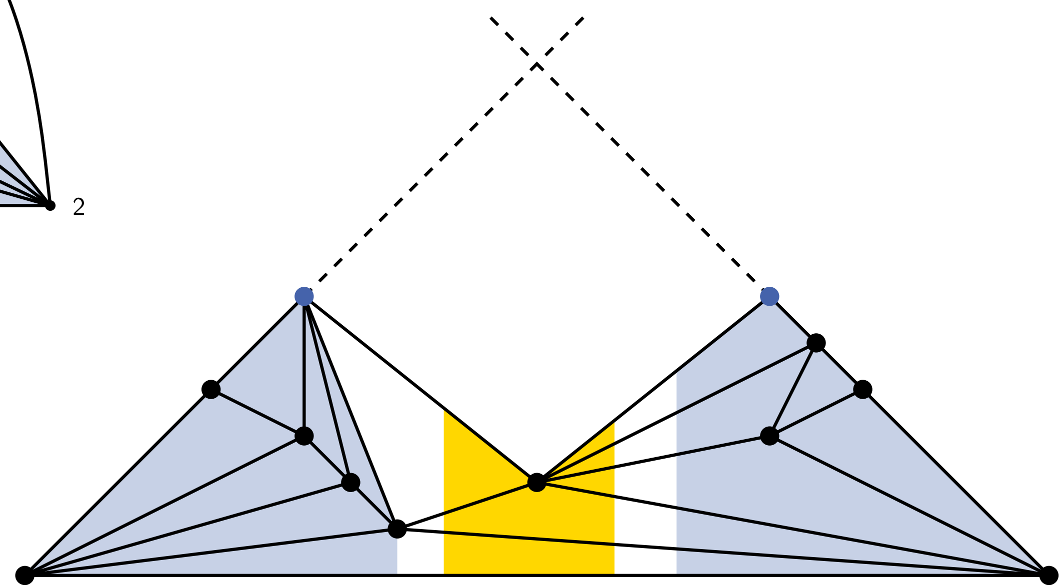
Zeichenalgorithmus



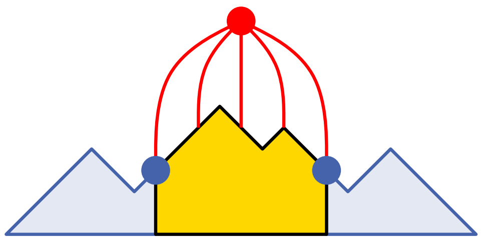


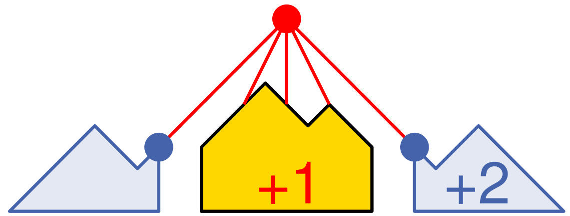


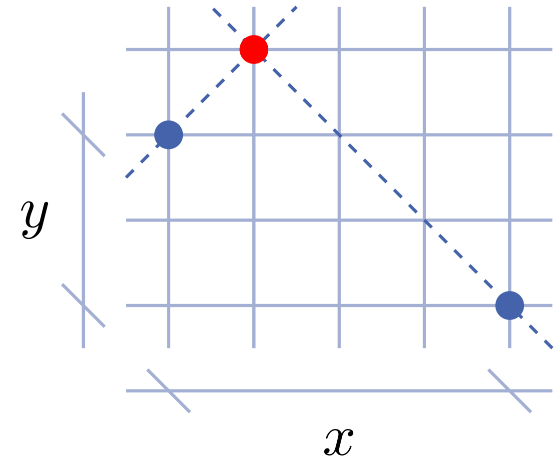


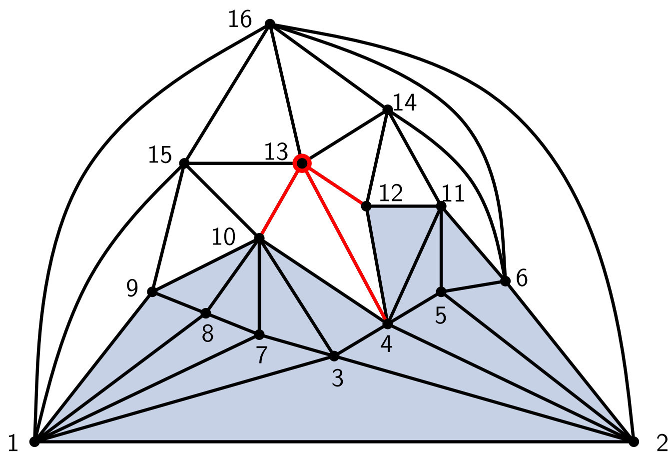


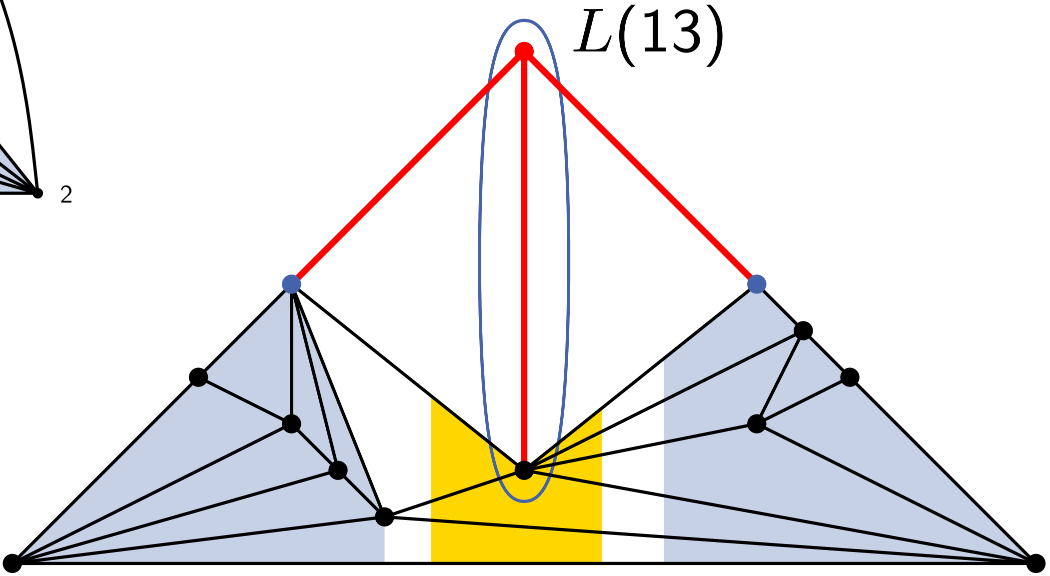
Zeichenalgorithmus



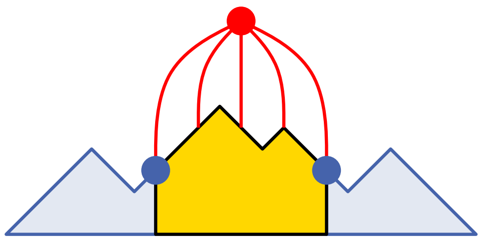


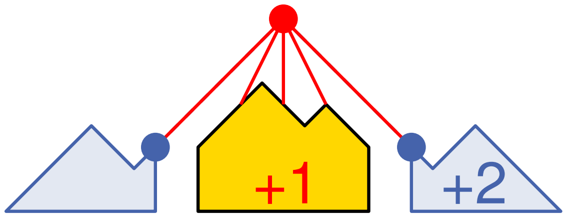


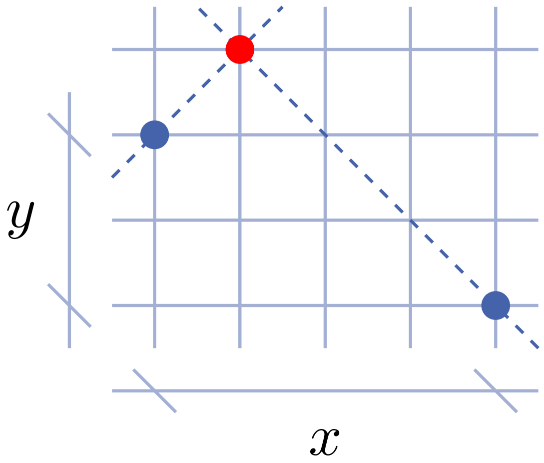


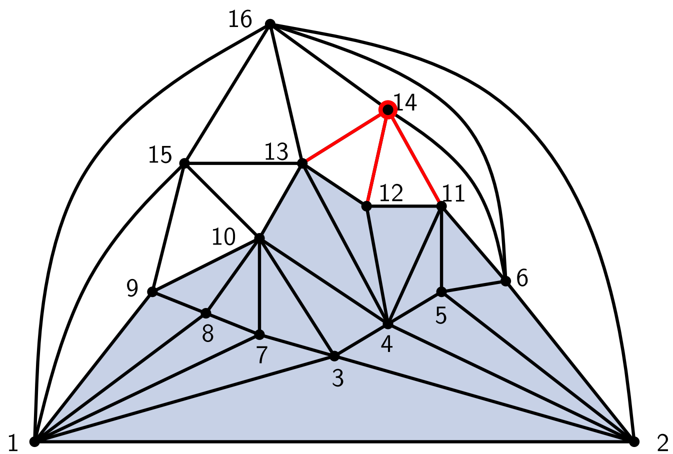


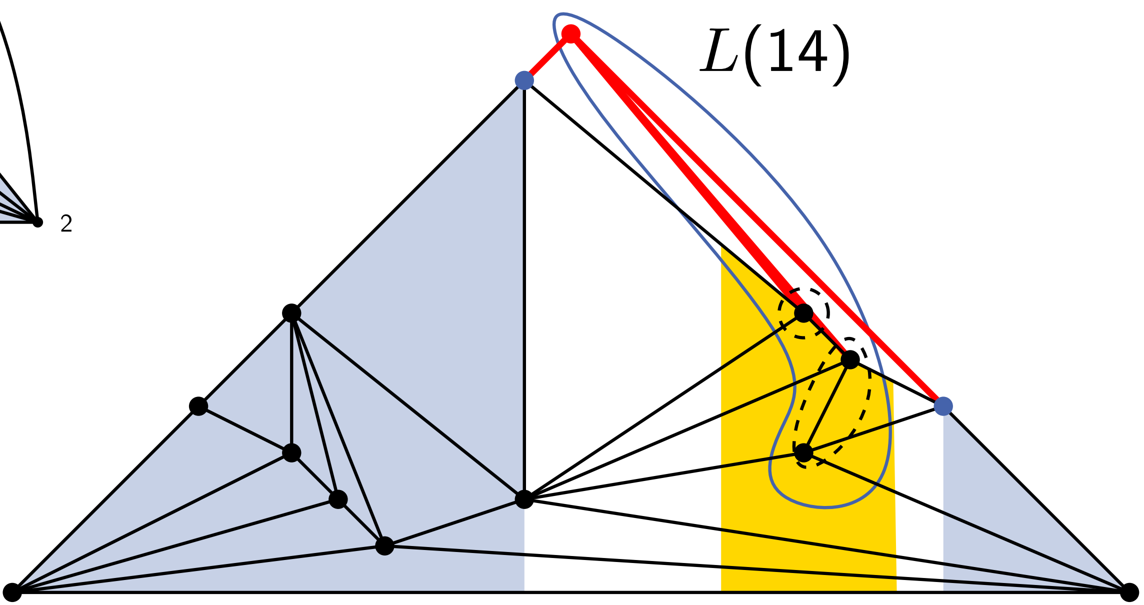
Zeichenalgorithmus



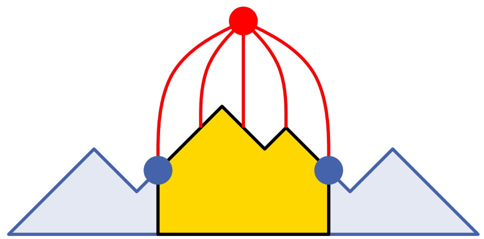


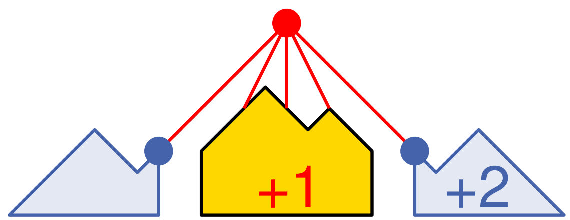


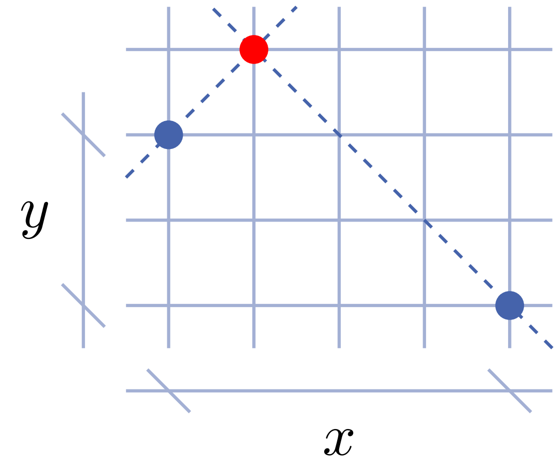


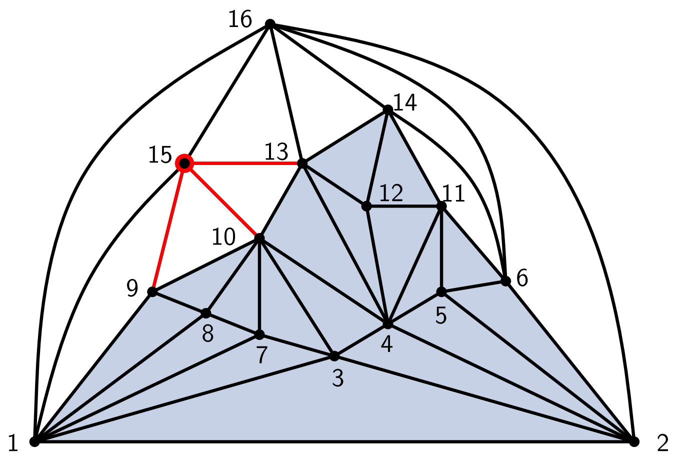


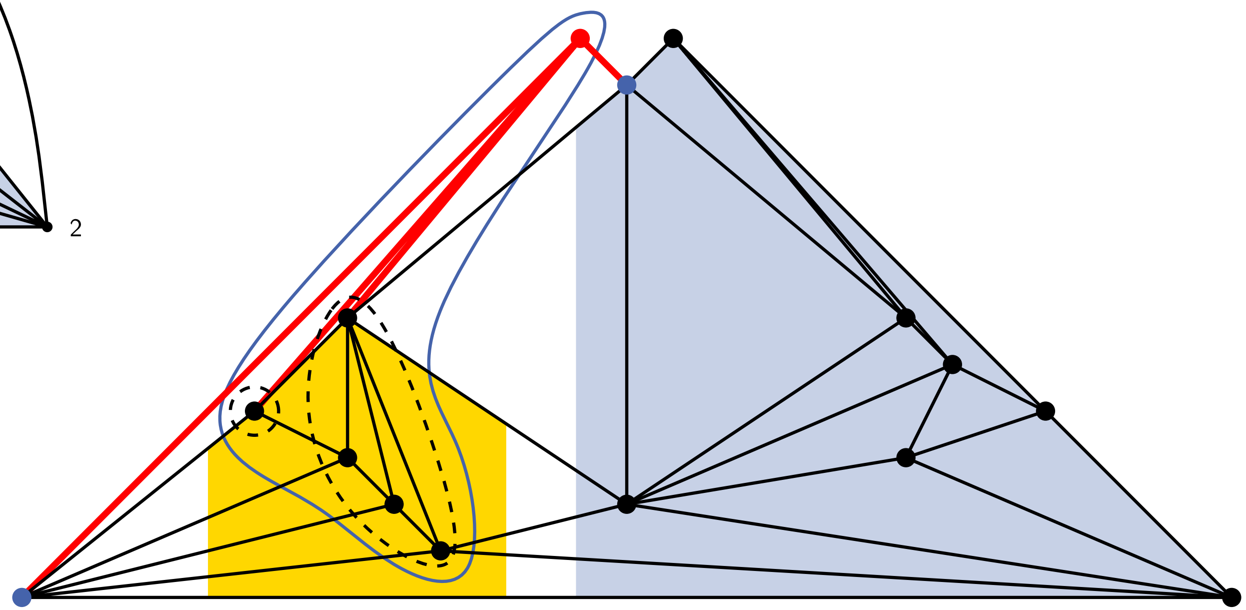
Zeichenalgorithmus



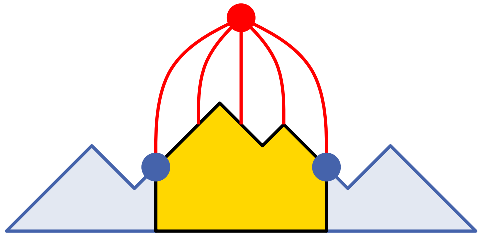


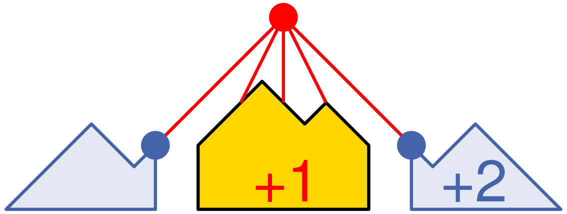


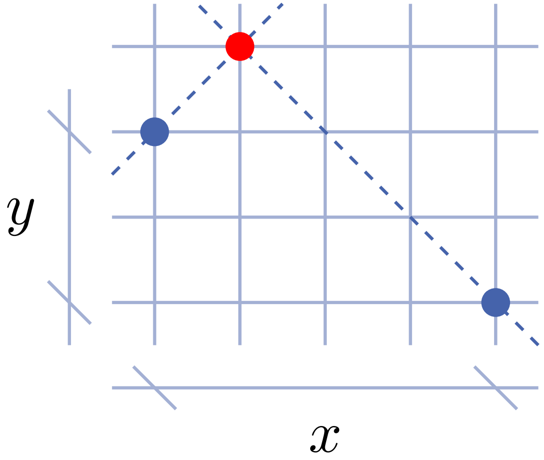


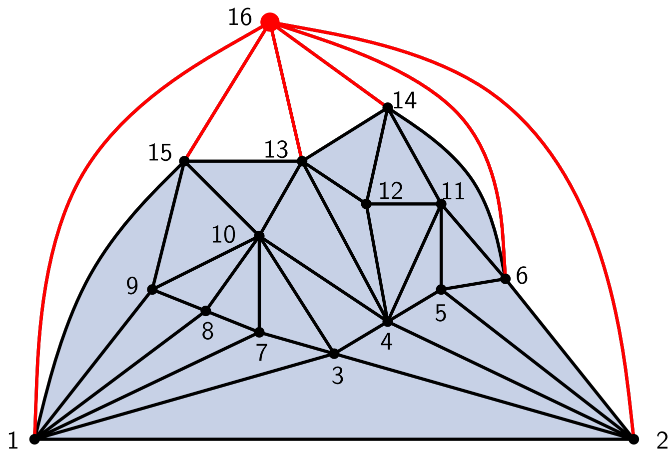


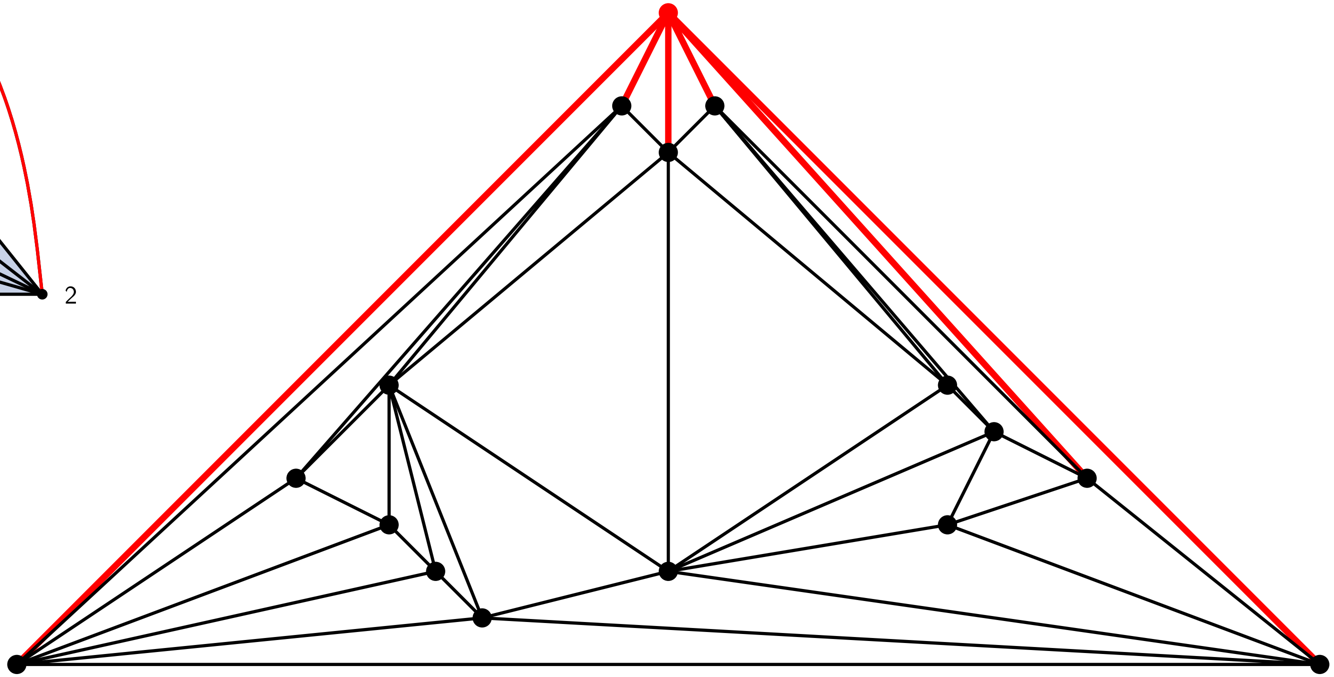
Zeichenalgorithmus



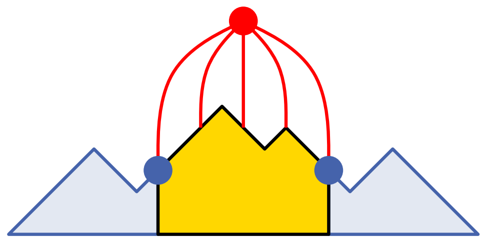


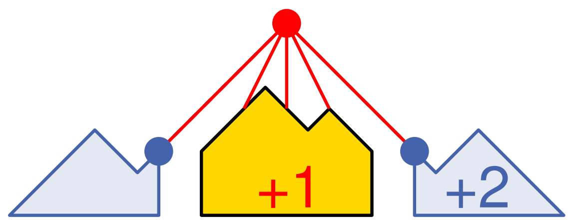


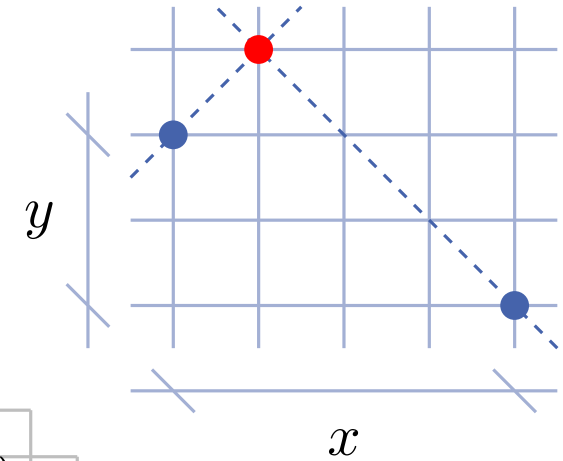


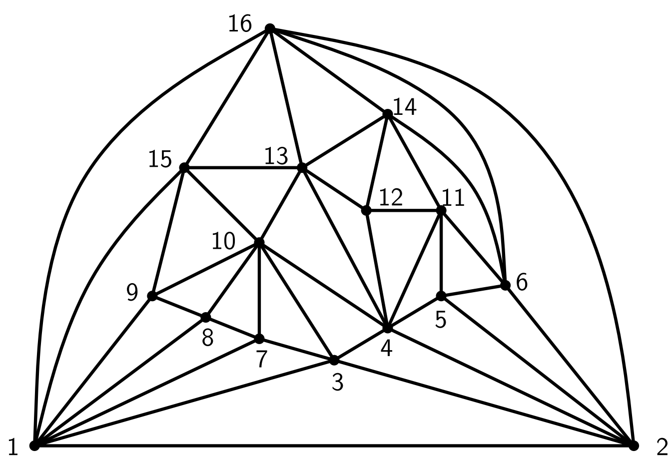


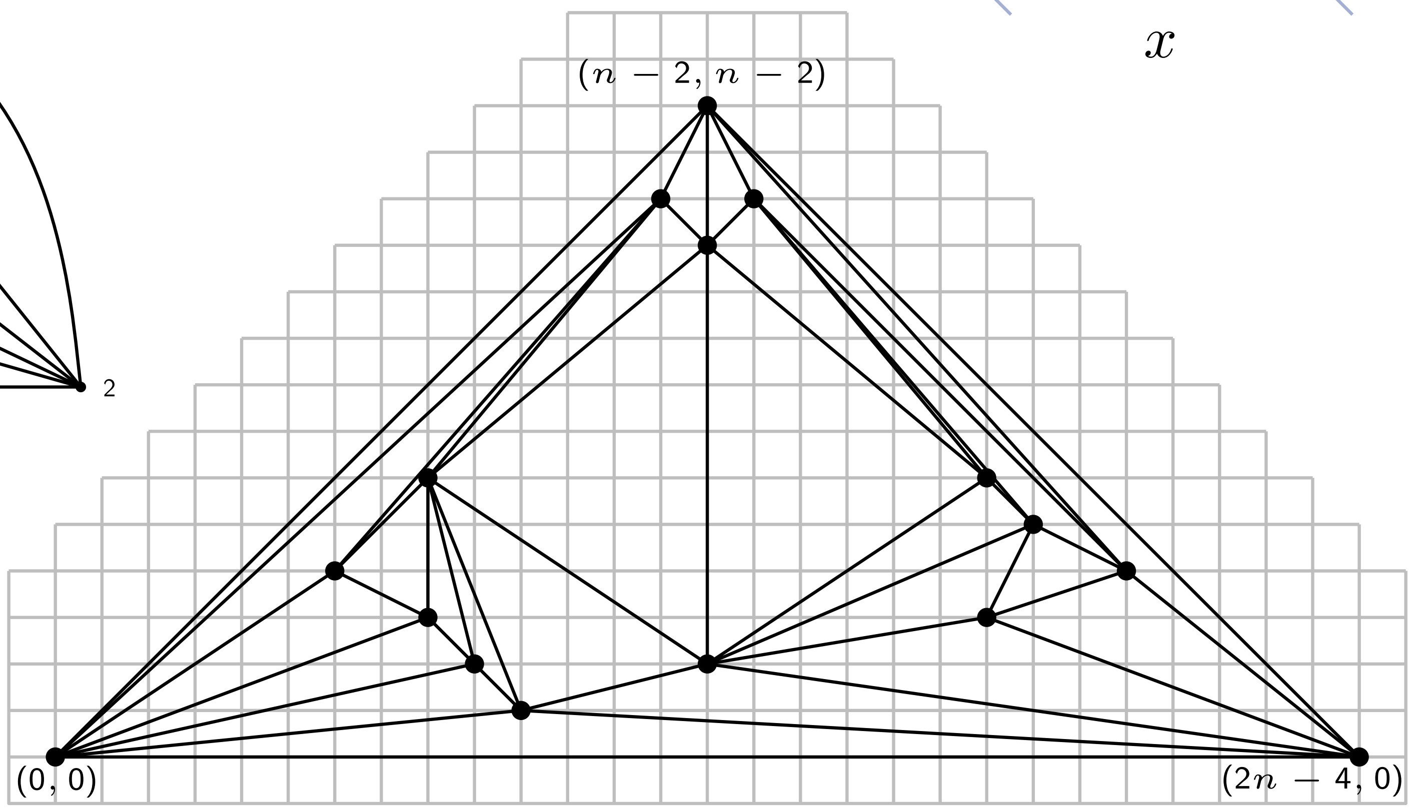
Zeichenalgorithmus











Baryzentrische Repräsentation

Baryzentrische Repräsentation

Eine baryzentrische Repräsentation eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine injektive Abbildung $v \in V \mapsto (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften

- $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ für alle $v \in V$
- für alle $\{x, y\} \in E$ und all $z \in V \setminus \{x, y\}$ existiert $k \in \{1, 2, 3\}$ mit $x_k < z_k$ und $y_k < z_k$.

Baryzentrische Repräsentation

Baryzentrische Repräsentation

Eine baryzentrische Repräsentation eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine injektive Abbildung $v \in V \mapsto (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften

- $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ für alle $v \in V$
- für alle $\{x, y\} \in E$ und all $z \in V \setminus \{x, y\}$ existiert $k \in \{1, 2, 3\}$ mit $x_k < z_k$ und $y_k < z_k$.

Lemma [Schnyder '90]

Sei $v \in V \mapsto (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ eine baryzentrische Repräsentation eines Graphen $G = (V, E)$ und seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ in allgemeiner Lage. Dann ist die Abbildung

$$f\colon v \in V \mapsto v_1 a + v_2 b + v_3 c$$

eine kreuzungsfreie Zeichnung von G, die von a, b, c aufgespannt wird.

Schnyder-Beschriftung

Beobachtung

Sei $v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ eine baryzentrische Repräsentation eines triangulierten eingebetteten Graphen $G = (V, E)$, dann kann jeder Winkel $\angle(xy, xz)$ eindeutig mit $k \in \{1, 2, 3\}$ beschriftet werden.

Schnyder-Beschriftung

Beobachtung

Sei $v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ eine baryzentrische Repräsentation eines triangulierten eingebetteten Graphen $G = (V, E)$, dann kann jeder Winkel $\angle(xy, xz)$ eindeutig mit $k \in \{1, 2, 3\}$ beschriftet werden.

Definition: Schnyder-Beschriftung

Eine Schnyder-Beschriftung (normal labeling) eines eingebetteten, triangulierten Graphen ist eine Beschriftung mit folgenden Eigenschaften

Schnyder-Beschriftung

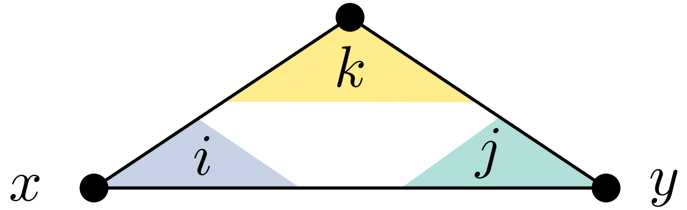
Beobachtung

Sei $v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ eine baryzentrische Repräsentation eines triangulierten eingebetteten Graphen $G = (V, E)$, dann kann jeder Winkel $\angle(xy, xz)$ eindeutig mit $k \in \{1, 2, 3\}$ beschriftet werden.

Definition: Schnyder-Beschriftung

Eine Schnyder-Beschriftung (normal labeling) eines eingebetteten, triangulierten Graphen ist eine Beschriftung mit folgenden Eigenschaften

Facetten Jedes Dreieck hat je einen Winkel, der mit 1,2 und 3 beschriftet ist. Die entsprechenden Knoten erscheinen im Gegenuhrzeigersinn.



Schnyder-Beschriftung

Beobachtung

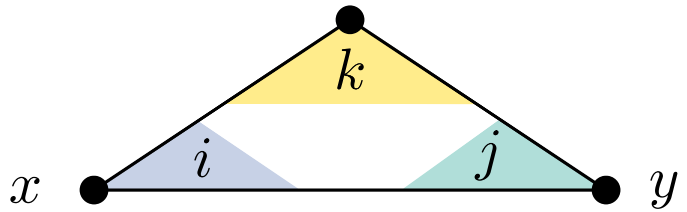
Sei $v \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ eine baryzentrische Repräsentation eines triangulierten eingebetteten Graphen $G = (V, E)$, dann kann jeder Winkel $\angle(xy, xz)$ eindeutig mit $k \in \{1, 2, 3\}$ beschriftet werden.

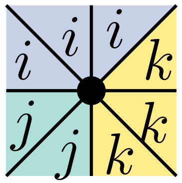
Definition: Schnyder-Beschriftung

Eine Schnyder-Beschriftung (normal labeling) eines eingebetteten, triangulierten Graphen ist eine Beschriftung mit folgenden Eigenschaften

Facetten Jedes Dreieck hat je einen Winkel, der mit 1,2 und 3 beschriftet ist. Die entsprechenden Knoten erscheinen im Gegenuhrzeigersinn.

Knoten Beschriftungen um Knoten bilden drei nichtleere Intervalle von 1, 2 und drei im Gegenuhrzeigersinn.



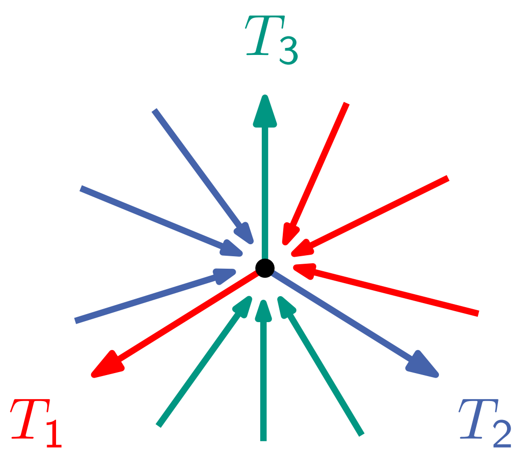


Schnyder-Wald

Definition: Schnyder-Wald

Ein Schnyder-Wald eines triangulierten, eingebetteten planaren Graphen $G = (V, E)$ ist eine Partition der Kantenmenge E in drei Mengen T_1, T_2, T_3 gerichteter Kanten, so dass für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt:

- v hat Ausgangsgrad 3 in T_1, T_2, T_3
- Die Reihenfolge der Kante um v im Gegenuhrzeigersinn ist: ausgehend in T_1, eingehend in T_3, ausgehend in T_2, eingehend in T_1, ausgehend in T_3, eingehend in T_2.

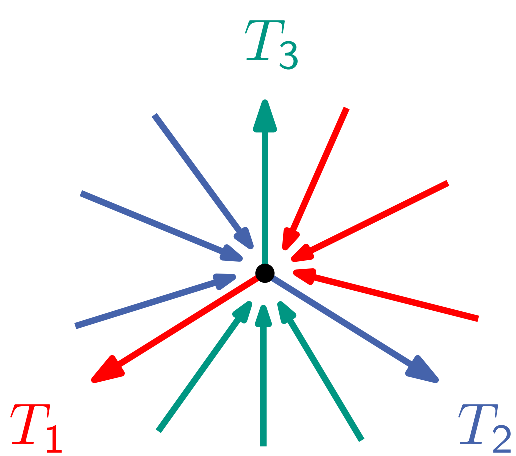


Schnyder-Wald

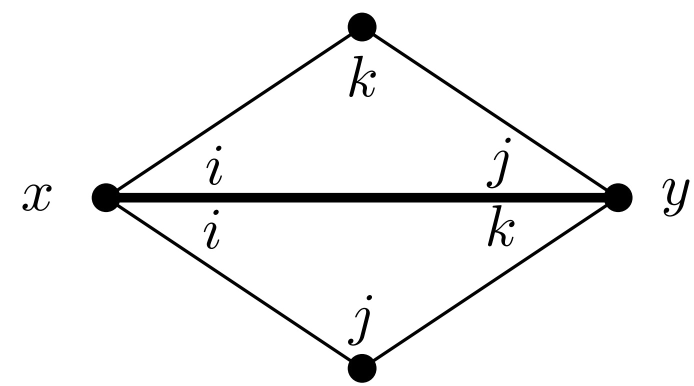
Definition: Schnyder-Wald

Ein Schnyder-Wald eines triangulierten, eingebetteten planaren Graphen $G = (V, E)$ ist eine Partition der Kantenmenge E in drei Mengen T_1, T_2, T_3 gerichteter Kanten, so dass für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt:

- v hat Ausgangsgrad 3 in T_1, T_2, T_3
- Die Reihenfolge der Kante um v im Gegenuhrzeigersinn ist: ausgehend in T_1, eingehend in T_3, ausgehend in T_2, eingehend in T_1, ausgehend in T_3, eingehend in T_2.



Schnyder Beschriftung $\leftrightarrow$ Schnyder Wald

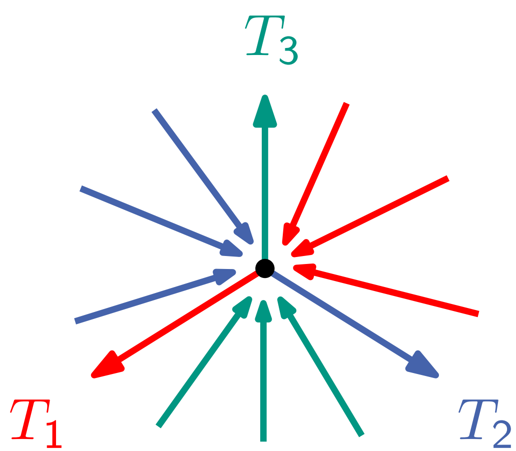


Schnyder-Wald

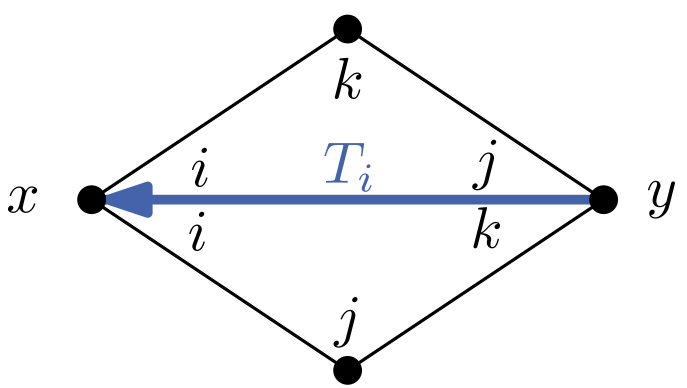
Definition: Schnyder-Wald

Ein Schnyder-Wald eines triangulierten, eingebetteten planaren Graphen $G = (V, E)$ ist eine Partition der Kantenmenge E in drei Mengen T_1, T_2, T_3 gerichteter Kanten, so dass für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt:

- v hat Ausgangsgrad 3 in T_1, T_2, T_3
- Die Reihenfolge der Kante um v im Gegenuhrzeigersinn ist: ausgehend in T_1, eingehend in T_3, ausgehend in T_2, eingehend in T_1, ausgehend in T_3, eingehend in T_2.



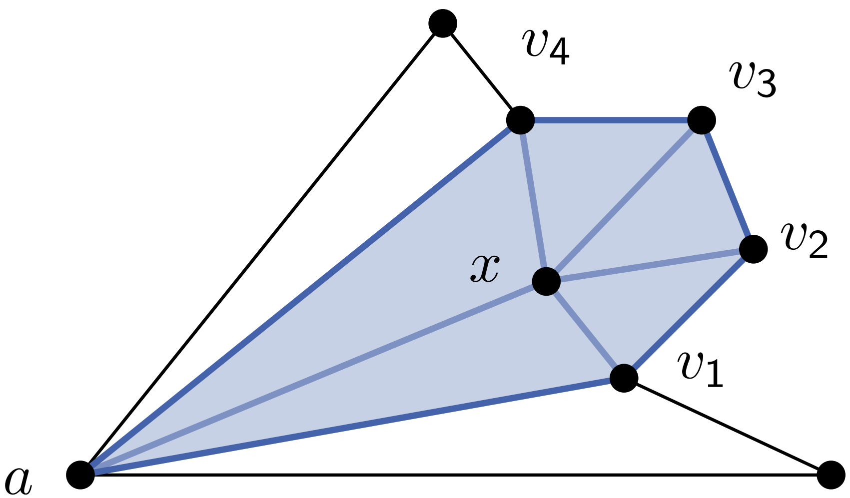
Schnyder Beschriftung $\leftrightarrow$ Schnyder Wald

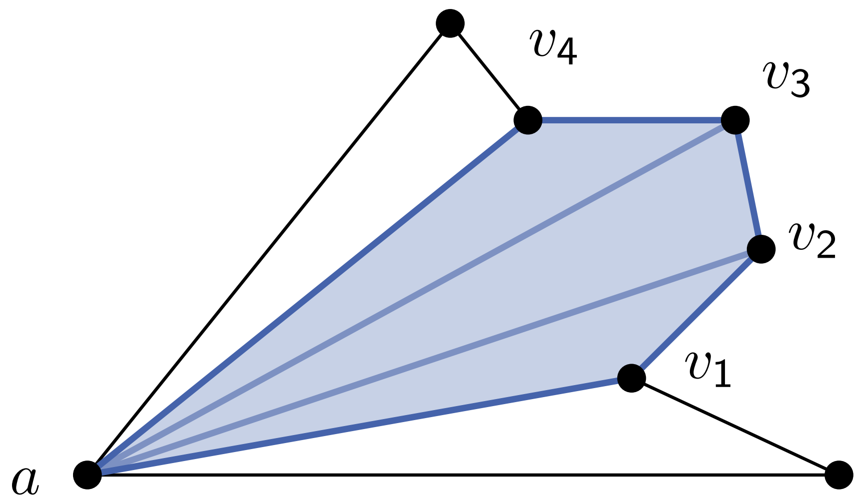


Existenz von Schnyder-Beschriftungen

Lemma

Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph und seien a, b, c die Knoten der äußeren Facette. Dann existiert ein Nachbarknoten $x \notin \{b, c\}$ von a, so dass die Kante $\{a, x\}$ kontrahierbar ist.





Existenz von Schnyder-Beschriftungen

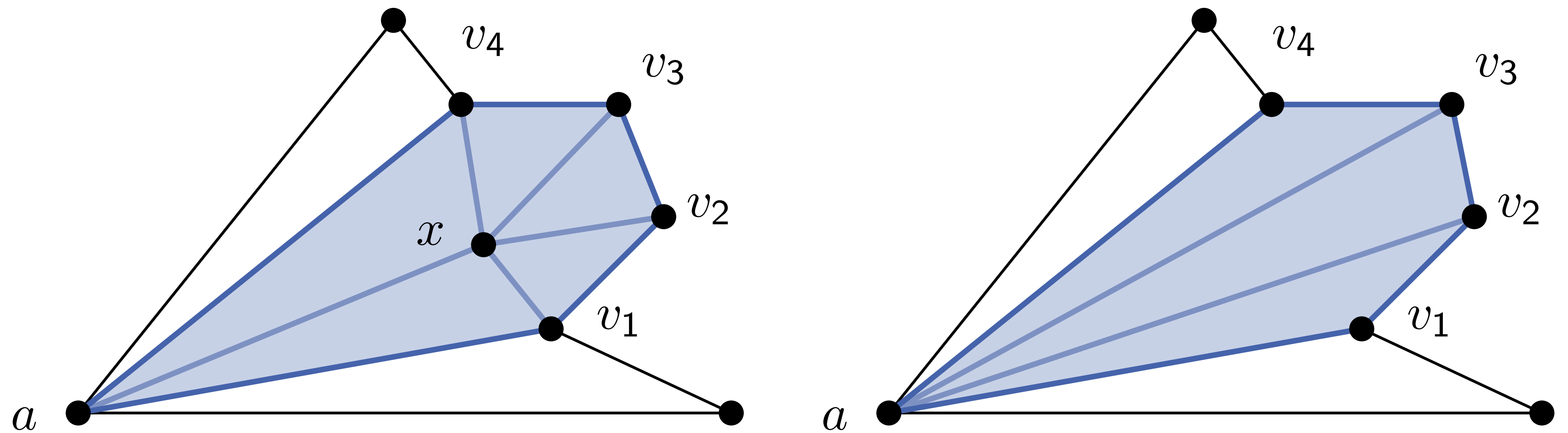
Karlsruhe Institute of Technology

Lemma

Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph und seien a, b, c die Knoten der äußeren Facette. Dann existiert ein Nachbarknoten $x \notin \{b, c\}$ von a, so dass die Kante $\{a, x\}$ kontrahierbar ist.

Satz [Schnyder '90]

Jeder triangulierte, eingebettete planare Graph besitzt eine Schnyder-Beschriftung.



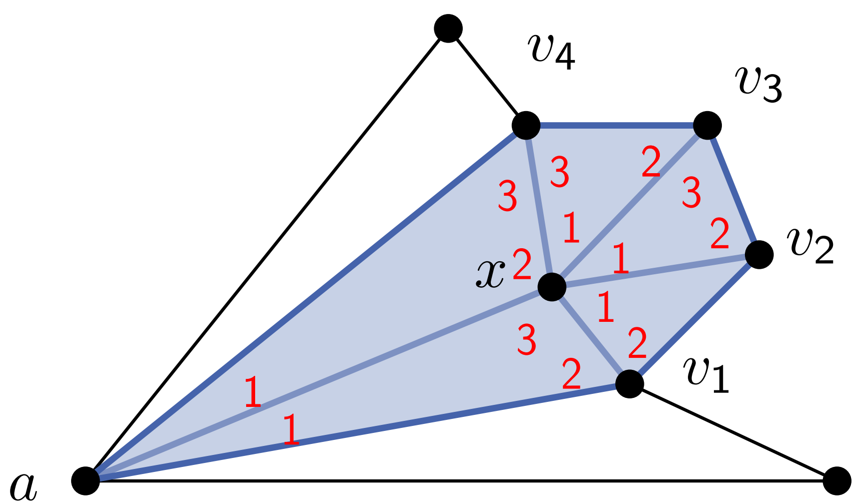
Existenz von Schnyder-Beschriftungen

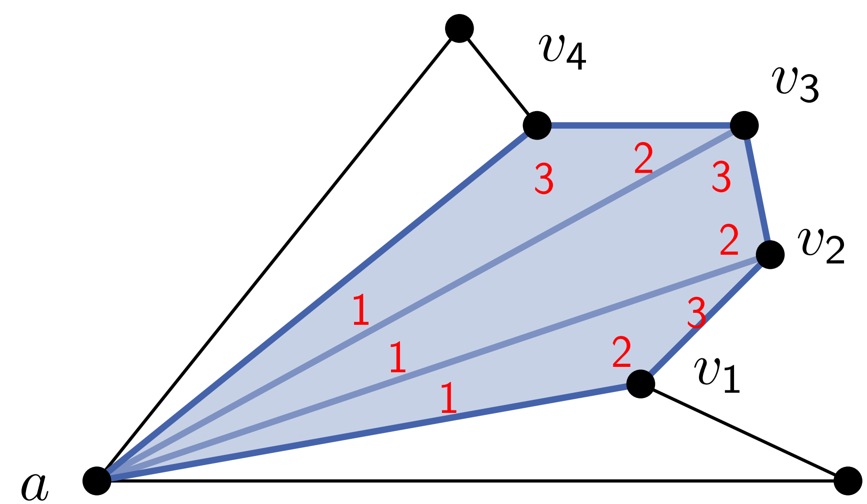
Lemma

Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph und seien a, b, c die Knoten der äußeren Facette. Dann existiert ein Nachbarknoten $x \notin \{b, c\}$ von a, so dass die Kante $\{a, x\}$ kontrahierbar ist.

Satz [Schnyder '90]

Jeder triangulierte, eingebettete planare Graph besitzt eine Schnyder-Beschriftung.





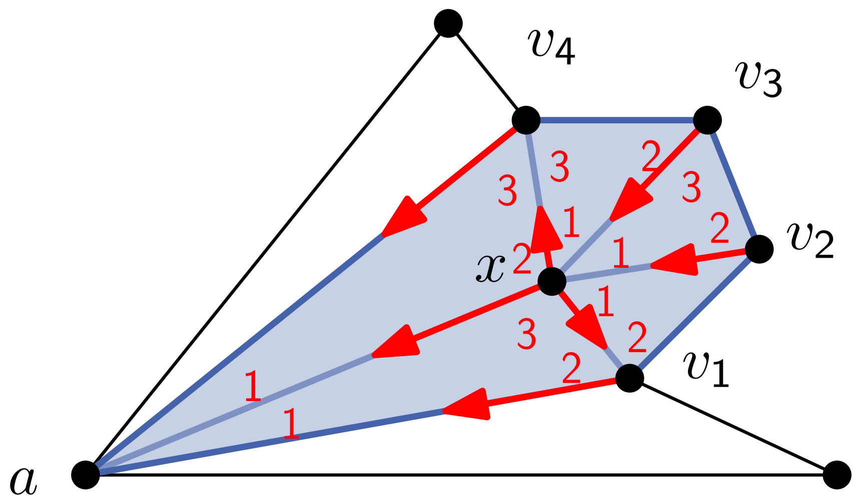
Existenz von Schnyder-Beschriftungen

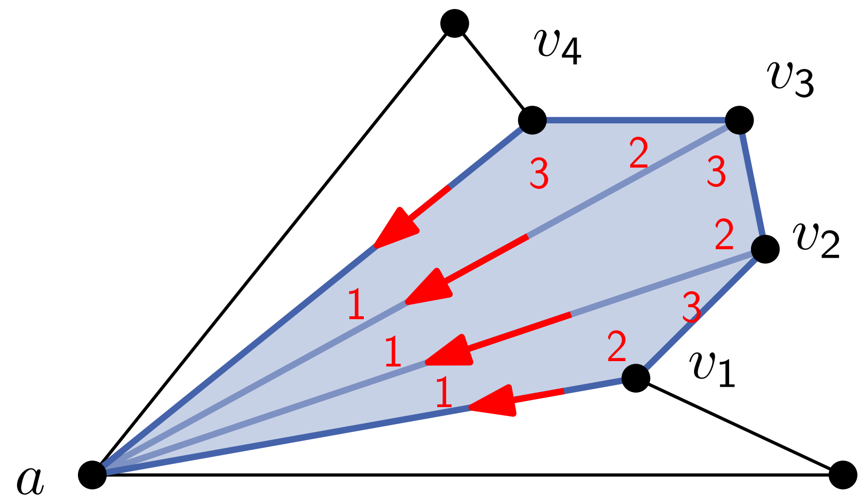
Lemma

Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph und seien a, b, c die Knoten der äußeren Facette. Dann existiert ein Nachbarknoten $x \notin \{b, c\}$ von a, so dass die Kante $\{a, x\}$ kontrahierbar ist.

Satz [Schnyder '90]

Jeder triangulierte, eingebettete planare Graph besitzt eine Schnyder-Beschriftung.





Eigenschaften Schnyder-Beschriftung

Lemma

In einem triangulierten, eingebettenen, beschrifteten Graphen gilt:

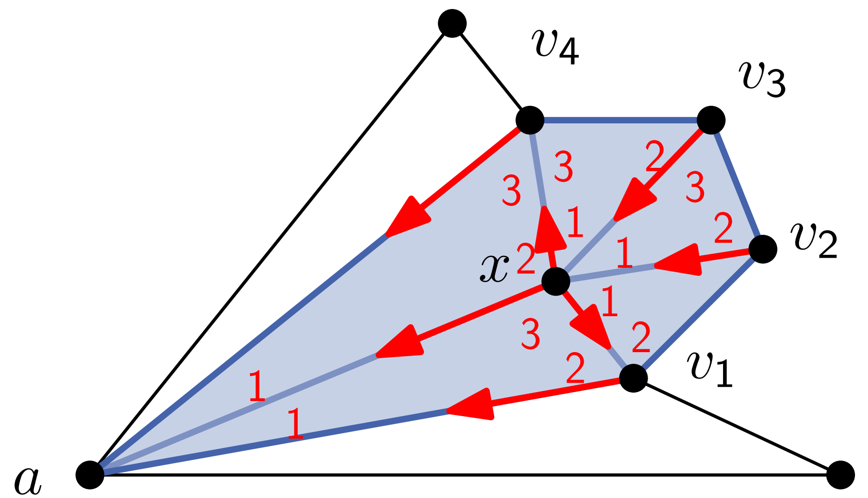
- die Winkel an äußeren Knoten jeweils gleich beschriftet
- die Winkel an unterschiedlichen äußeren Knoten sind unterschiedlich beschriftet
- die Beschriftungen der äußeren Knoten ist 1,2,3 im Gegenuhrzeigersinn.

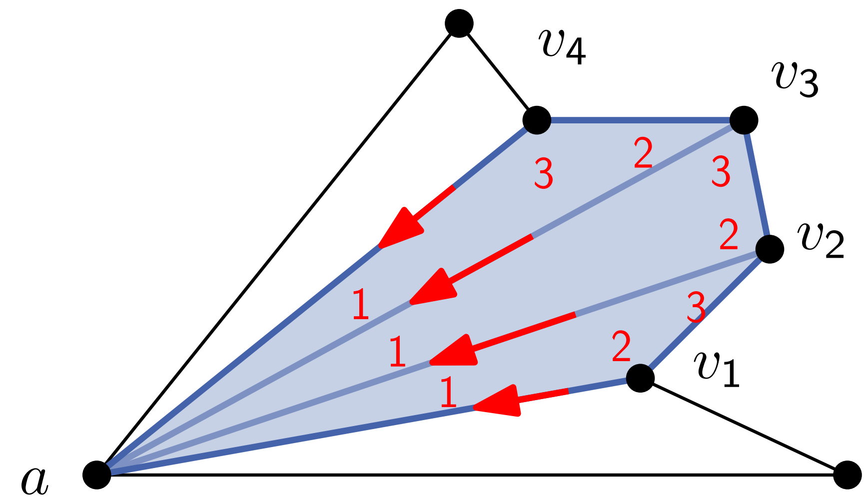
Schnyder-Wald Eigenschaften

Satz [Schnyder ’90]

Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph mit Schnyder-Wald T_1, T_2, T_3, dann enthält T_i alle inneren und genau einen äußeren Knoten a_i und alle Kanten sind nach a_i gerichtet. Die a_i’s sind paarweise unterschiedlich und erscheinen im Gegenuhrzeigersinn.

Extraktion stellt das sicher und erzeugt alle Wälder





Schnyder-Wald Eigenschaften

Satz [Schnyder '90]

Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph mit Schnyder-Wald T_1, T_2, T_3, dann enthält T_i alle inneren und genau einen äußeren Knoten a_i und alle Kanten sind nach a_i gerichtet. Die a_i's sind paarweise unterschiedlich und erscheinen im Gegenuhrzeigersinn.

Satz [Schnyder '90]

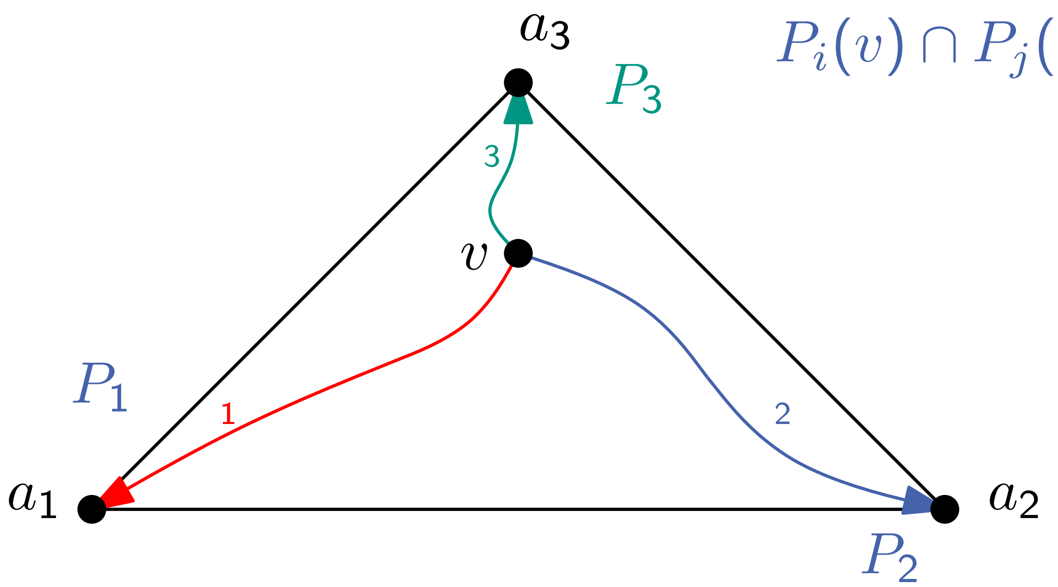
Sei G ein triangulierter, eingebetteter planarer Graph mit Schnyder Wald T_1, T_2, T_3, dann enthält

$$T_i \cup T_{i+1 \mod 3}^{-1} \cup T_{i+2 \mod 3}^{-1}$$

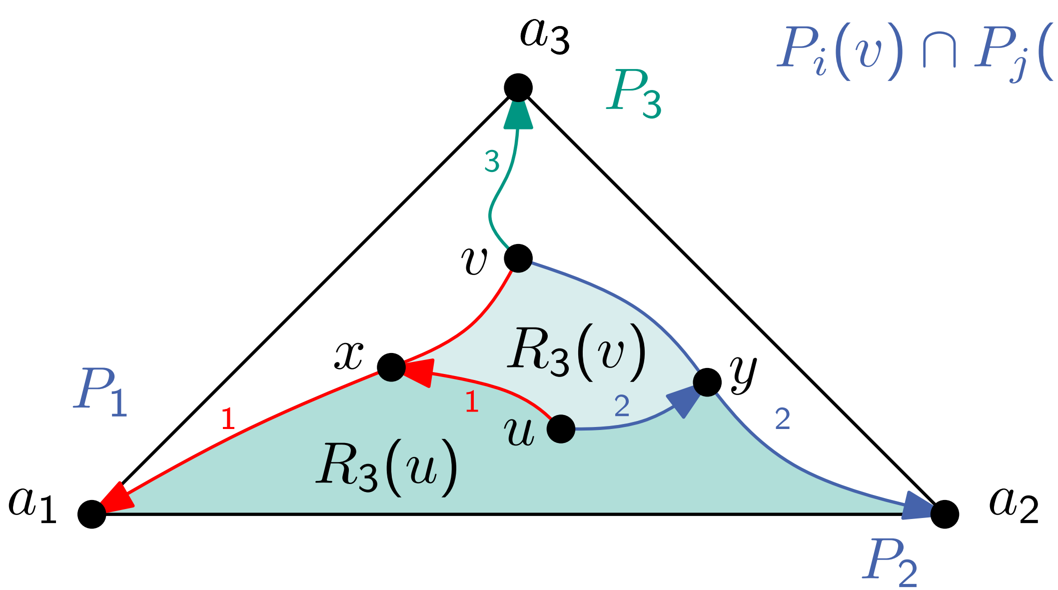
keinen gerichteten Kreis für alle $i = 1, 2, 3$.

Knoten-Regionen

$P_i(v) \cap P_j(v) = \{v\}$ für $i \neq j$



Knoten-Regionen



$P_i(v) \cap P_j(v) = \{v\}$ für $i \neq j$

Lemma [Schnyder '90]

Seien $u \neq v$ zwei innere Knoten eines beschrifteten triangulierten Graphen. Dann gilt

$$u \in R_i(v) \Rightarrow R_i(u) \subsetneq R_i(v)$$

Schnyder Zeichnung

Satz [Schnyder '90]

Die Abbildung

$$f : v \mapsto \frac{1}{2n-5}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2n-5}(|R_1(v)|, |R_2(v)|, |R_3(v)|)$$

ist eine baryzentrische Repräsentation von G.

Schnyder Zeichnung

Satz [Schnyder '90]

Die Abbildung

$$f : v \mapsto \frac{1}{2n-5}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2n-5}(|R_1(v)|, |R_2(v)|, |R_3(v)|)$$

ist eine baryzentrische Repräsentation von G.

Bemerkungen

- Wählt man $a = (2n-5, 0)$, $b = (0, 2n-5)$, $c = (0, 0)$, dann erhält man eine Zeichnung von G auf einem Gitter der Größe $2n-5 \times 2n-5$.
- Kompaktere Layouts erhält man durch Zählen von Knoten.
- Konzepte erweiterbar auf 3-fach zusammenhängende Graphen