Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Kombinatorische Optimierung mittels Flussmethoden

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Ignaz Rutter

3.11.2011

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kombinatorische Optimierung mittels Flussmethoden

(Kapitel 4)

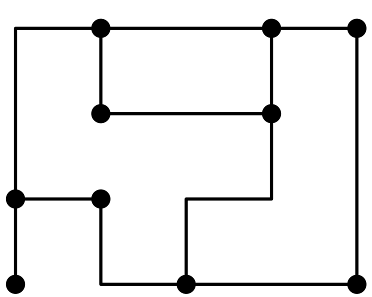
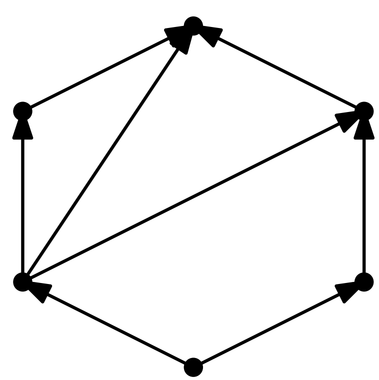
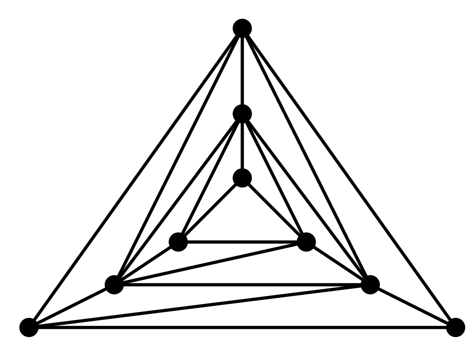
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Inhalt Kapitel 4

Layoutprobleme für *planare* Graphen

- orthogonale Layouts
- aufwärtsgerichtete Layouts für gerichtete azyklische Graphen
- Winkelauflösung in geradlinigen Layouts

→ Modellierung der Probleme durch Flussnetzwerke

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Planarität

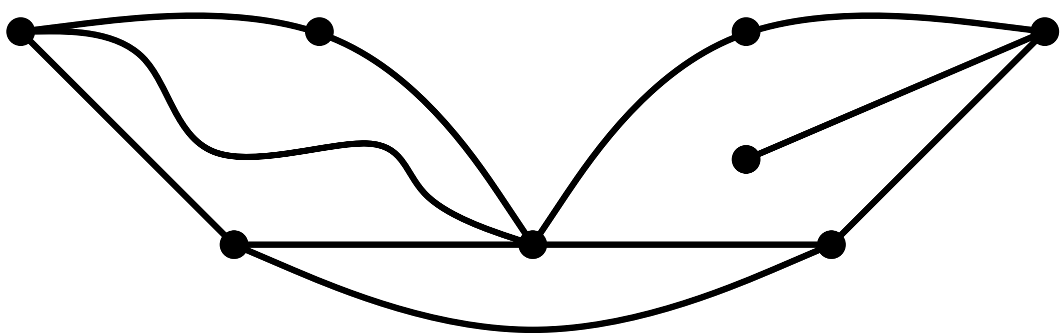
Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Zeichnung Γ von G (in Standardrepräsentation) gibt, in der sich keine zwei Kanten schneiden.
Eine solche Zeichnung Γ heißt planare Einbettung von G.

Planarität

Definition

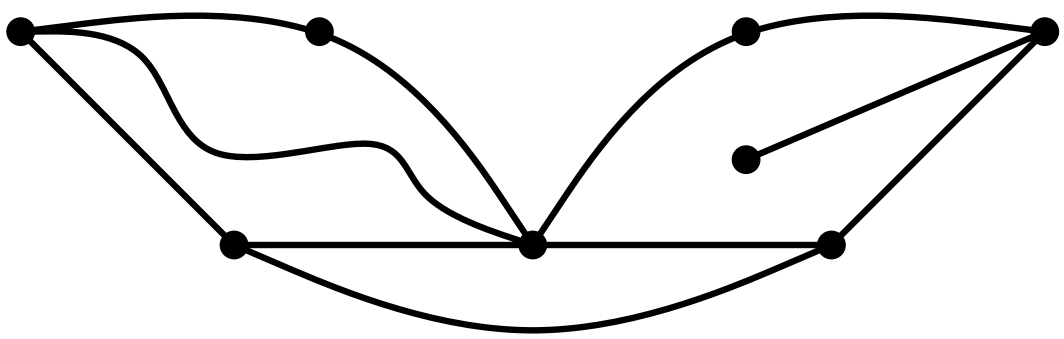
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Zeichnung Γ von G (in Standardrepräsentation) gibt, in der sich keine zwei Kanten schneiden.
Eine solche Zeichnung Γ heißt planare Einbettung von G.



Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Zeichnung Γ von G (in Standardrepräsentation) gibt, in der sich keine zwei Kanten schneiden.
Eine solche Zeichnung Γ heißt planare Einbettung von G.



Zusammenhang zwischen n, m und $|\text{Facetten}|$?

s-t Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(D = (V, A); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $D = (V, A)$
- *Kantenkapazitäten* $c : A \to \mathbb{R}_0^+$
- *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

$$\forall (i,j) \in A \qquad 0 \leq X(i,j) \leq c(i,j) \tag{1}$$

$$\forall i \in V \setminus \{s,t\} \qquad \sum_{(i,j)\in A} X(i,j) - \sum_{(j,i)\in A} X(j,i) = 0 \tag{2}$$

Allgemeines Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(D = (V, A); \ell; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $D = (V, A)$
- untere Kantenkapazitäten $\ell : A \to \mathbb{R}_0^+$
- obere Kantenkapazitäten $u : A \to \mathbb{R}_0^+$
- Knotenbewertung $b : V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{i \in V} b(i) = 0$

Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Fluss, falls gilt:

$$\forall (i,j) \in A \qquad \ell(i,j) \leq X(i,j) \leq u(i,j) \tag{3}$$

$$\forall i \in V \qquad \sum_{(i,j) \in A} X(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j,i) = b(i) \tag{4}$$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Fragestellungen auf geg. Flussnetzwerk

Gültiger Fluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h., der

- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Fragestellungen auf geg. Flussnetzwerk

Gültiger Fluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h., der

- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathsf{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$
Definiere: $\mathsf{cost}(X) := \sum_{(i,j) \in A} \mathsf{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Fragestellungen auf geg. Flussnetzwerk

Gültiger Fluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h., der
- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathsf{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$
Definiere: $\mathsf{cost}(X) := \sum_{(i,j)\in A} \mathsf{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Minimalkostenfluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, der
- $\mathsf{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Fragestellungen auf geg. Flussnetzwerk

Gültiger Fluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h., der

- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathsf{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$
Definiere: $\mathsf{cost}(X) := \sum_{(i,j)\in A} \mathsf{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Minimalkostenfluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, der

- $\mathsf{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Algorithmen mit Laufzeit $O(n^2 \log n)$ bzw. $O(n^{7/4} \log n)$

Fragestellungen auf geg. Flussnetzwerk

Gültiger Fluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, d.h., der

- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\mathsf{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$
Definiere: $\mathsf{cost}(X) := \sum_{(i,j)\in A} \mathsf{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Minimalkostenfluß

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, der

- $\mathsf{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Algorithmen mit Laufzeit $O(n^2 \log n)$ bzw. $O(n^{7/4} \log n)$

neu: $O(n^{3/2})$ [Cornelsen, Karrenbauer GD'11]

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

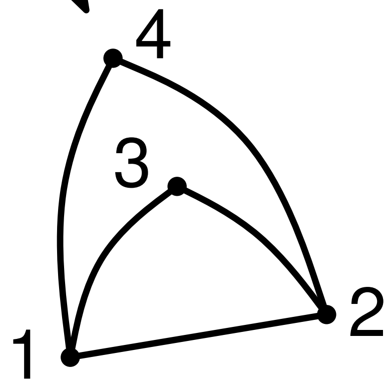
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

Kreuzungsminimierung

kombinatorische Einbettung



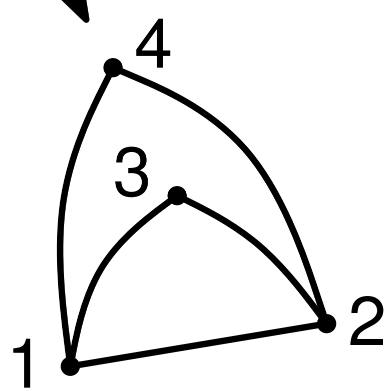
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

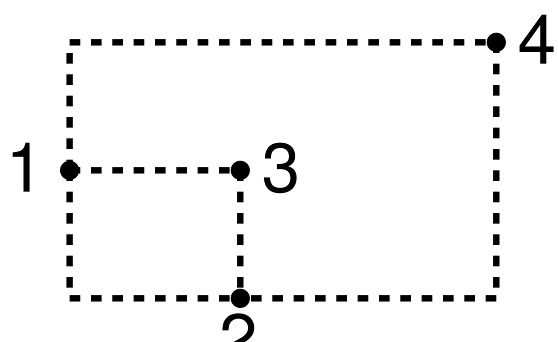
Kreuzungsminimierung

kombinatorische Einbettung



Knickminimierung

orthogonale Beschreibung



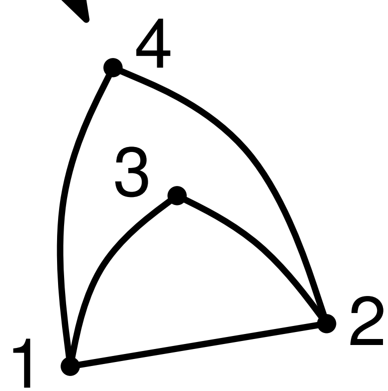
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$

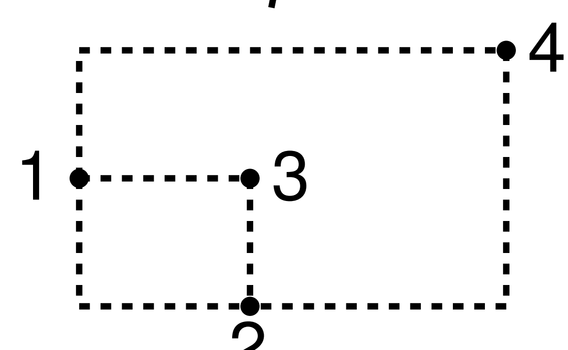
Kreuzungsminimierung

kombinatorische Einbettung



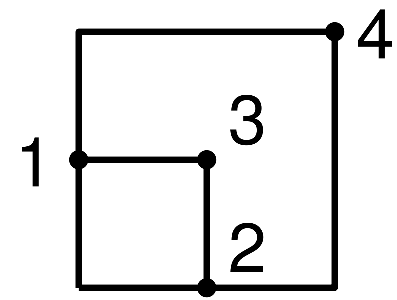
Knickminimierung

orthogonale Beschreibung



planare Einbettung

Flächenminimierung



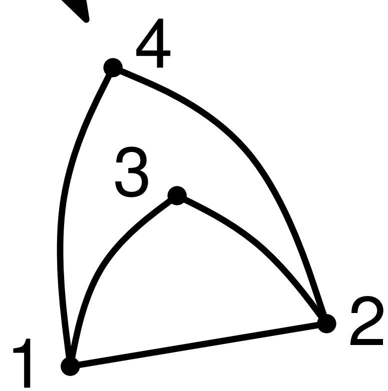
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

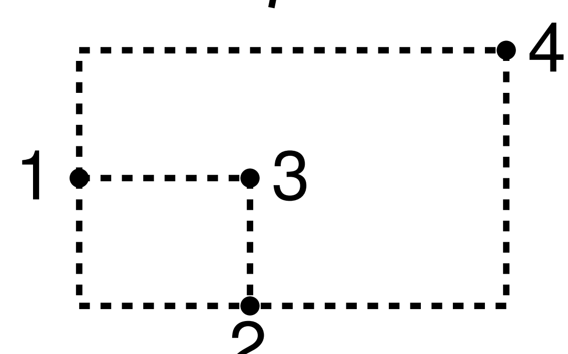
Kreuzungsminimierung

kombinatorische Einbettung



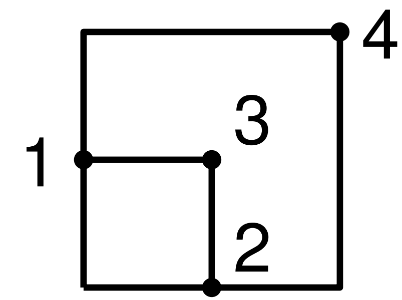
Knickminimierung

orthogonale Beschreibung



planare Einbettung

Flächen-minimierung



Problem: Orthogonale Beschreibung

Problem: Knickminimierung bei fester Einbettung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Gitterzeichnung, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Problem: Orthogonale Beschreibung

Problem: Knickminimierung bei fester Einbettung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Gitterzeichnung, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Problem': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Beschreibung $H(G)$ die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: planarer Graph $G = (V, E)$, Facettenmenge $\mathcal{F}$, äußere Facette f_0

Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$**:** im UZS um f geordnete Folge von Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

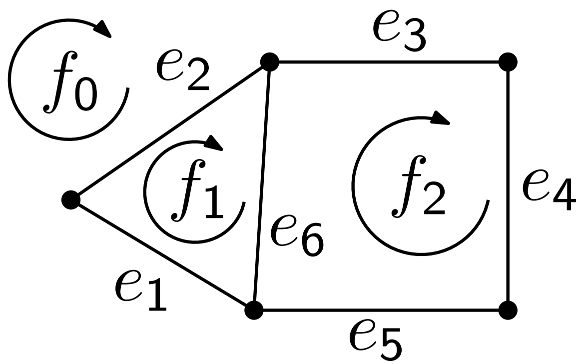
- e ist Randkante von f
- δ ist 0-1-Folge (0 = Rechtsknick, 1 = Linksknick)
- α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

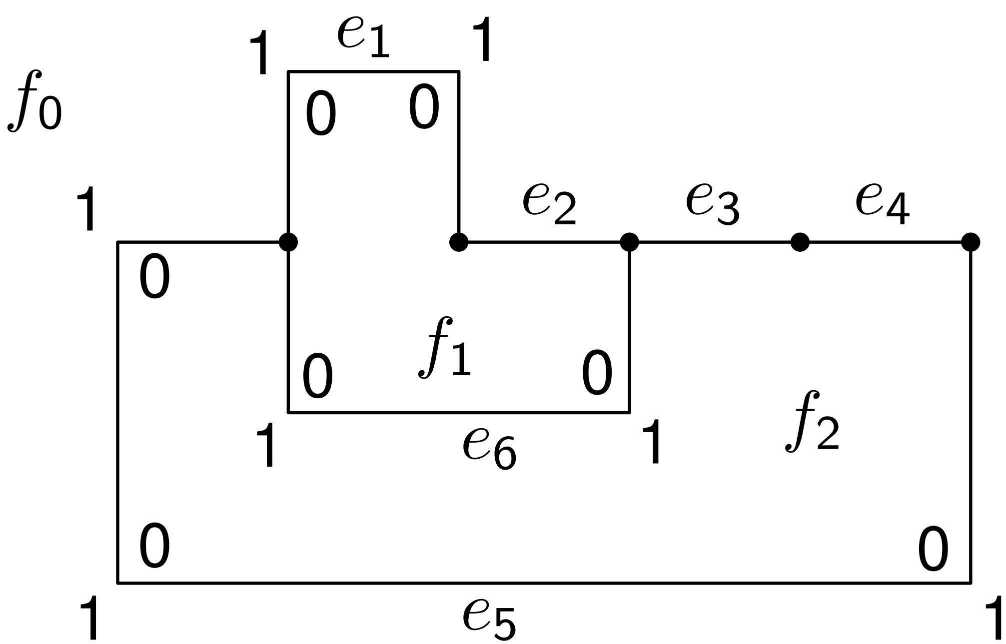
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





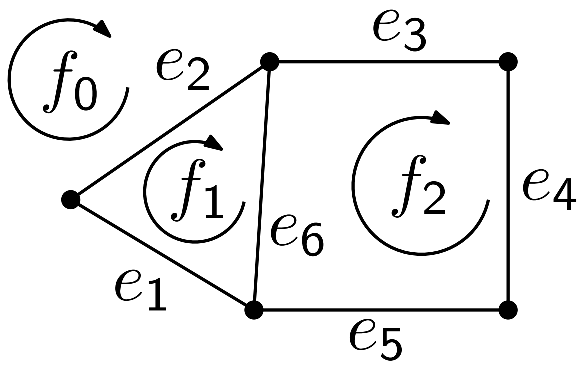
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

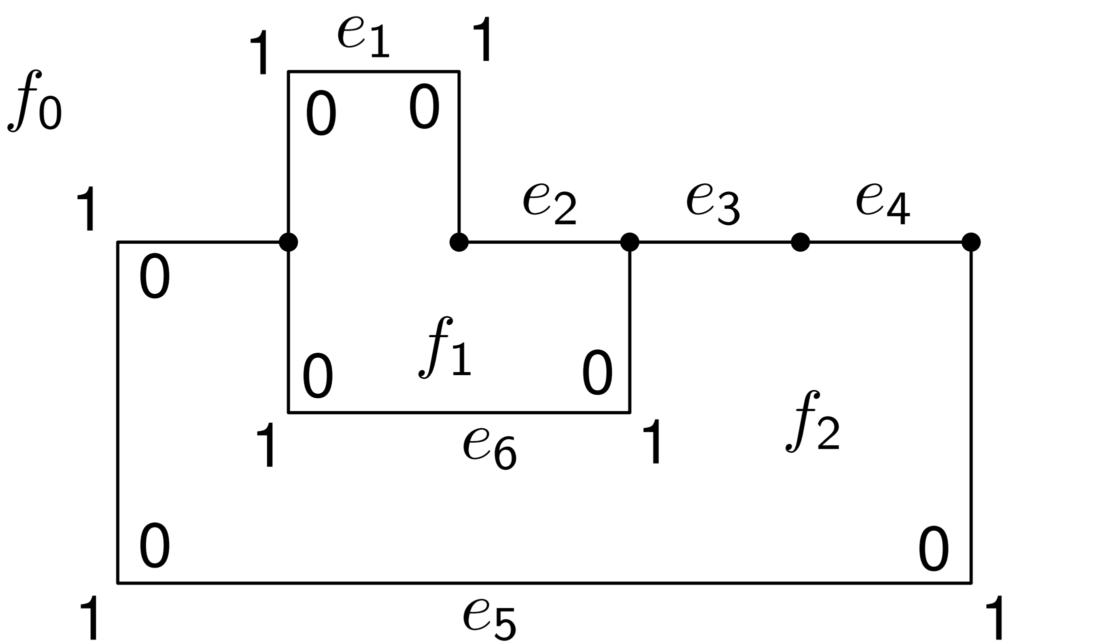
$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

f_0 falsch rum!?



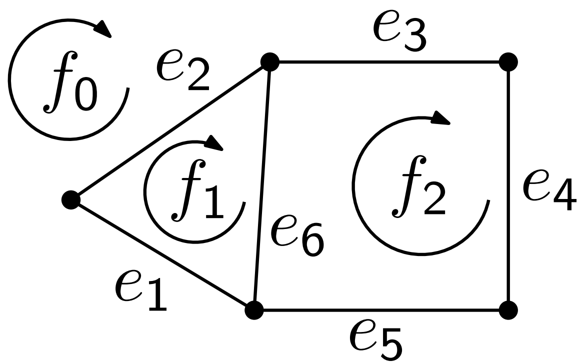


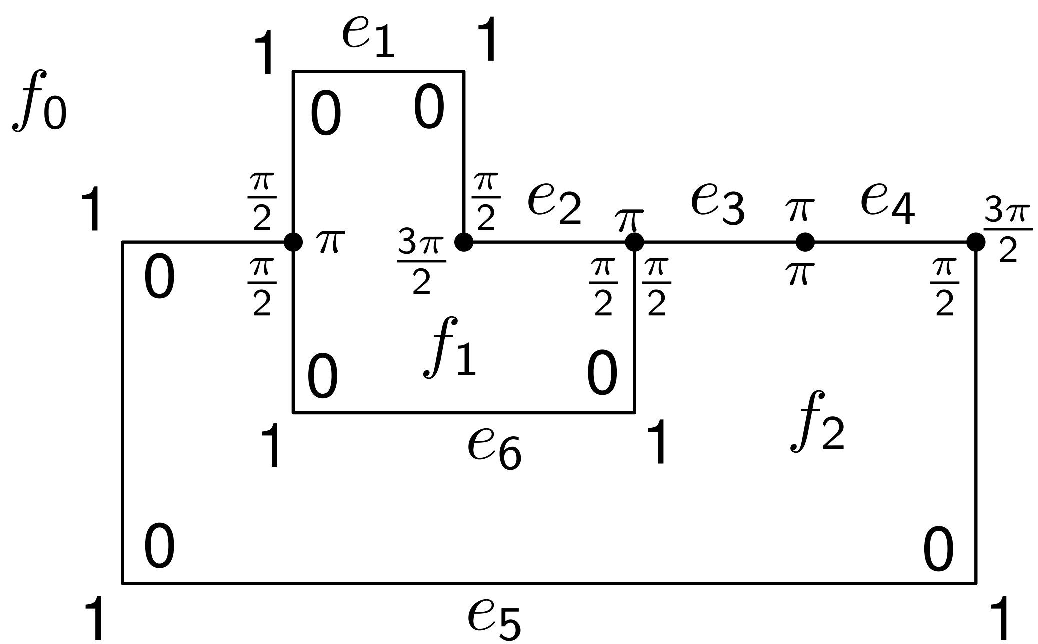
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4$ für $f \neq f_0$ und $\sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

(H4) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\mathrm{deg}_{\mathrm{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0,
finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- Währung = $\measuredangle\ \frac{\pi}{2}$

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- Währung = $\measuredangle\ \frac{\pi}{2}$
- Knoten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Facetten (# $\frac{\pi}{2}$ zur Facette)
- Facetten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Nachbar-Facetten (# Knicke zum Nachbar)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ A = \{(v,f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \\ \qquad \{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f,g \text{ adjazent via Kante } e\} \\ \blacksquare\ b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ \blacksquare\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ \blacksquare\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b \stackrel{?}{=} 0$$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{l} b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b = 0$$

(Euler)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); \ell; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v,f) \in V \times \mathcal{F} \mid v$ inzident zu $f\} \cup$
  $\{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f,g$ adjazent via Kante $e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

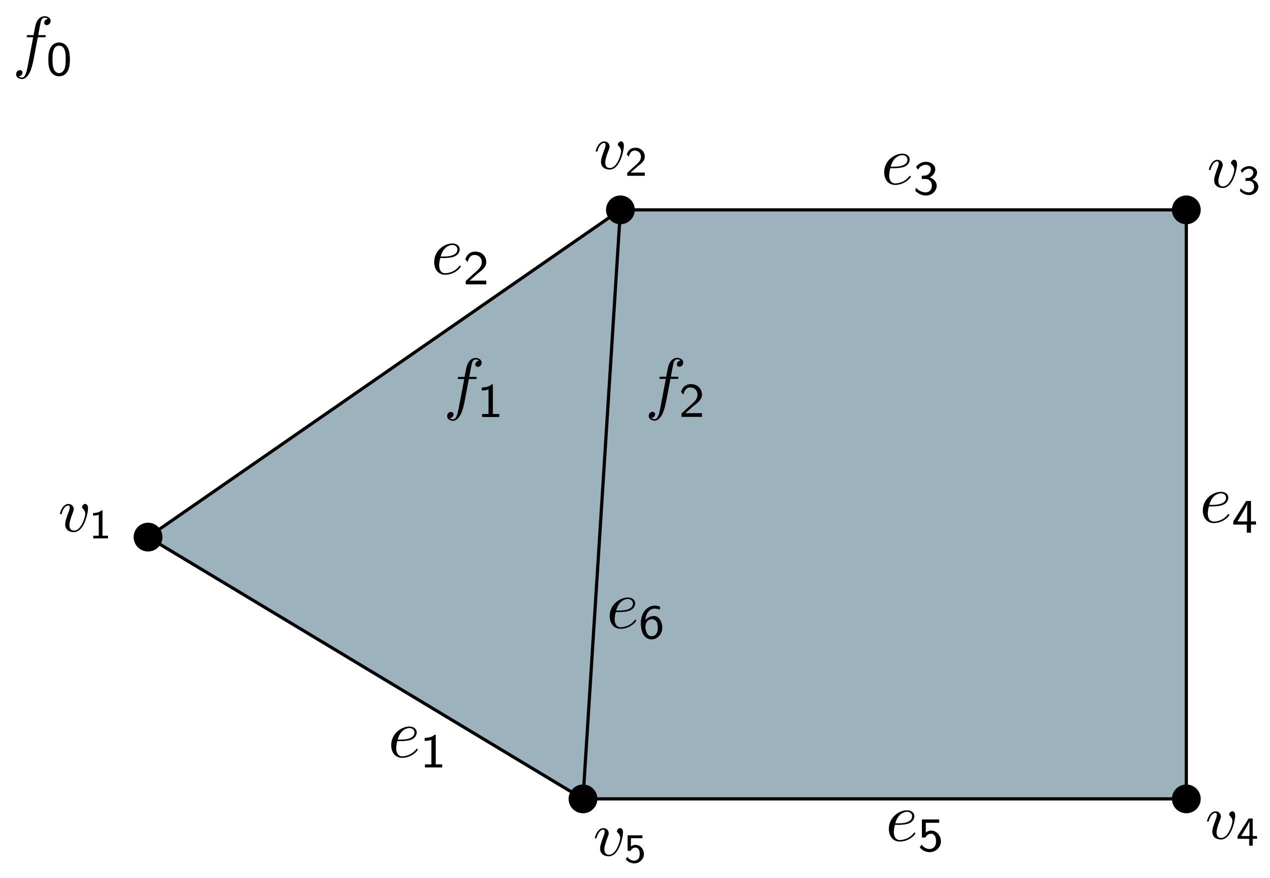
$\Rightarrow \sum b = 0$
(Euler)

$$\forall (f,g) \in A, f,g \in \mathcal{F} \qquad \ell(f,g) := 0 \leq X(f,g) \leq \infty =: u(f,g)$$

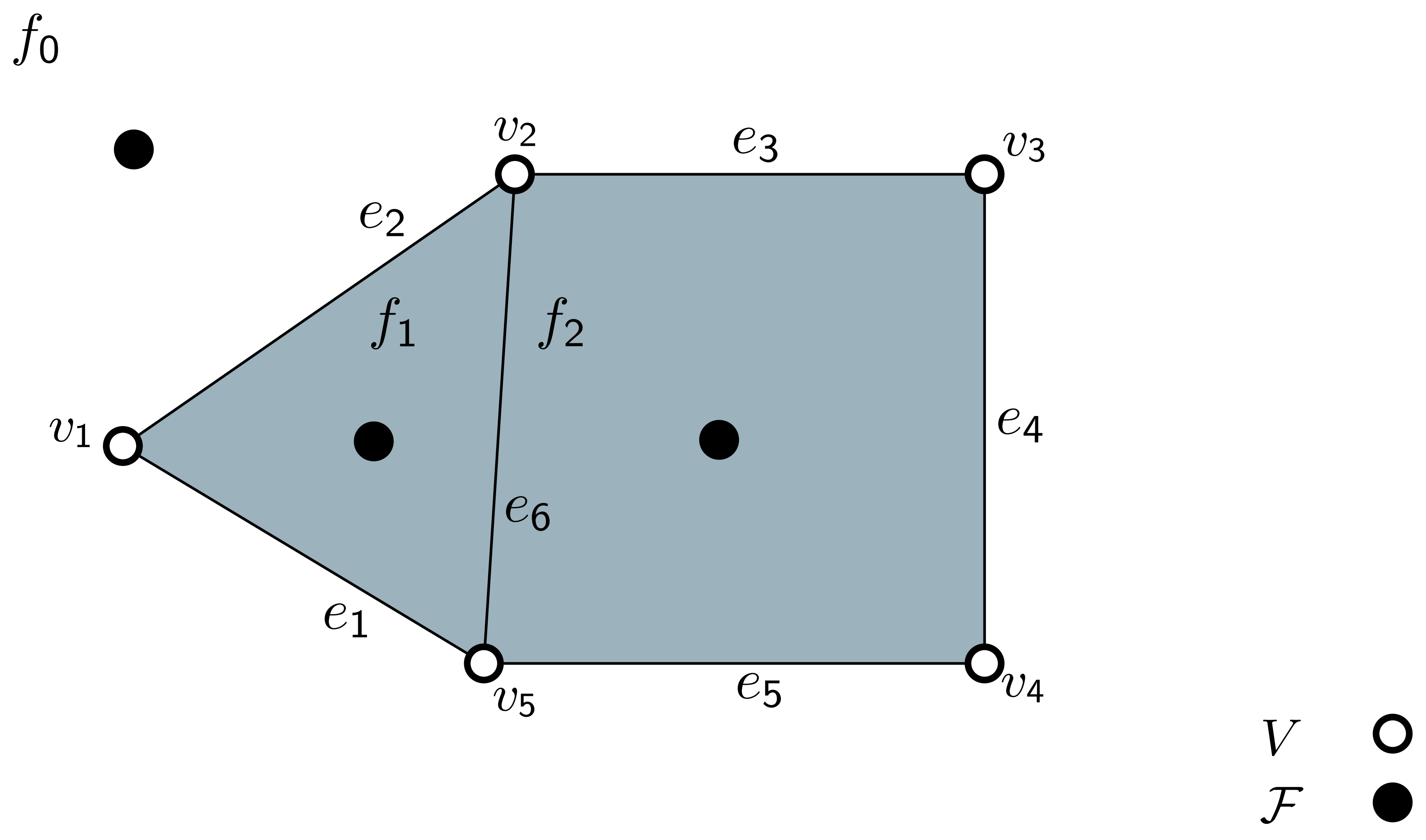
$$\forall (v,f) \in A, v \in V, f \in \mathcal{F} \qquad \ell(v,f) := 1 \leq X(v,f) \leq 4 =: u(v,f)$$

$$\forall i \in V \qquad \sum_{(i,j) \in A} X(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j,i) = b(i)$$

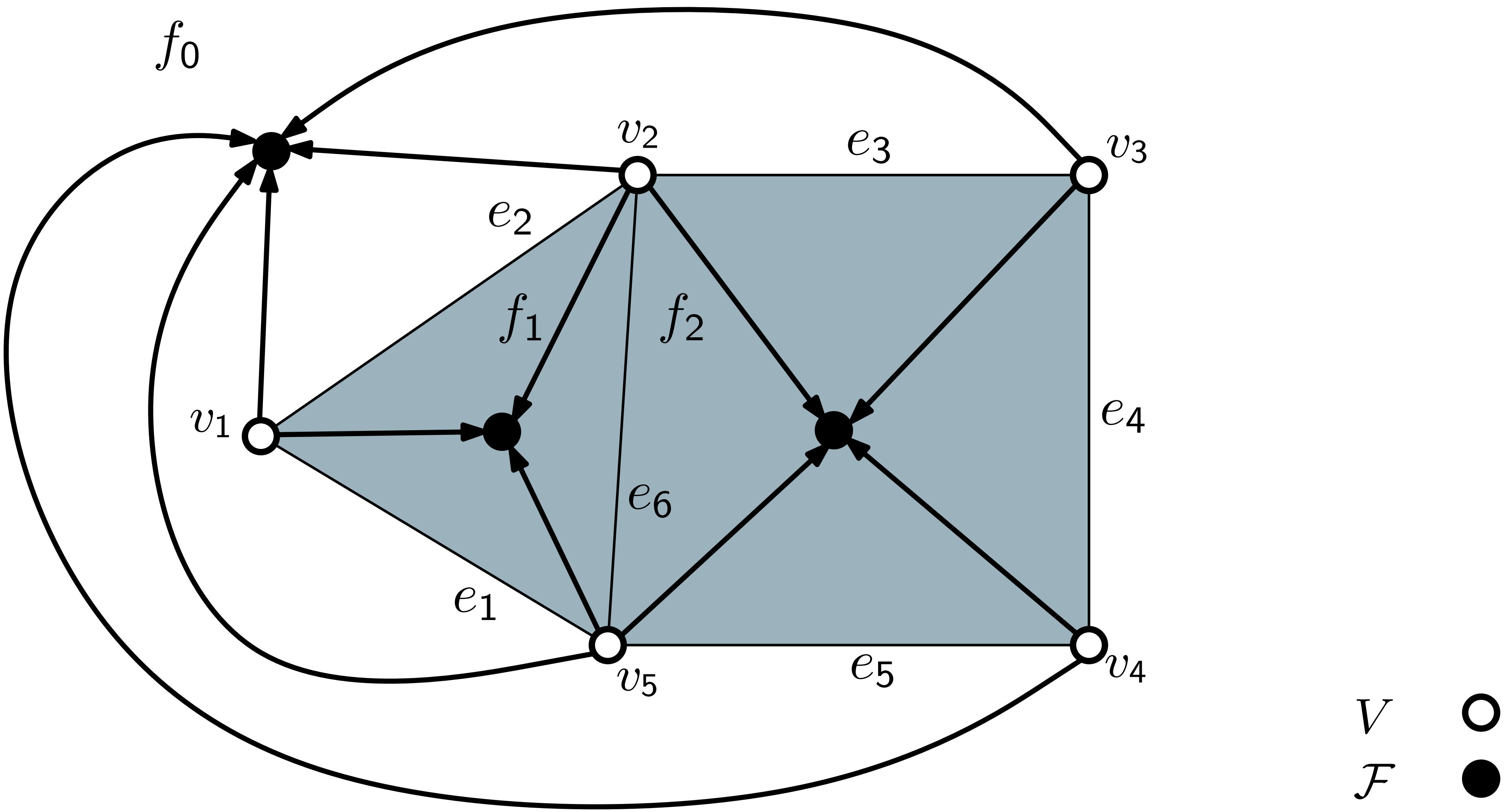
Beispiel Flussnetzwerk



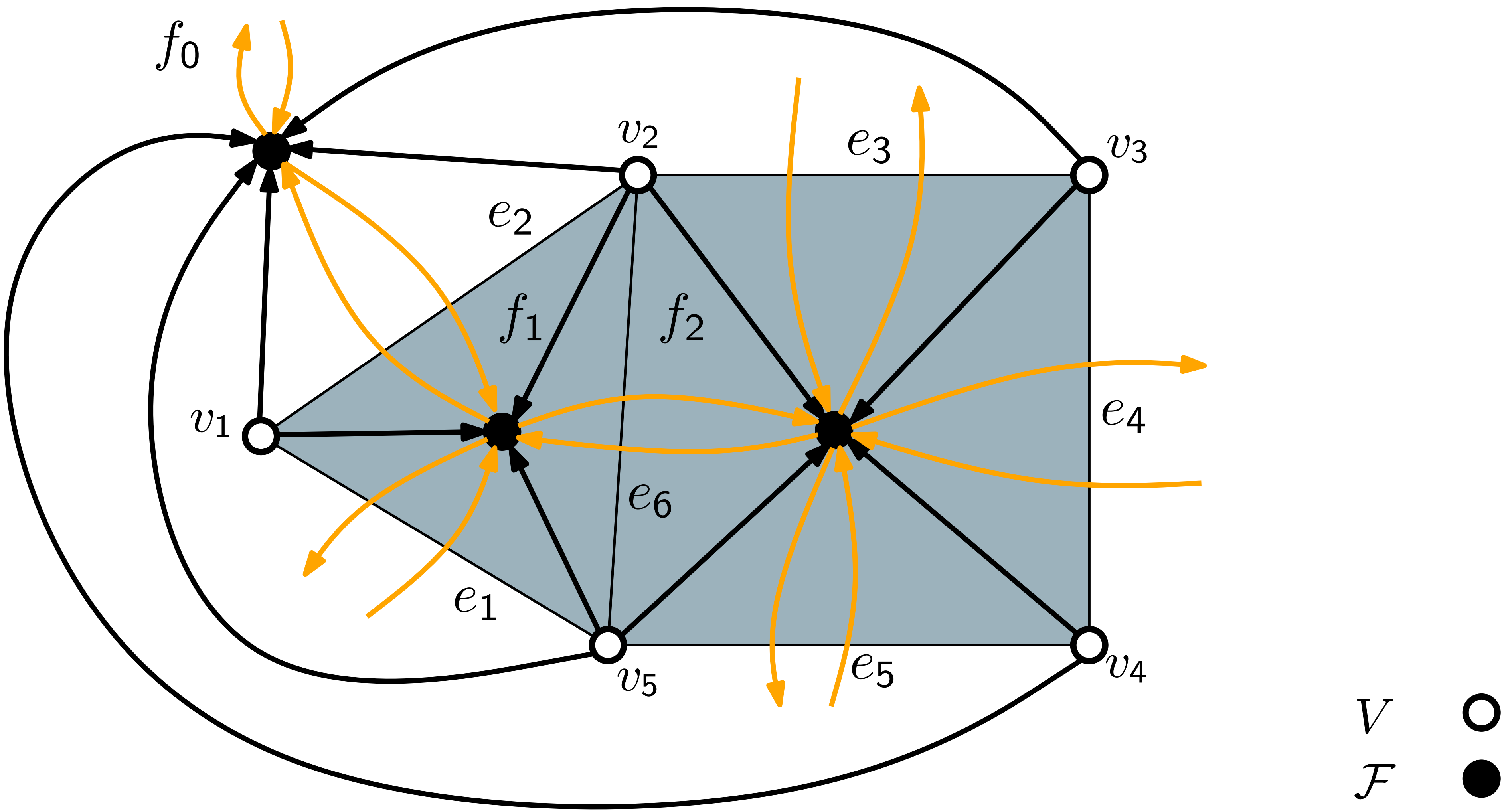
Beispiel Flussnetzwerk



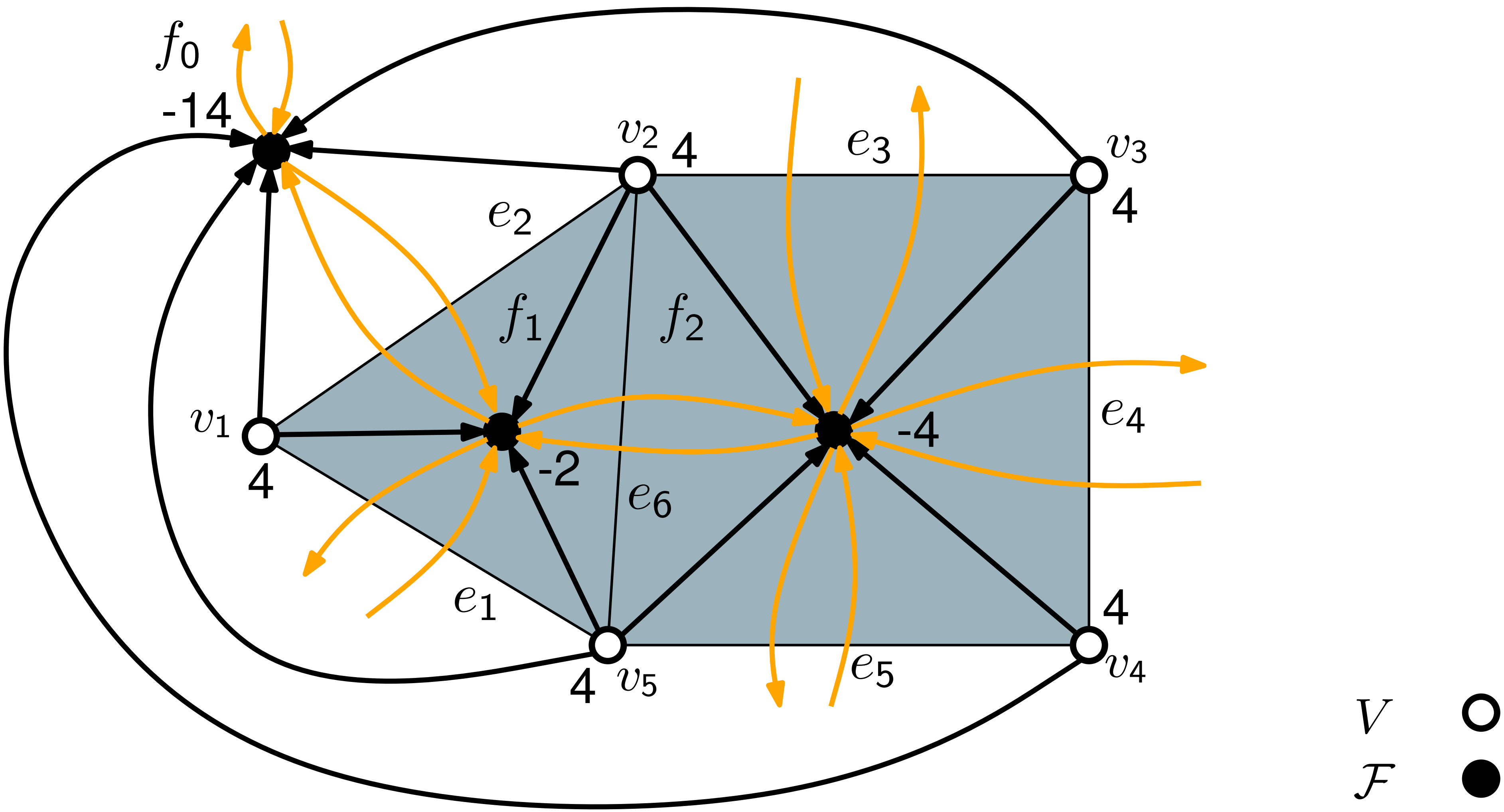
Beispiel Flussnetzwerk



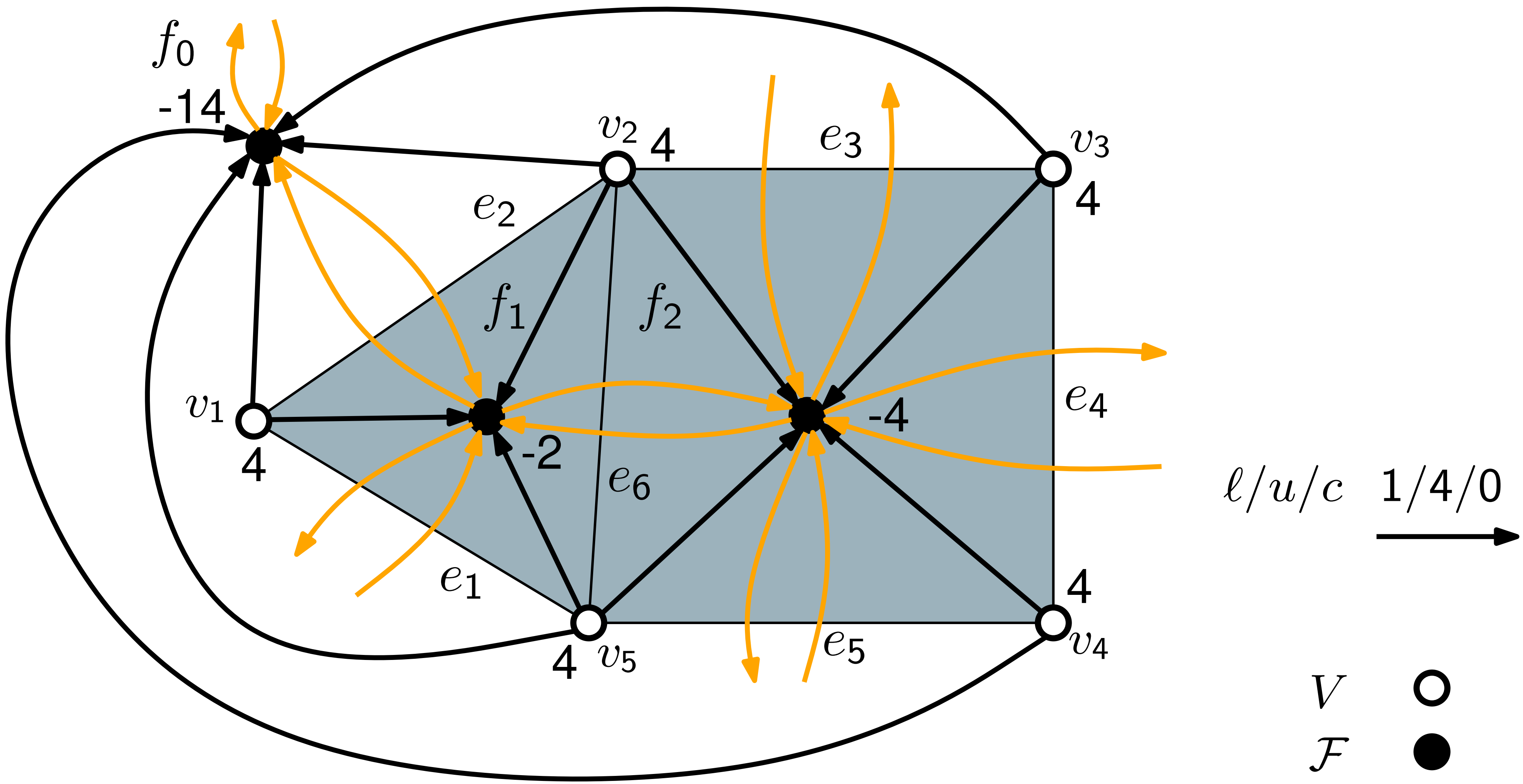
Beispiel Flussnetzwerk



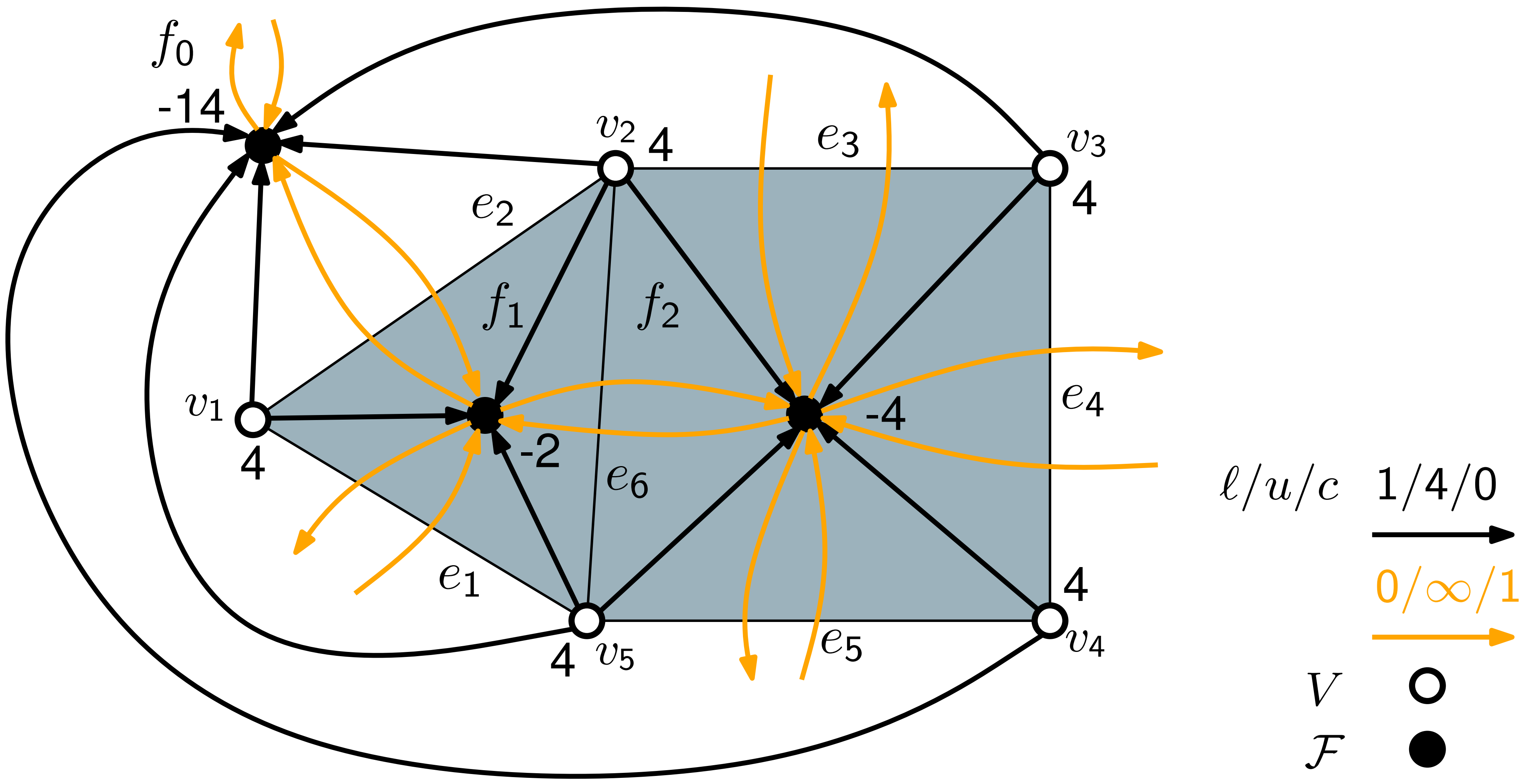
Beispiel Flussnetzwerk



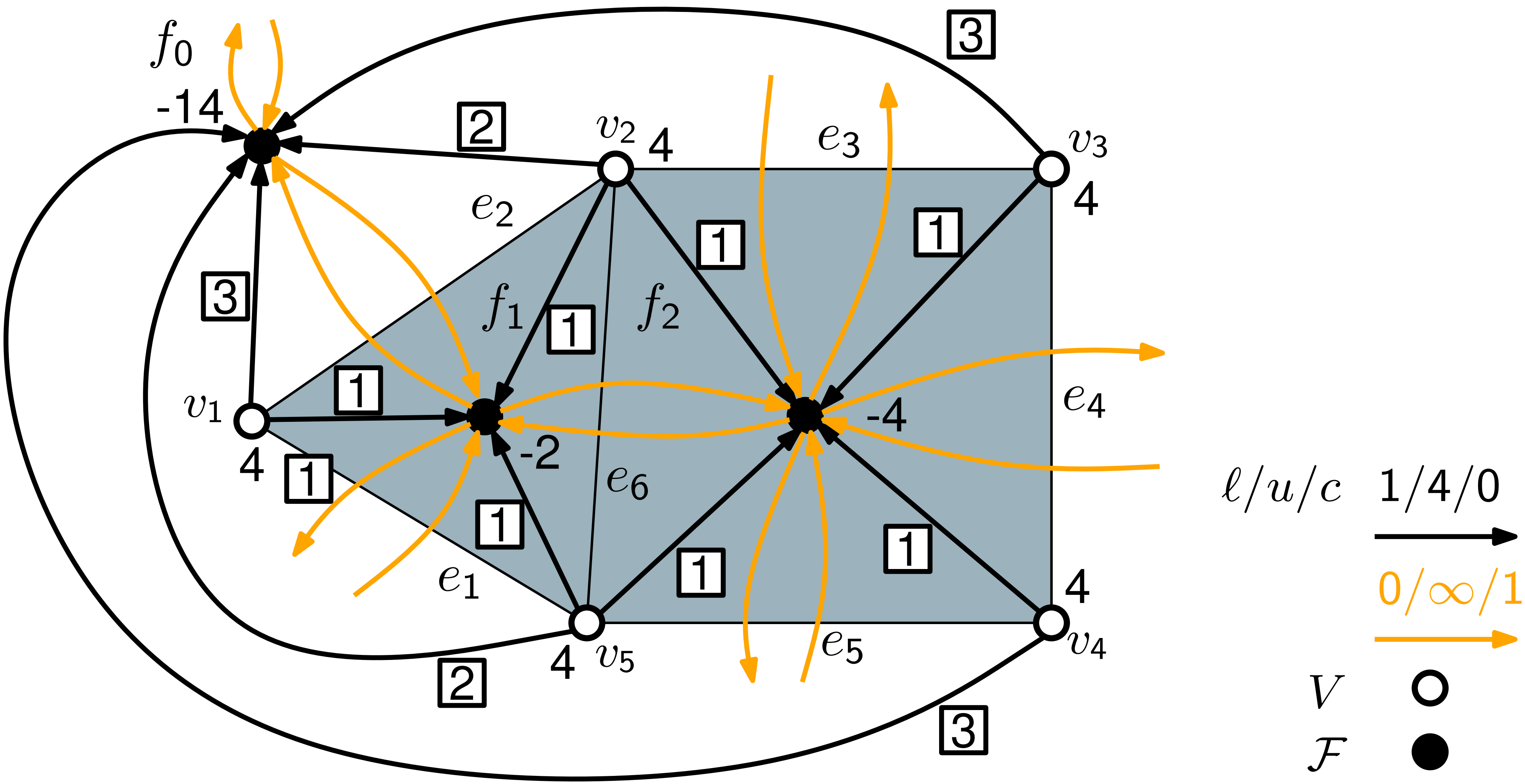
Beispiel Flussnetzwerk



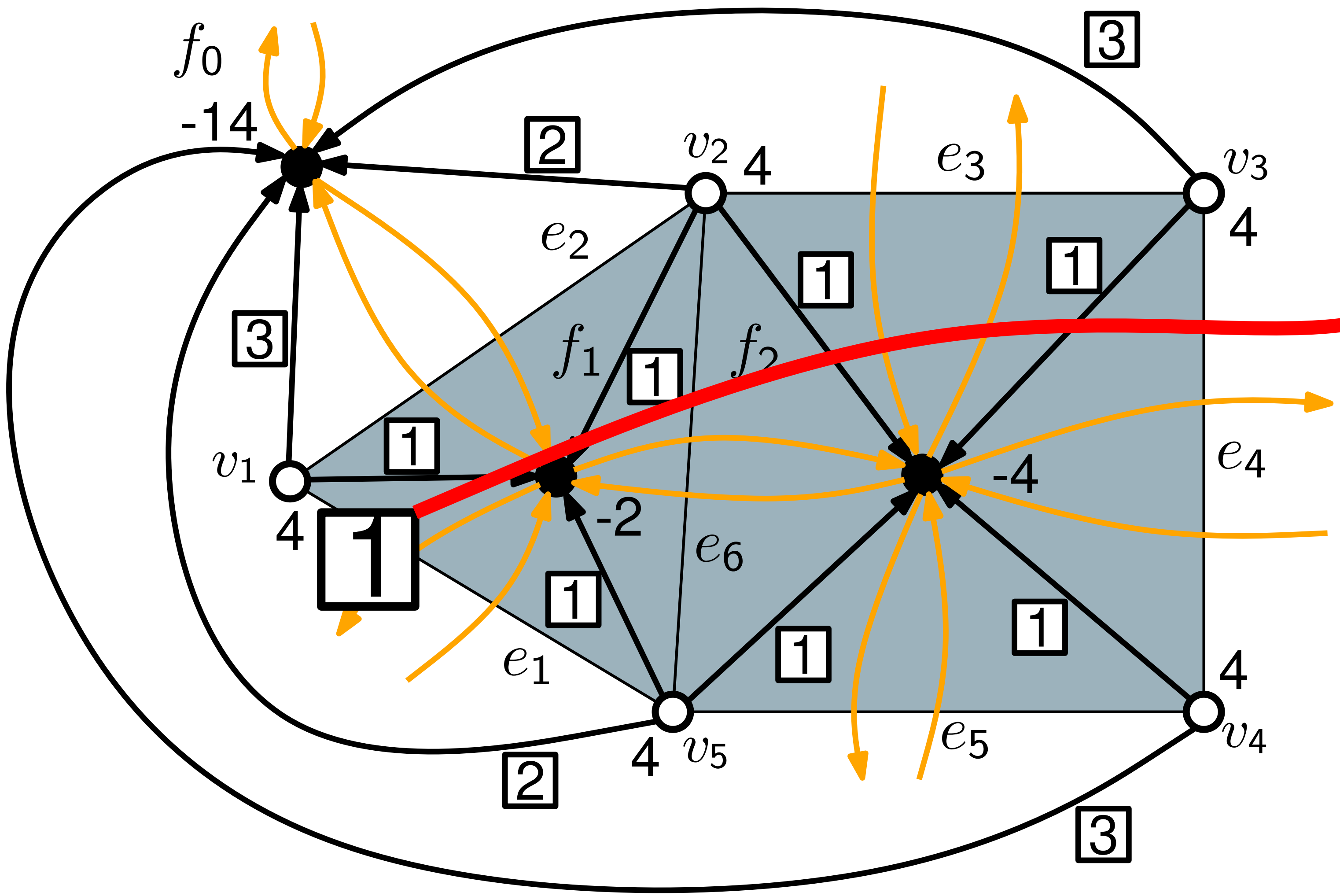
Beispiel Flussnetzwerk



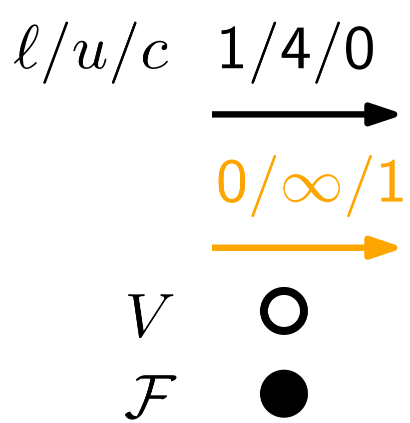
Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



cost = 1
Knick!
(nach außen)



Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

Kernaussage + Korrektheit

Karlsruhe Institute of Technology

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}, f_0$ $\surd$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}, f_0$ $\surd$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H3) Winkelsumme an f: $b(f)$ ohne gestreckte Winkel $= 4$ $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung $\surd$

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kernaussage + Korrektheit

Satz

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

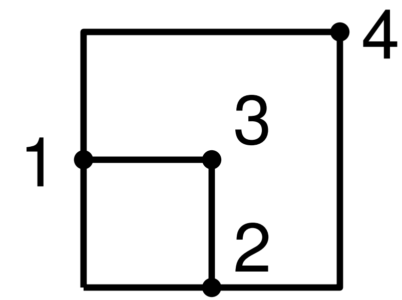
(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung $\surd$

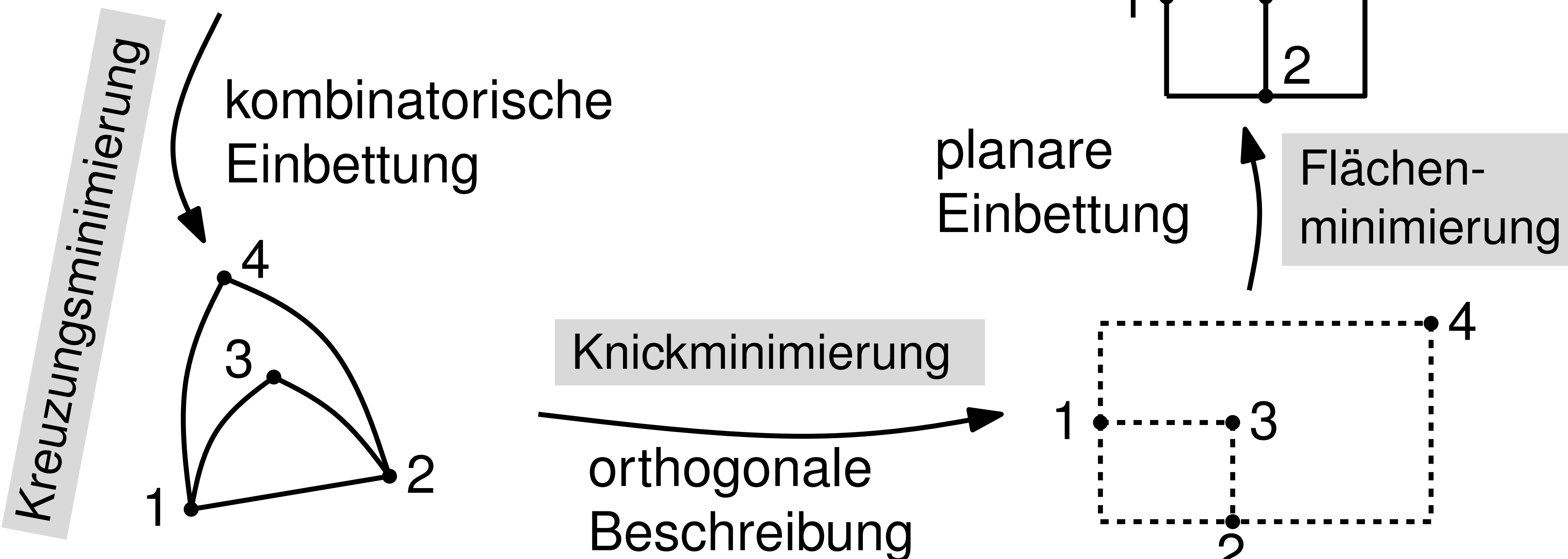
(N4) Kosten = k $\surd$

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$E = \{\ V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$

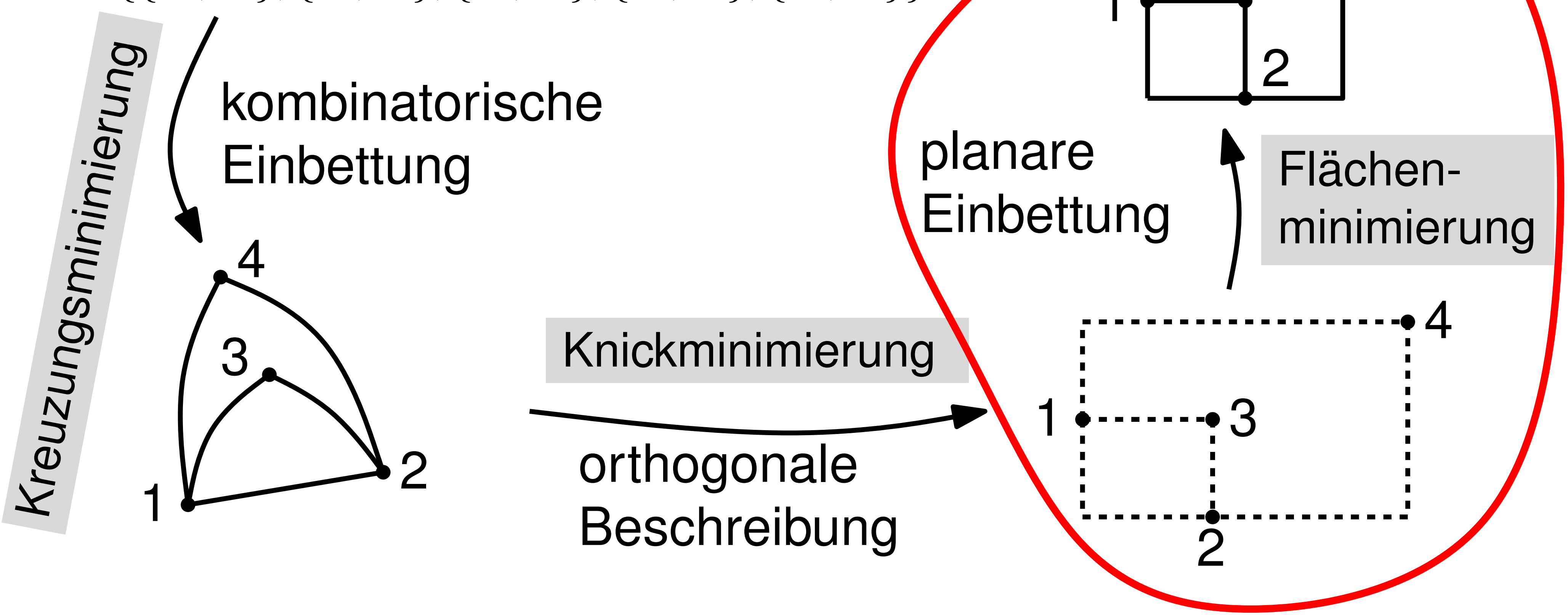




(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$$E = \{\ V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$



Kompaktierung

Problem: Kompaktes Layout zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben ein planerer Graph $G = (V, E)$ mit $\deg_{\max} \leq 4$ und eine orthogonale Beschreibung $H(G)$. Finde ein orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert.

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kompaktierung

Problem: Kompaktes Layout zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben ein planerer Graph $G = (V, E)$ mit $\deg_{\max} \leq 4$ und eine orthogonale Beschreibung $H(G)$. Finde ein orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\Rightarrow$: erlaubt Garantien:

- minimale Gesamtkantenlänge
- minimale Fläche

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kompaktierung

Problem: Kompaktes Layout zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben ein planerer Graph $G = (V, E)$ mit $\text{deg}_{\text{max}} \leq 4$ und eine orthogonale Beschreibung $H(G)$. Finde ein orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\Rightarrow$: erlaubt Garantien:

- minimale Gesamtkantenlänge
- minimale Fläche

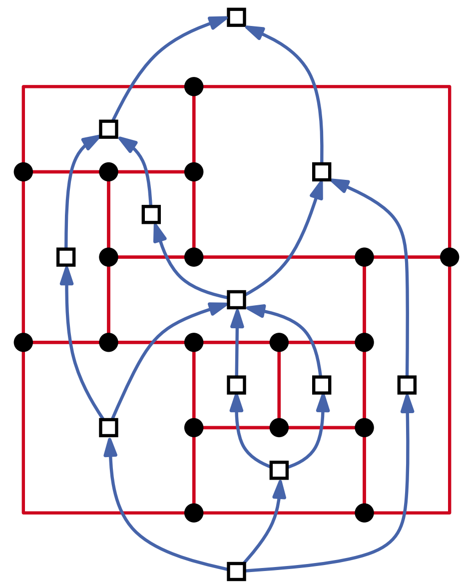
- Knicke sind außen
- gegenüberliegende Seiten gleich lang $\Rightarrow$ Layout ok

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((W_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); \ell; u; b; \text{cost})$

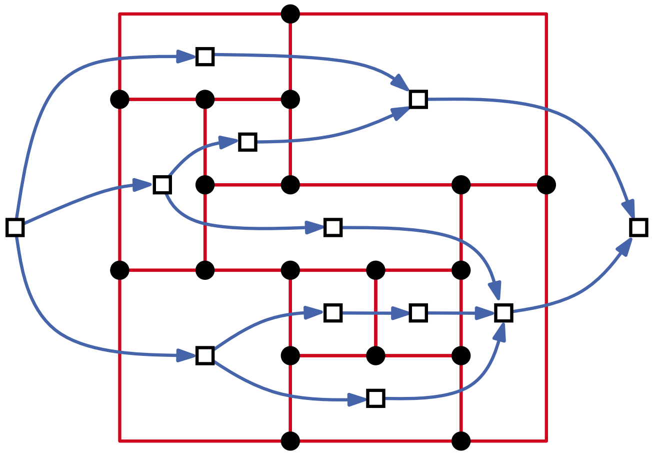
- $W_{\text{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $\ell(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{hor}}$



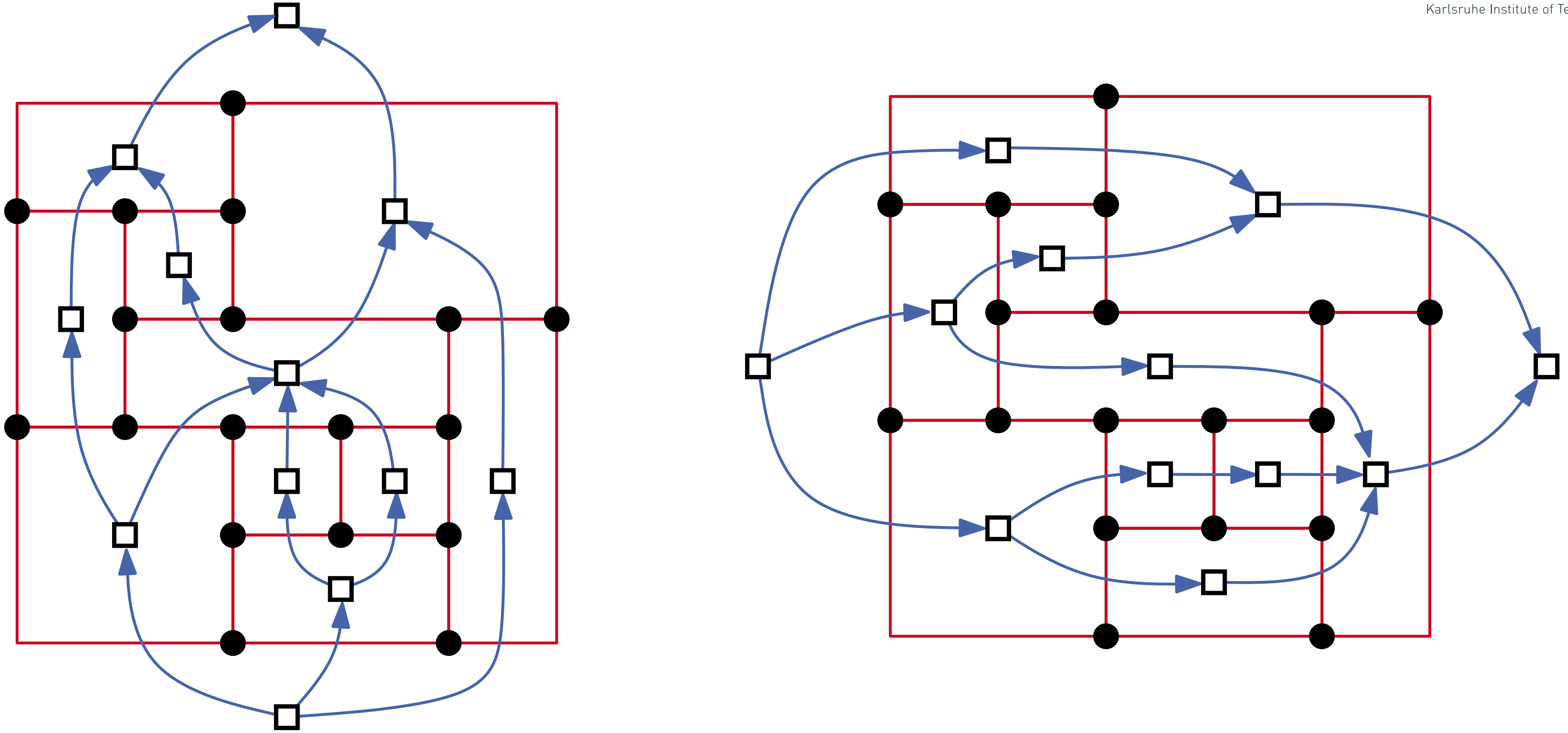
Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{ver}} = ((W_{\text{ver}}, A_{\text{ver}}); \ell; u; b; \text{cost})$

- $W_{\text{ver}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{ver}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und f liegt links von $g\}$
- $\ell(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{ver}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{ver}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{ver}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{ver}}$



Optimal bei Rechtecken

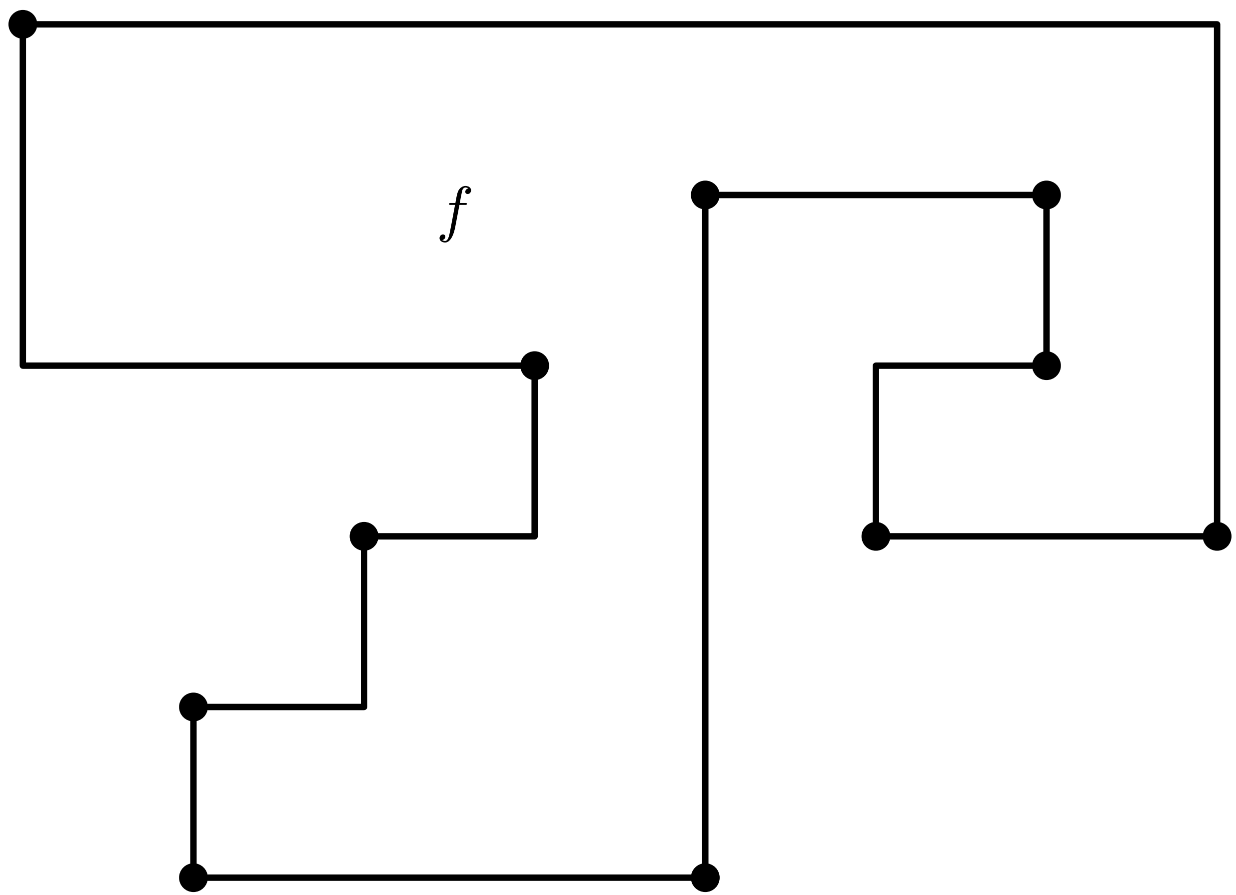


Satz

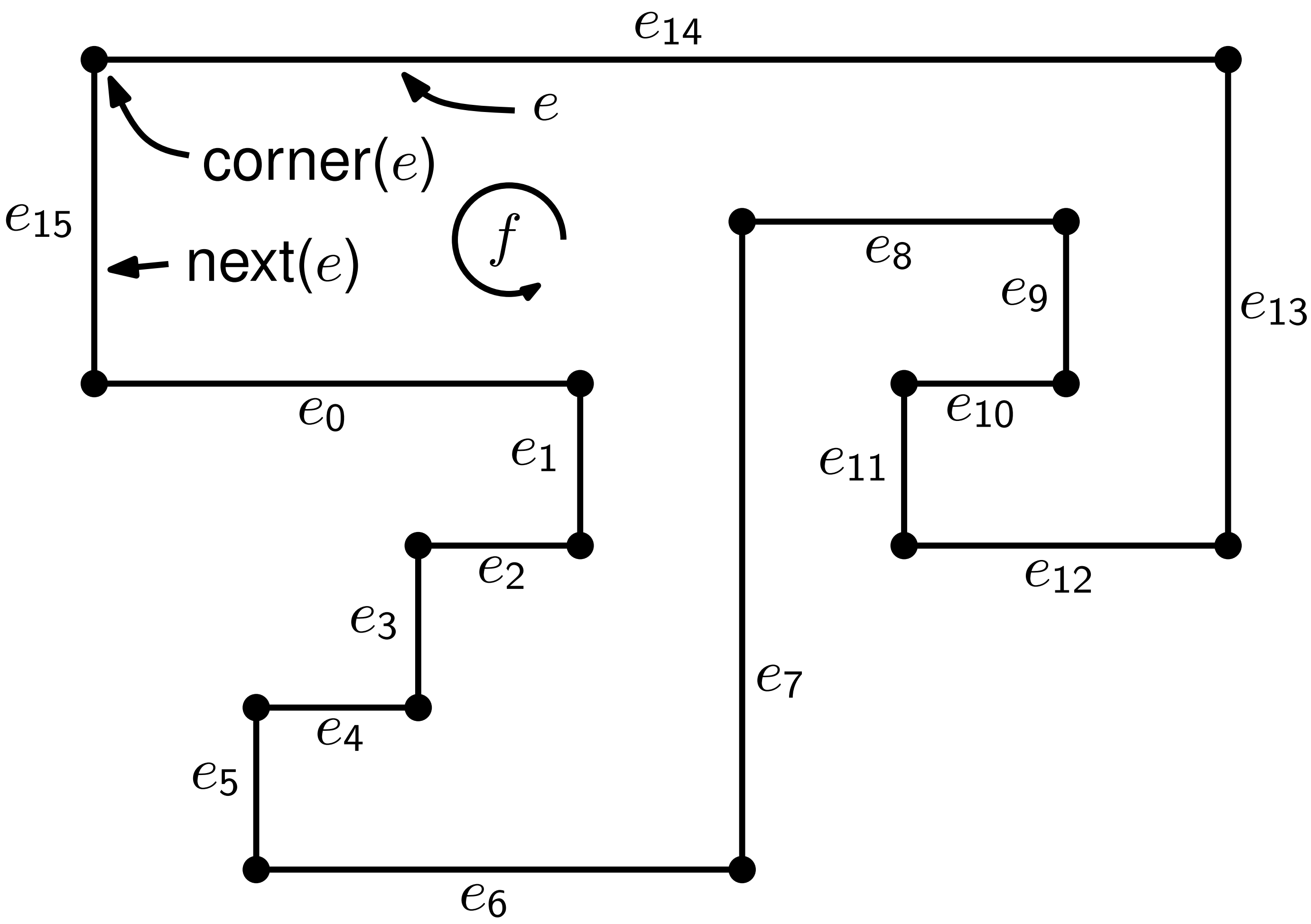
Lösung für Min-Cost Flüsse für N_{hor} und N_{vert} liefert:

1. x Fluss $\Leftrightarrow$ entspr. Kantenlängen induzieren Layout
2. $|x(N_{\text{hor}})| =$Höhe, $|x(N_{\text{ver}})| =$Breite
3. $\text{cost}(x(N_{\text{hor}})) + \text{cost}(x(N_{\text{ver}})) =$ Gesamtkantenlänge

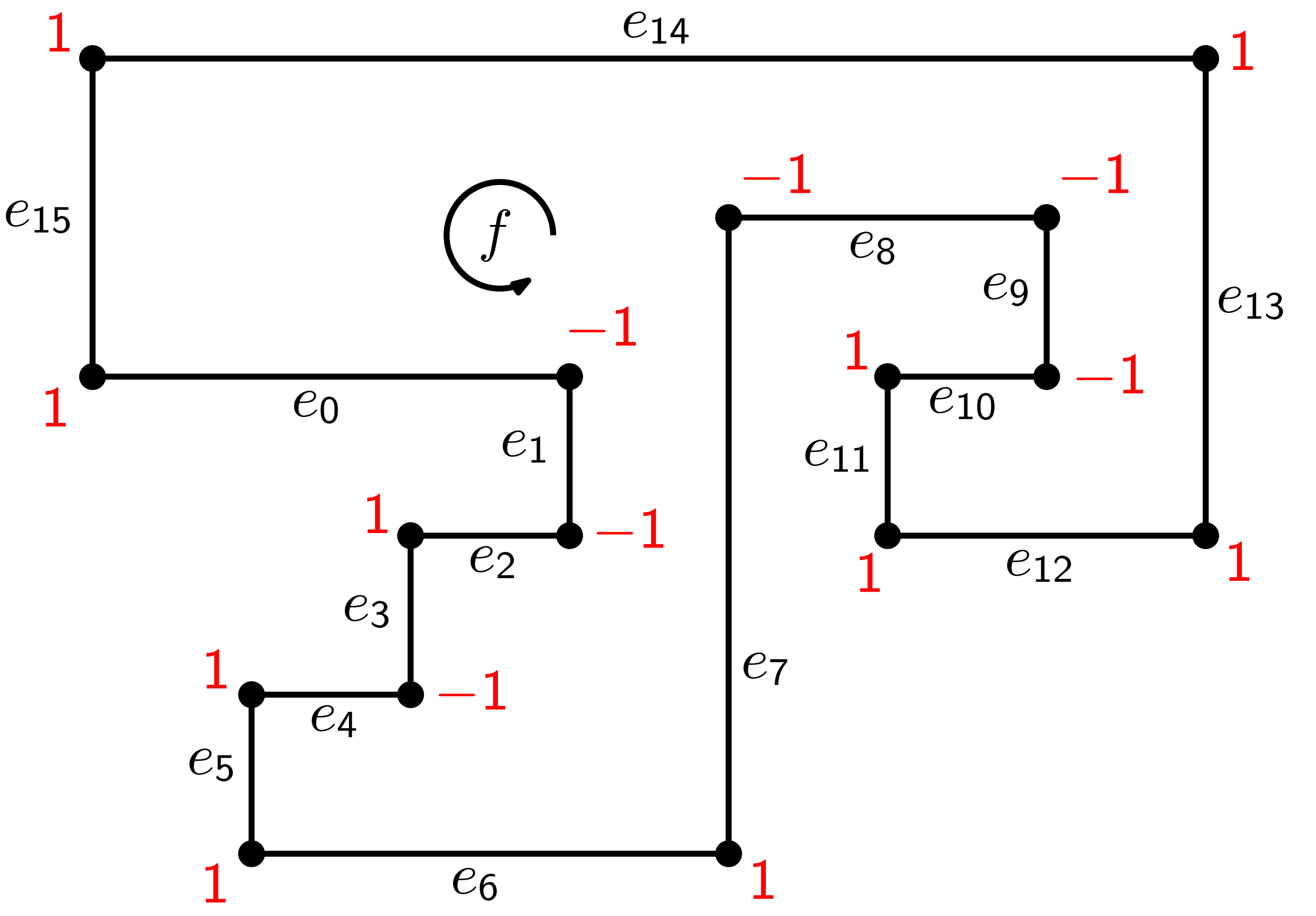
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



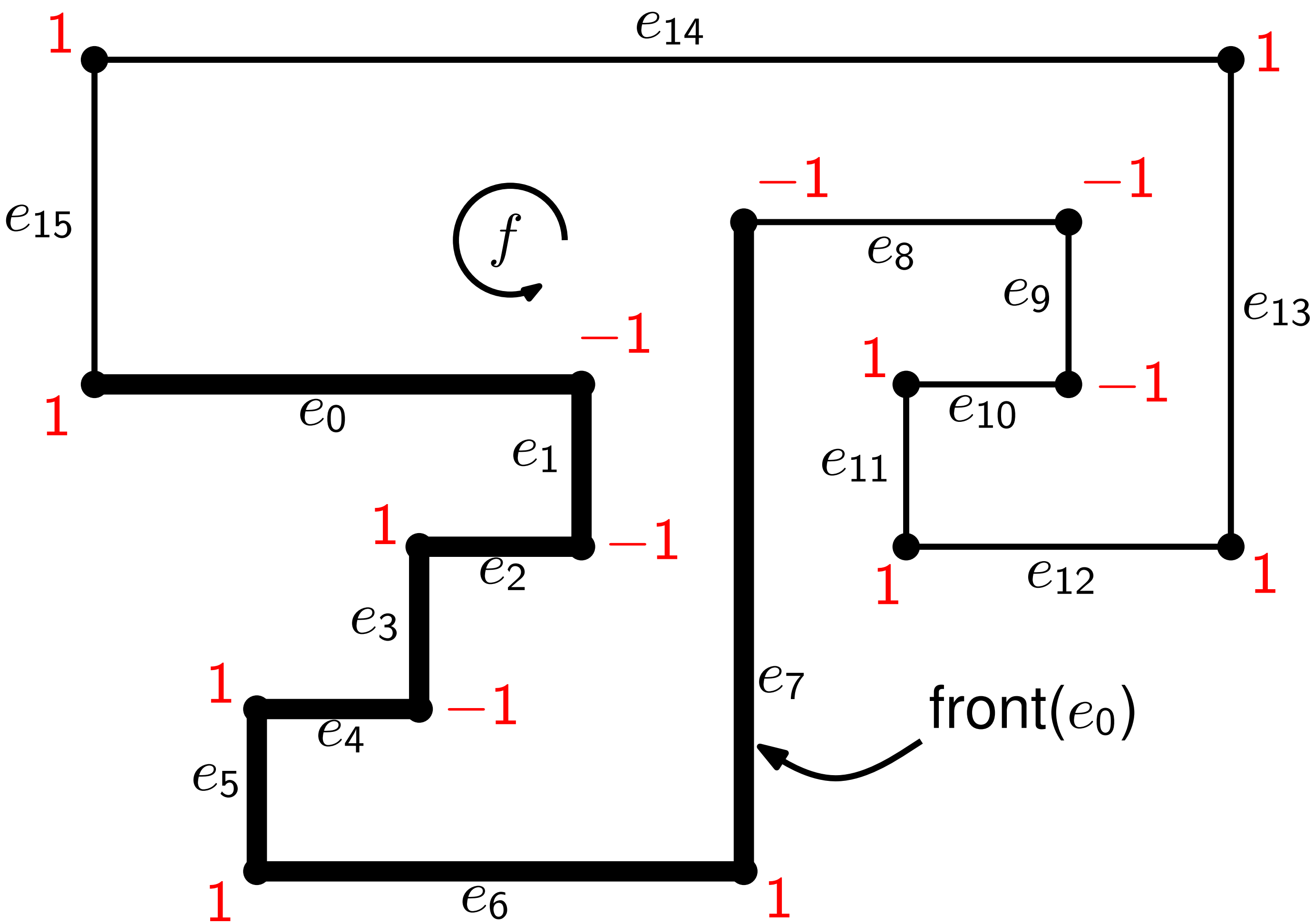
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



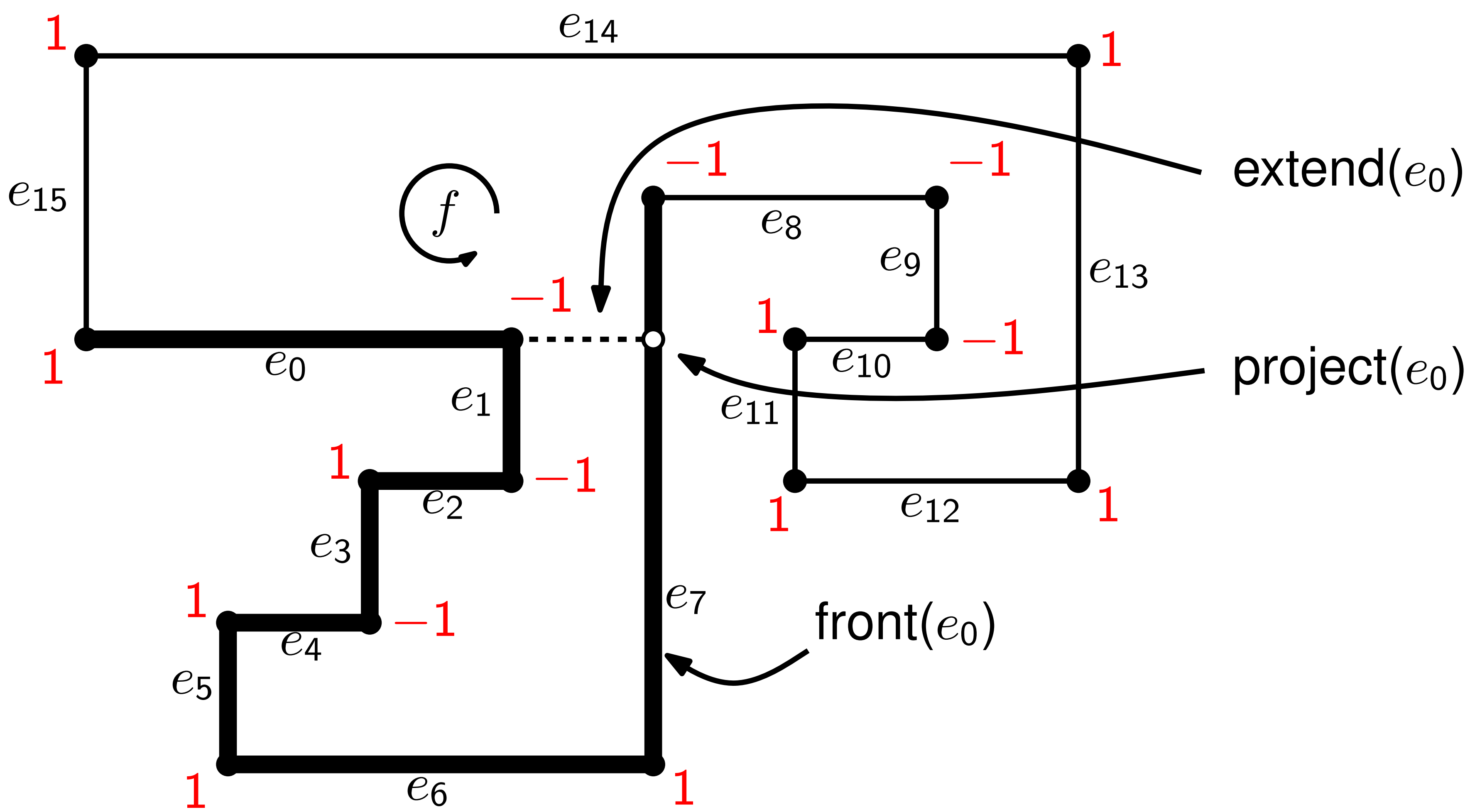
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



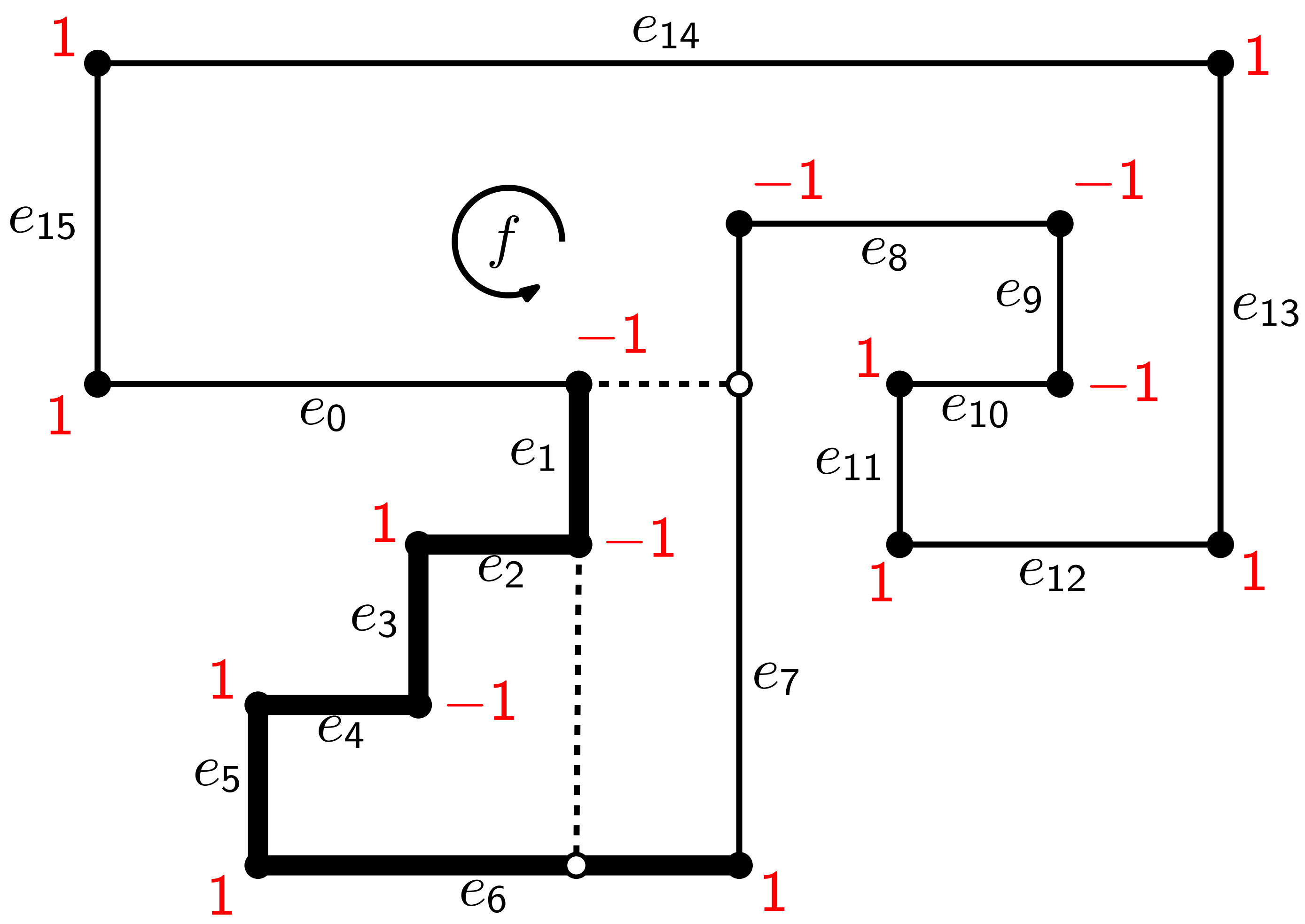
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



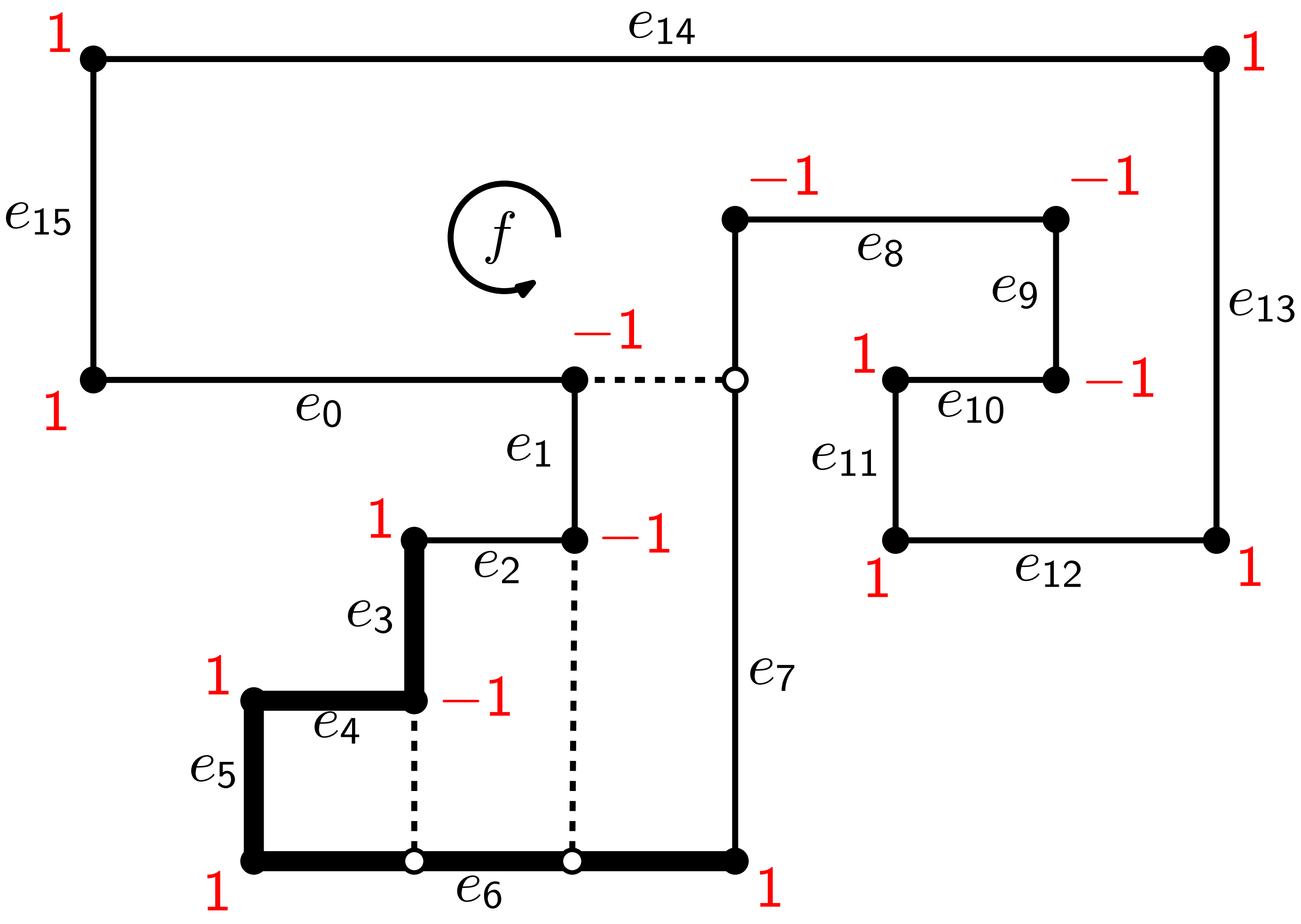
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



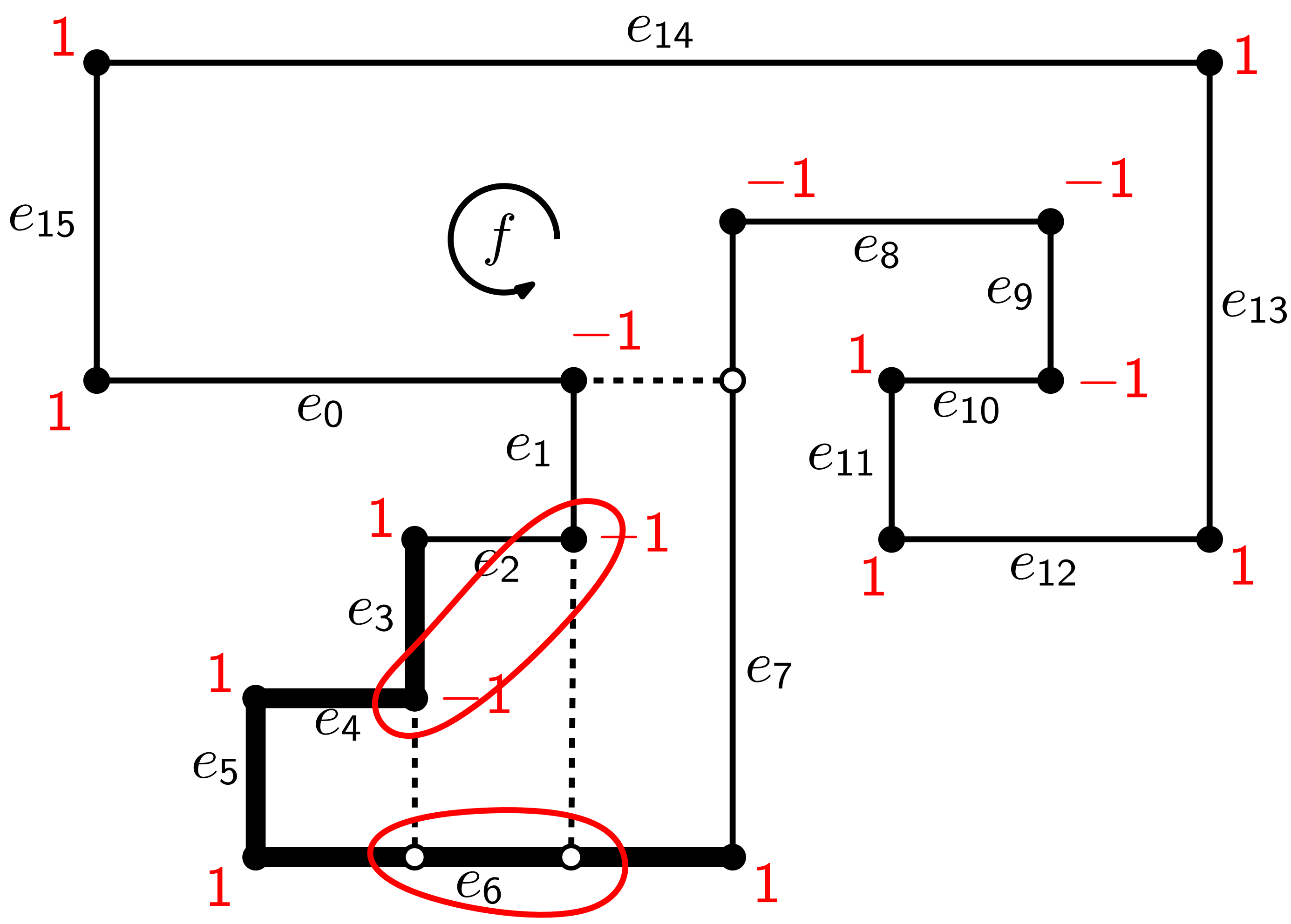
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



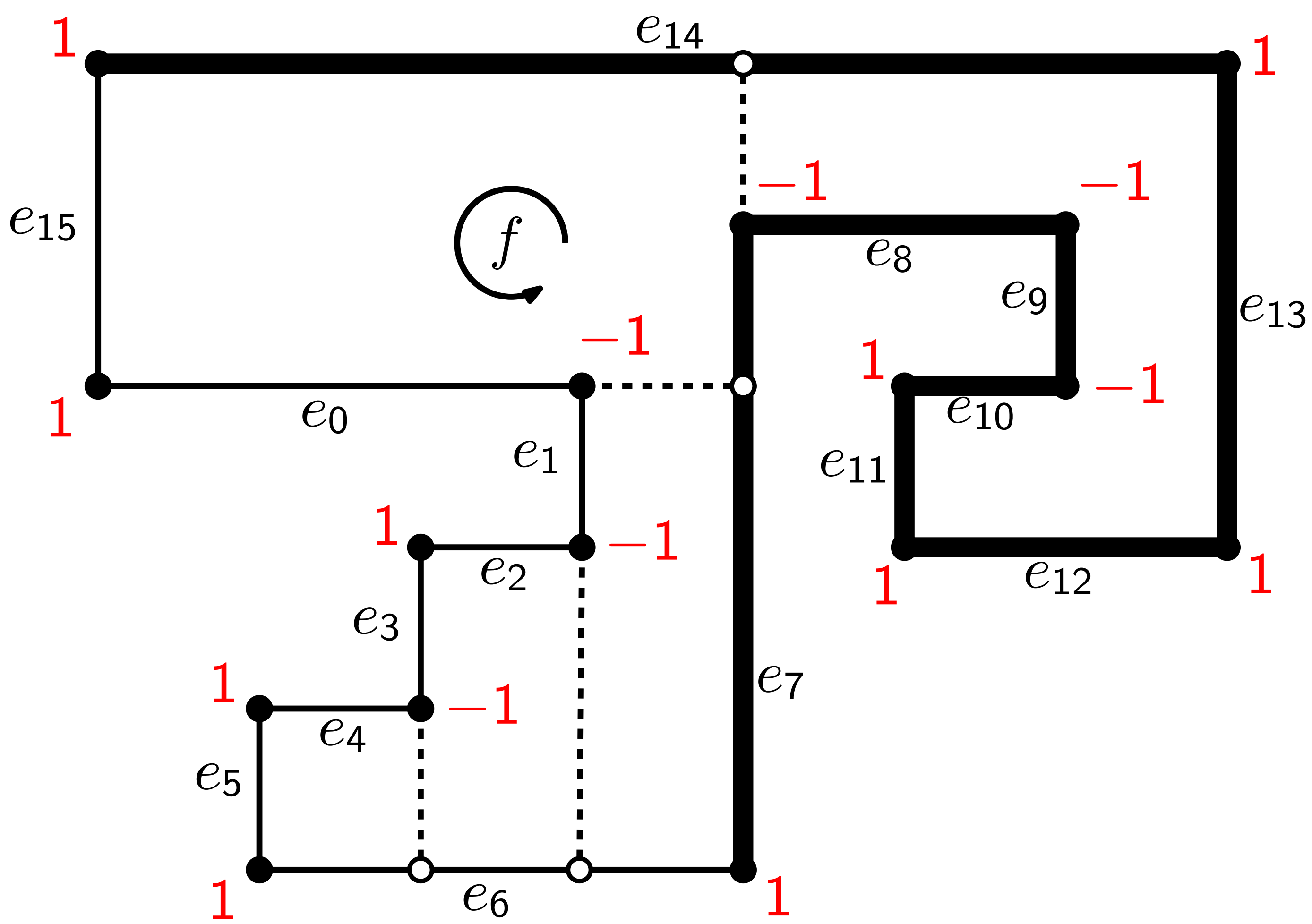
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



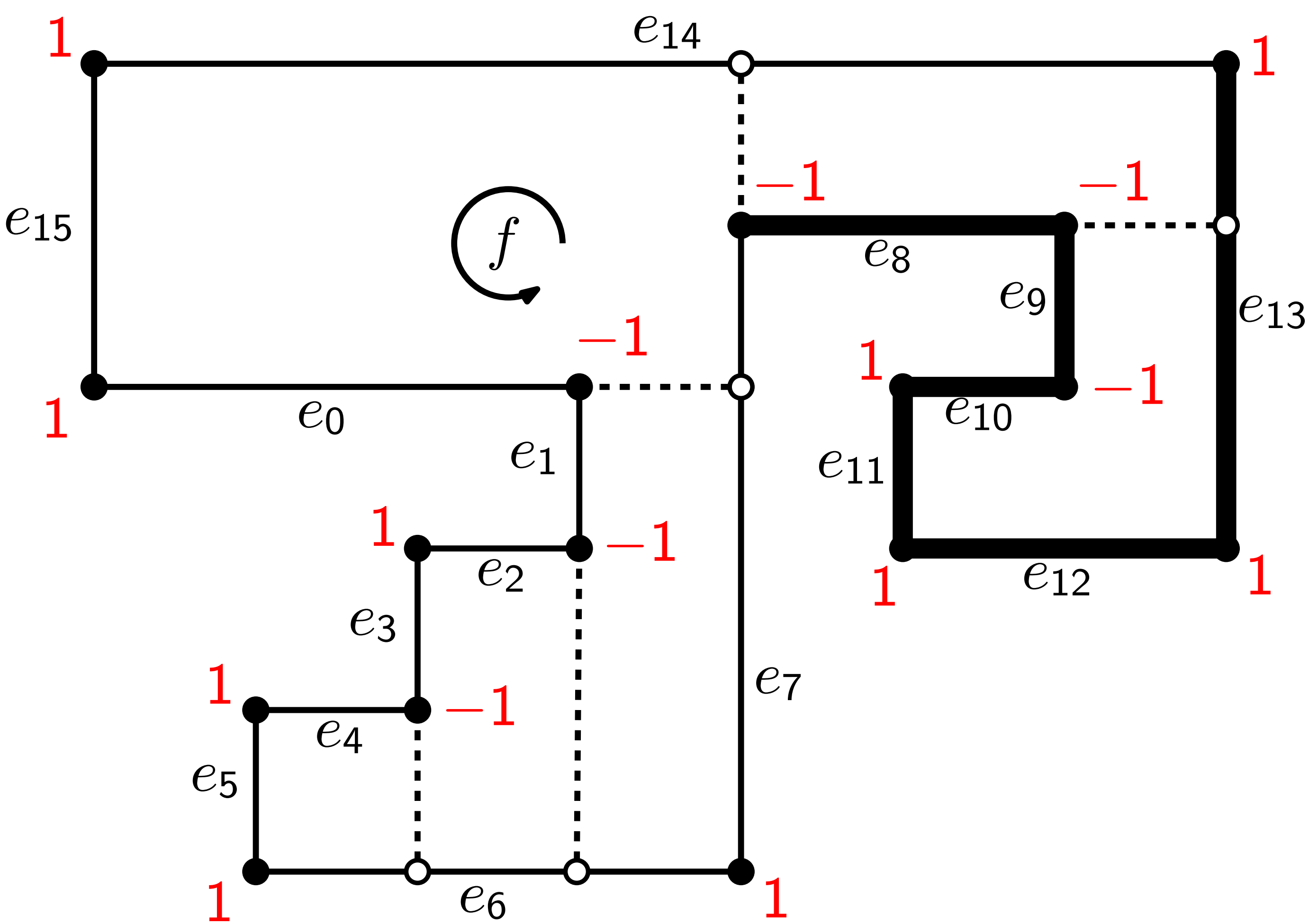
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



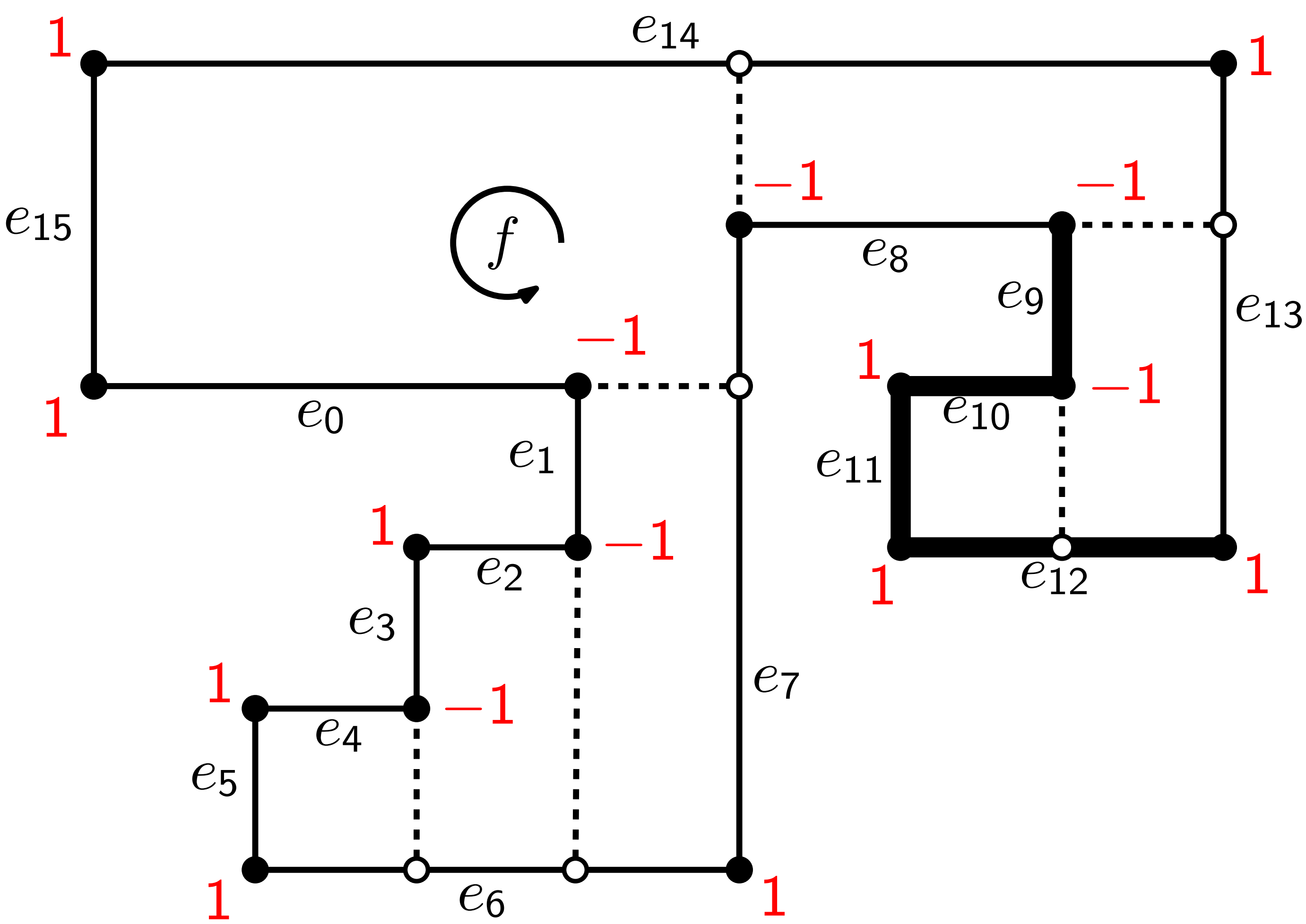
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



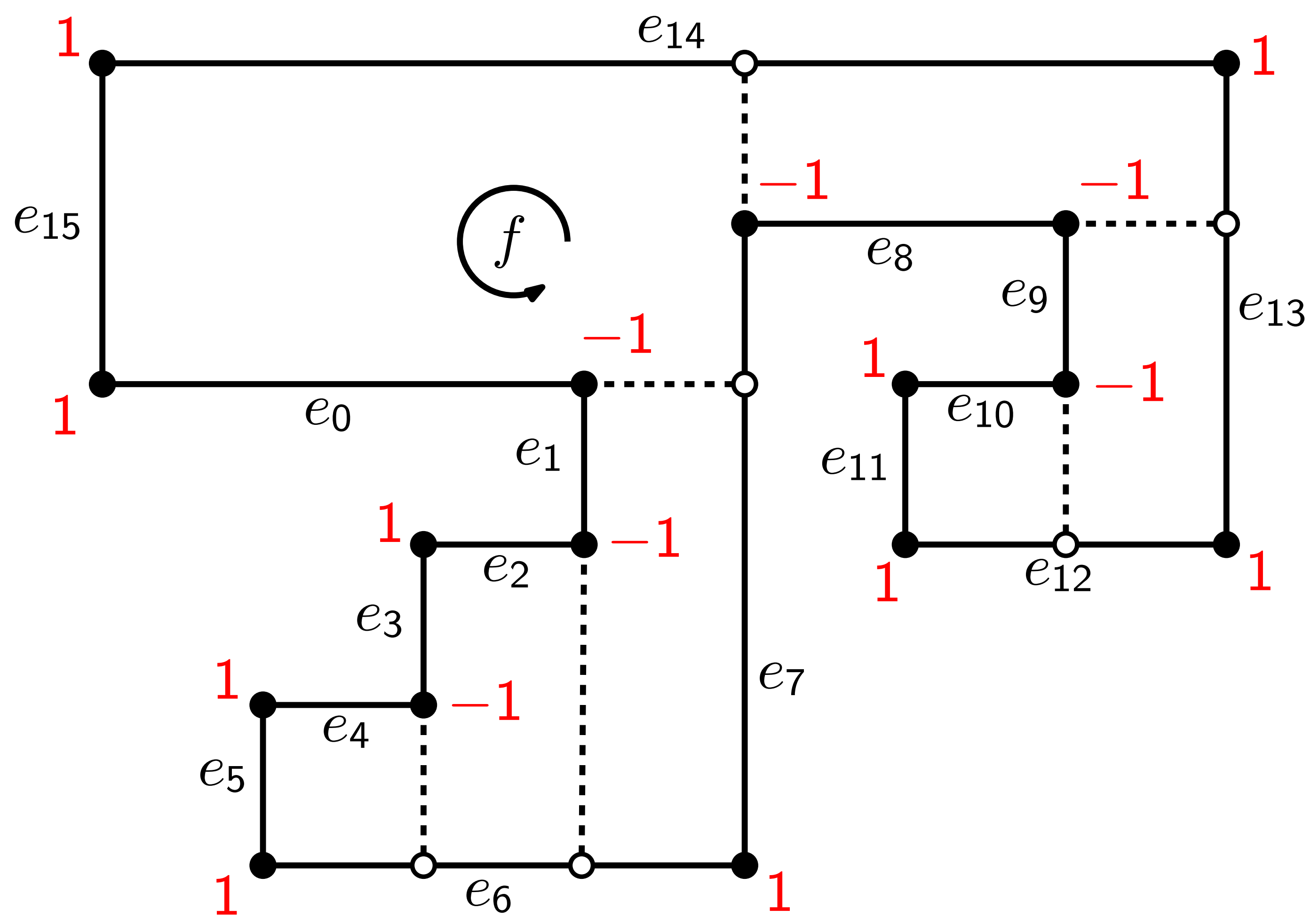
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



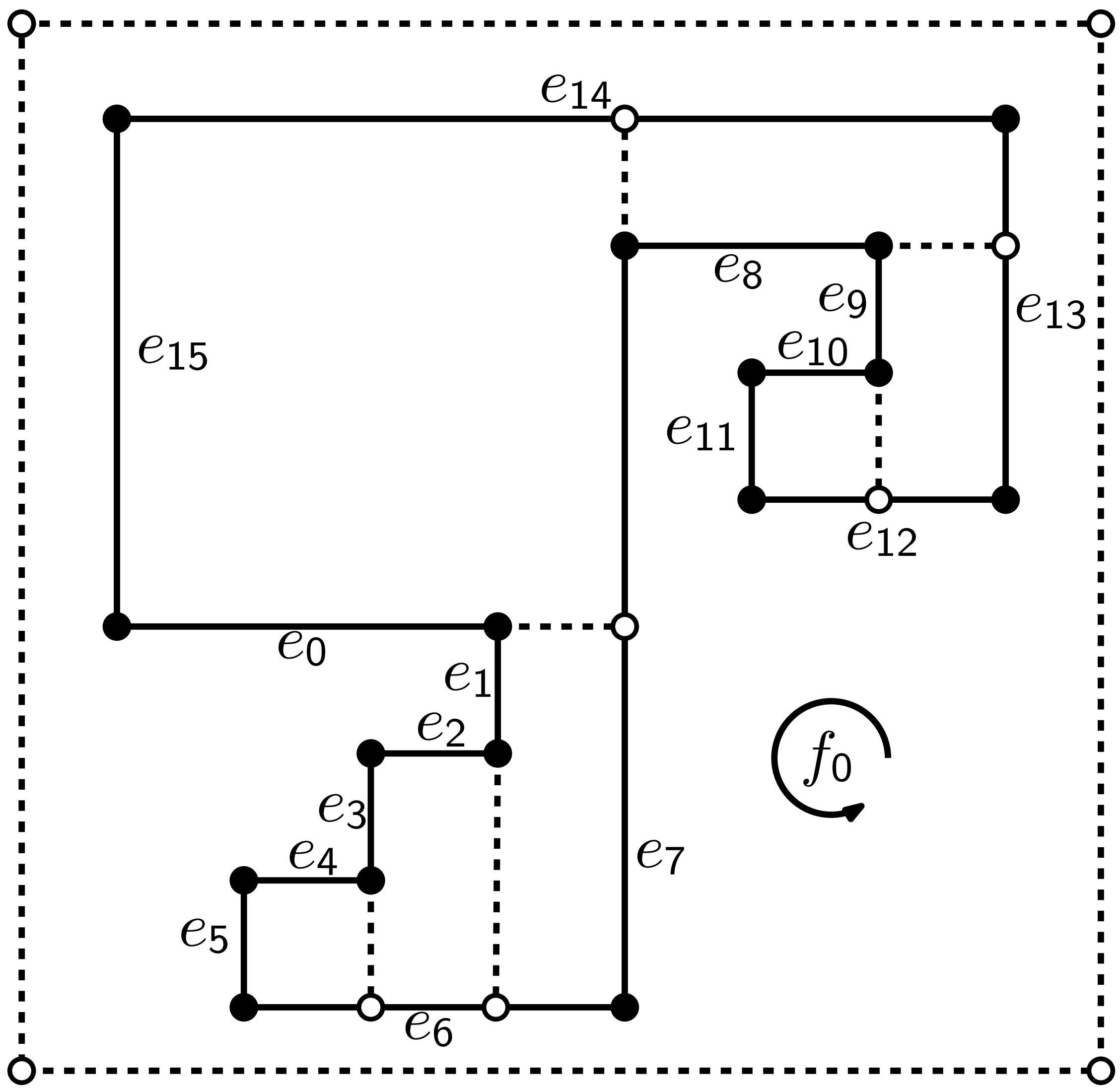
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



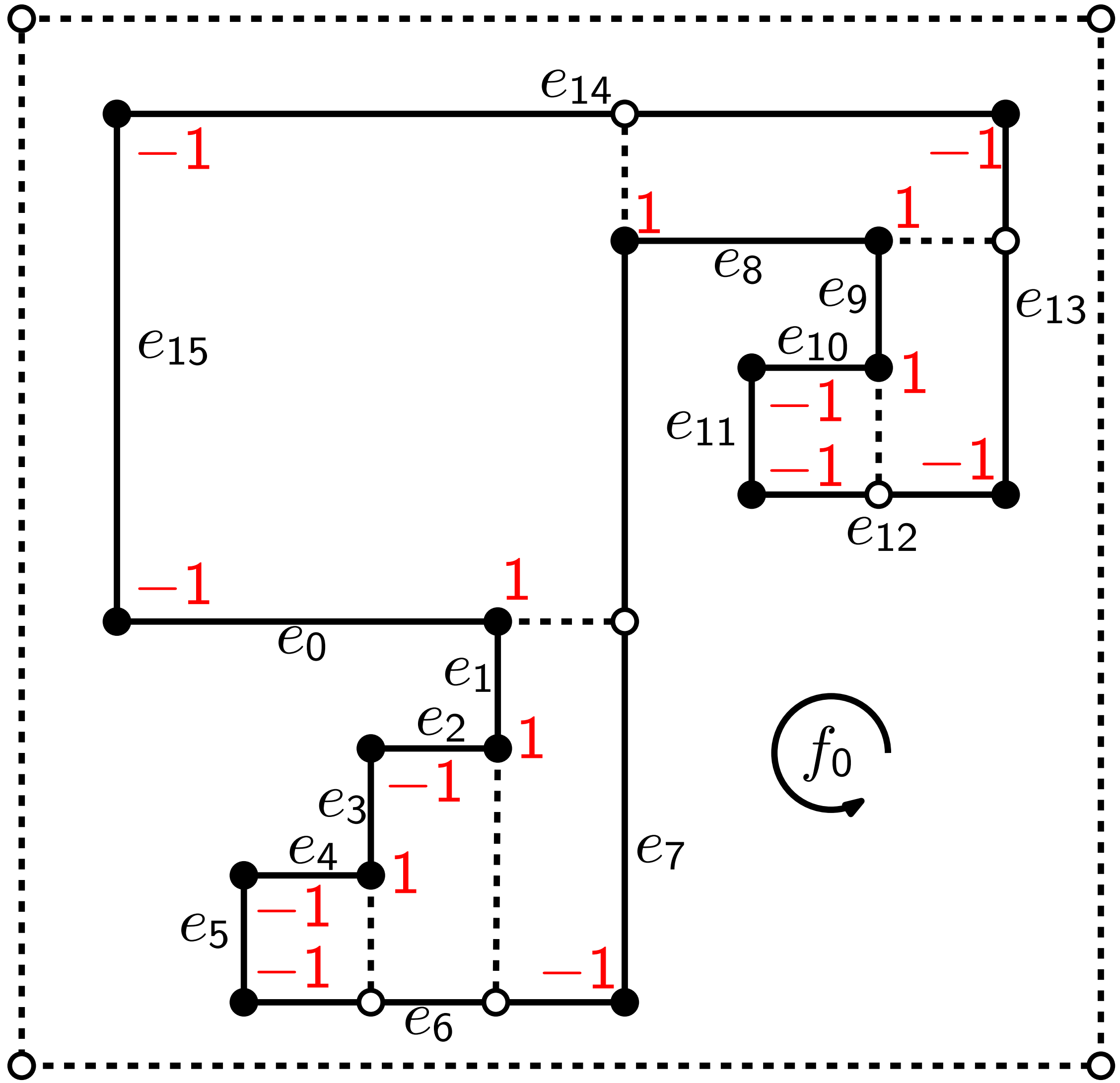
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



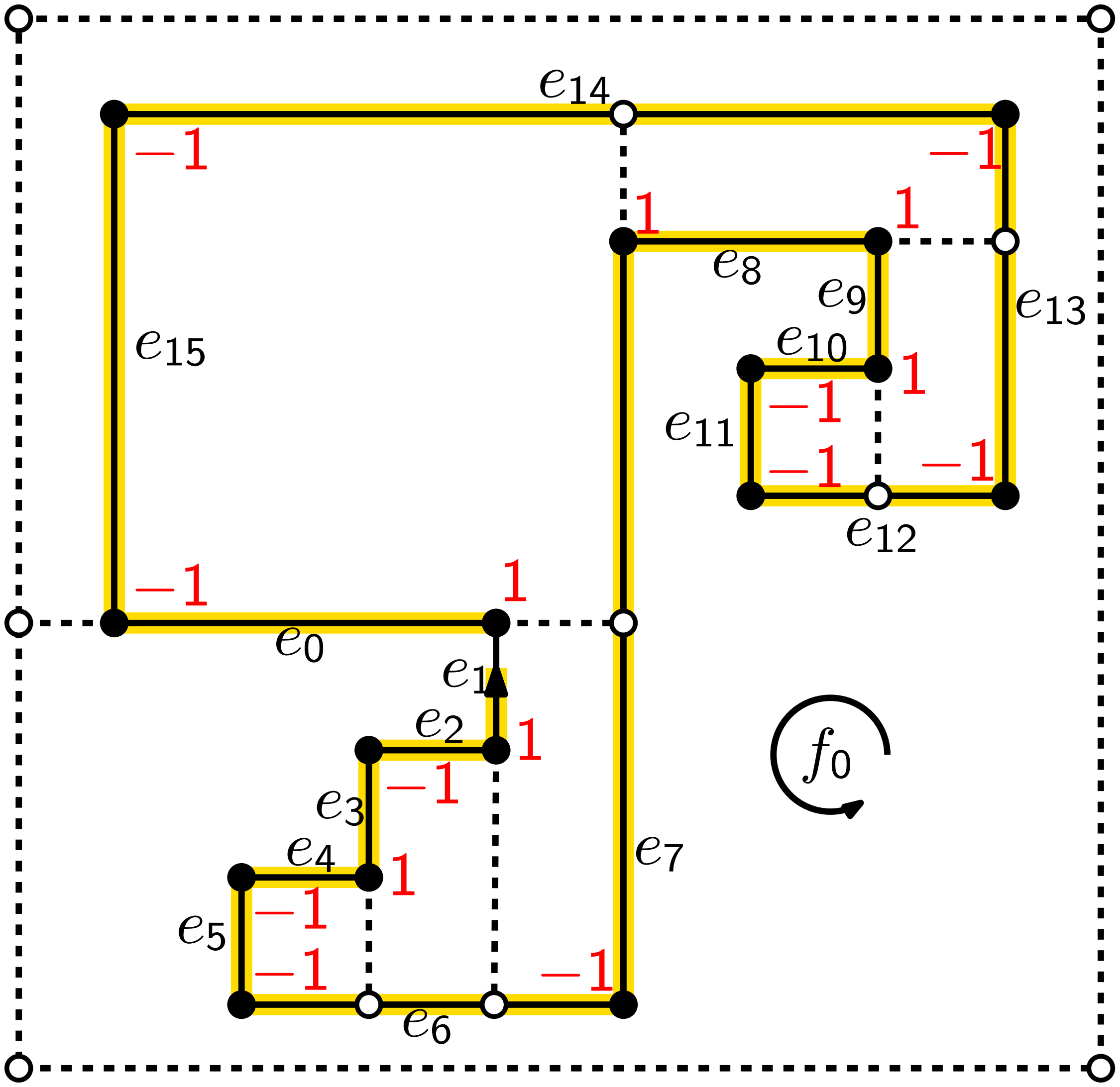
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



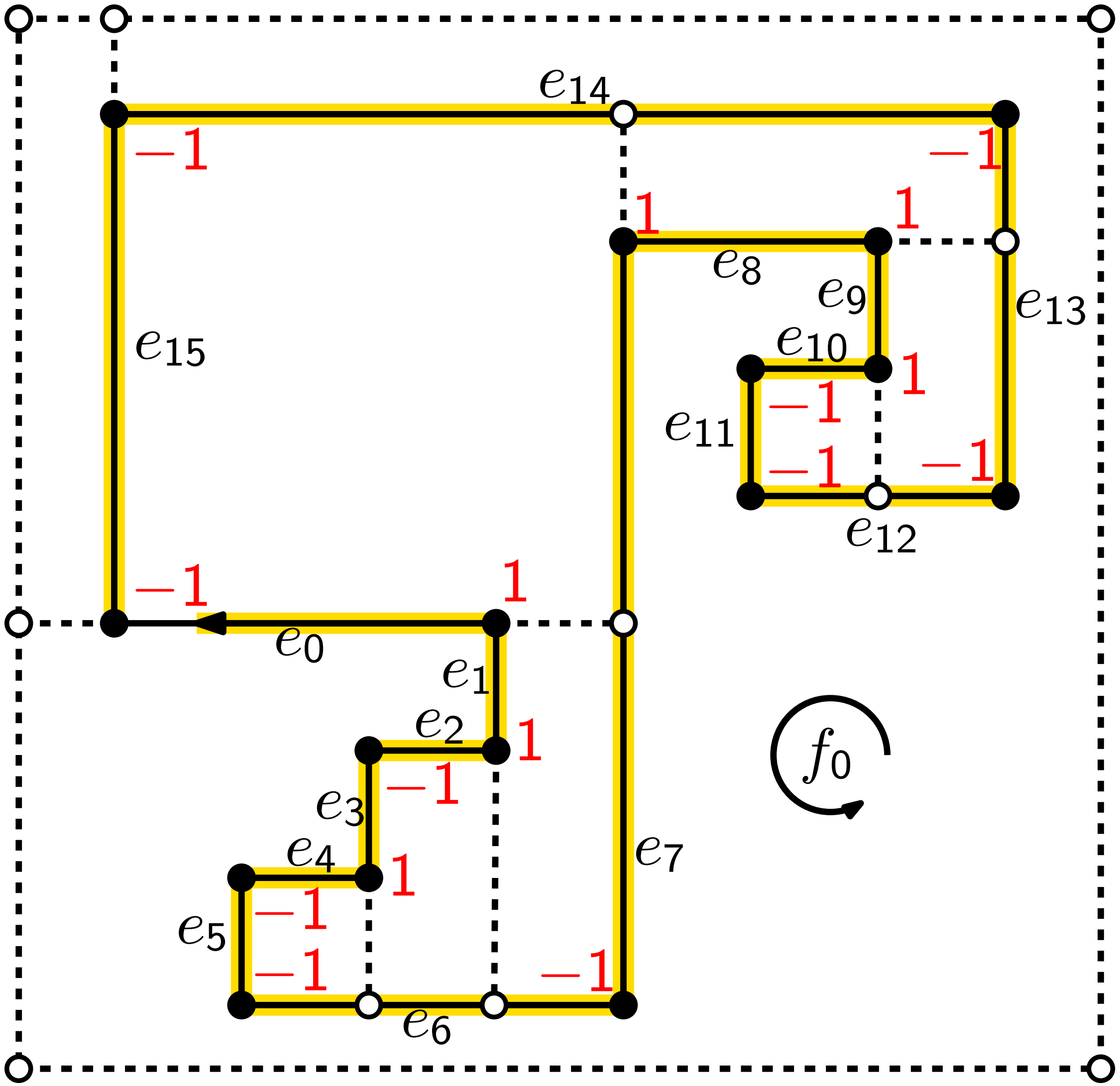
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



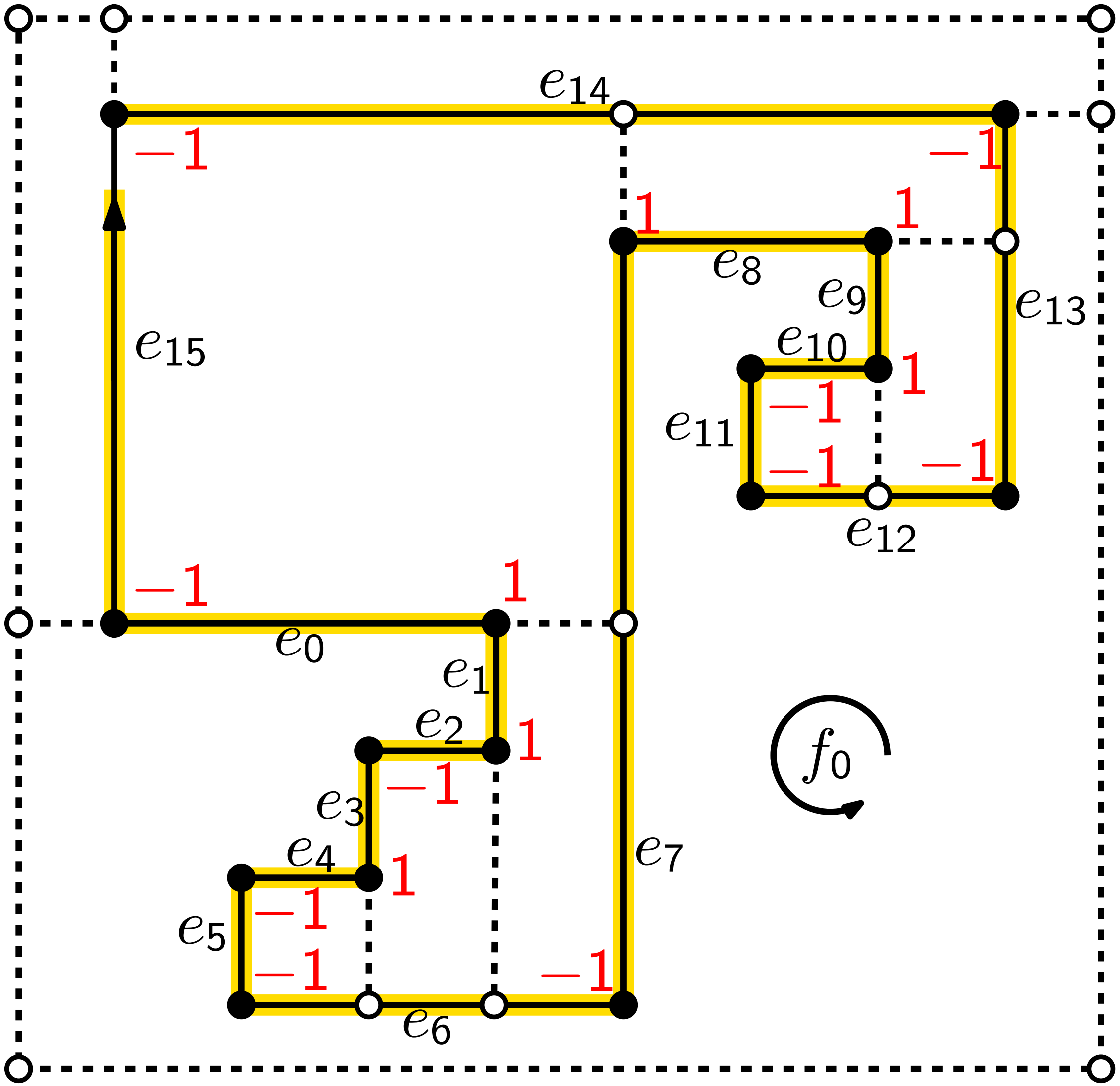
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



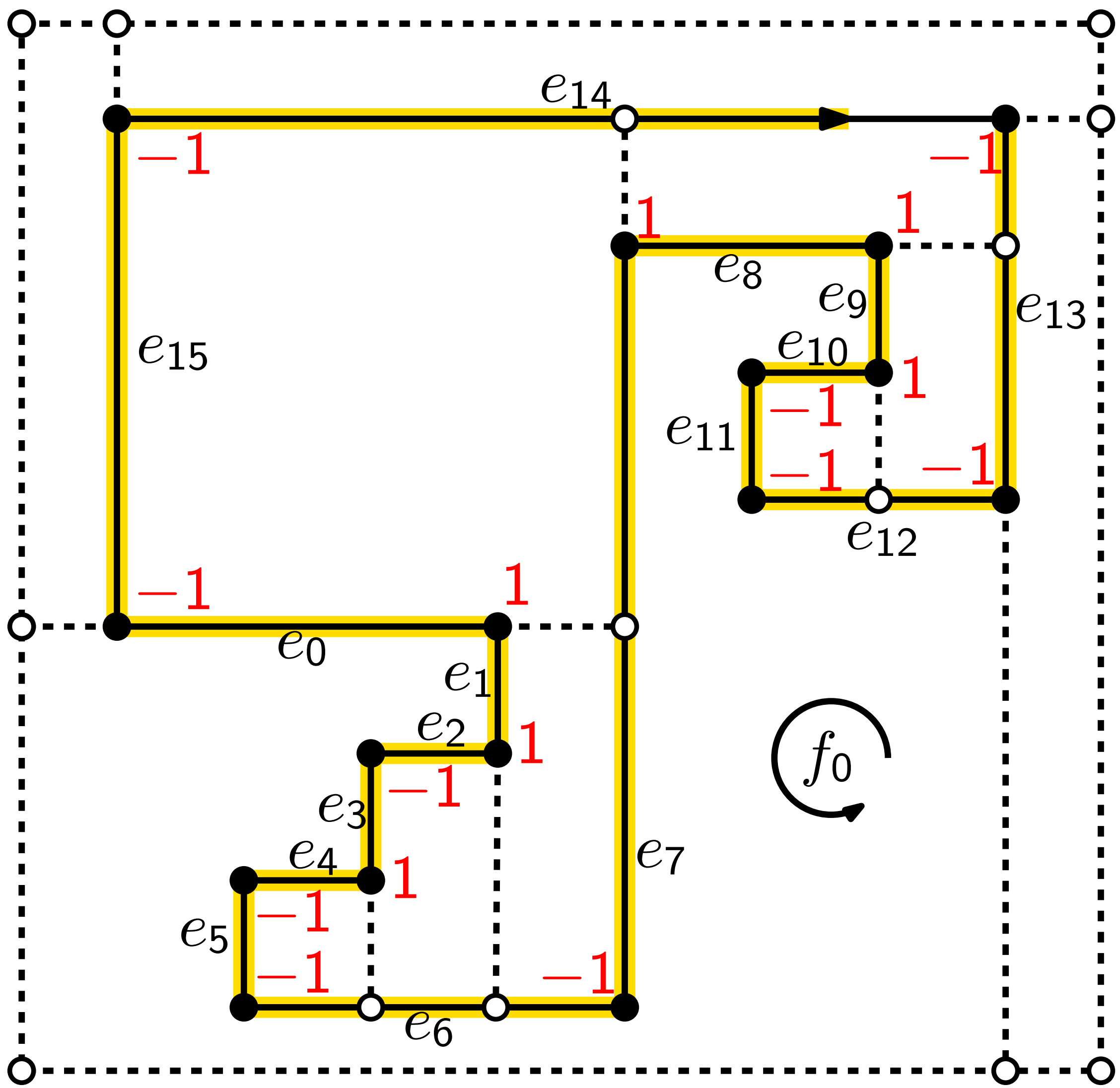
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



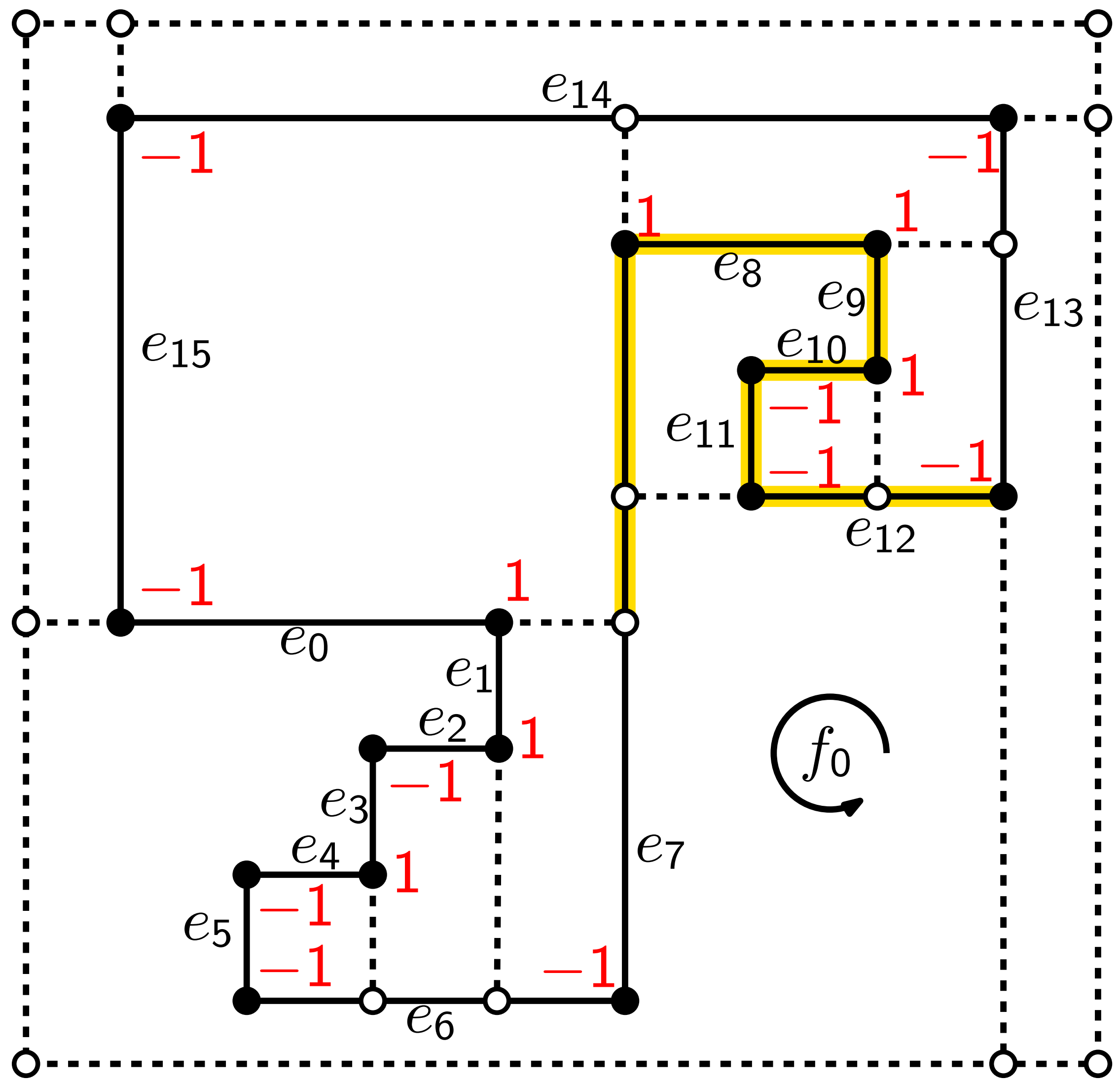
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



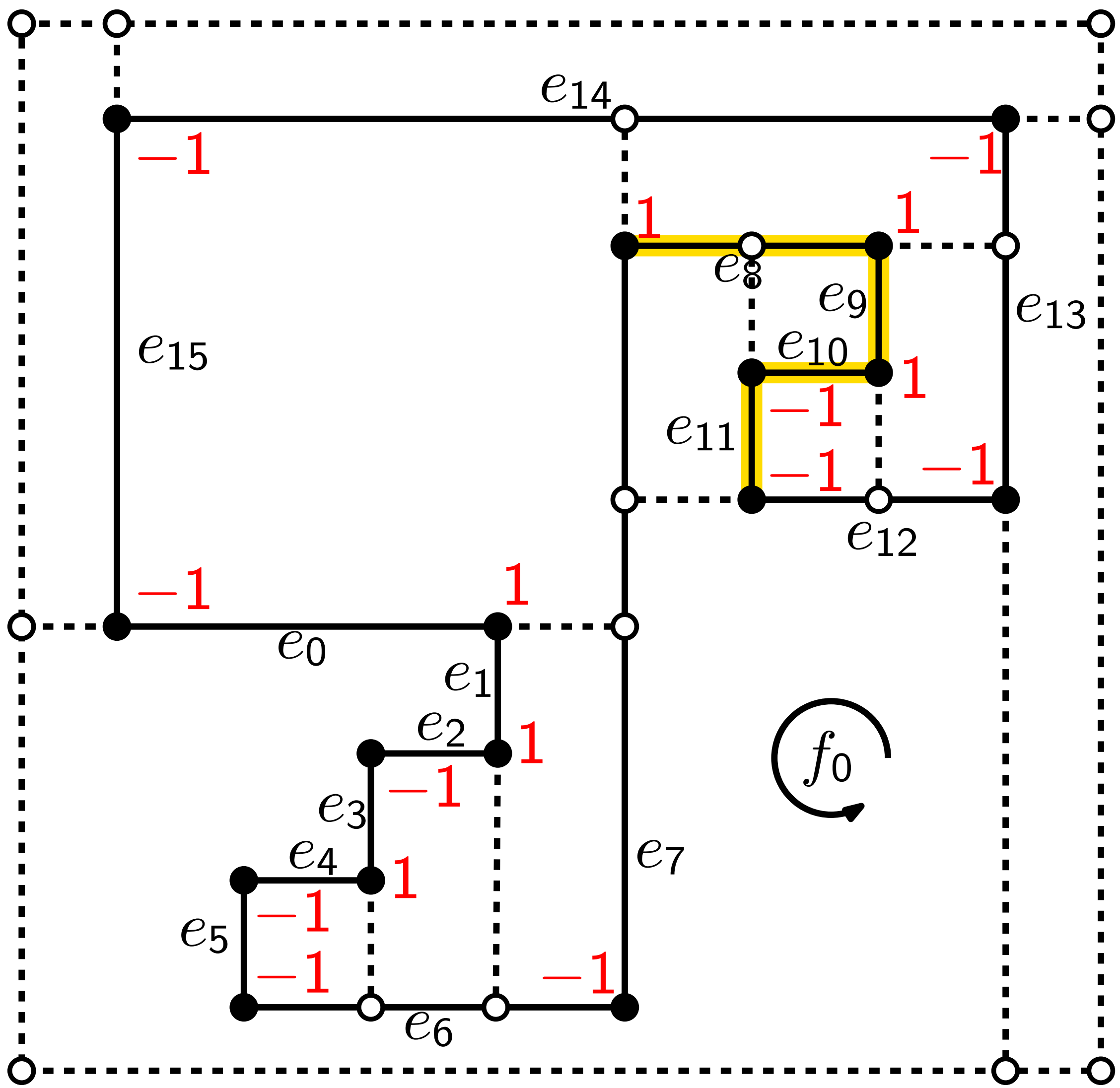
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



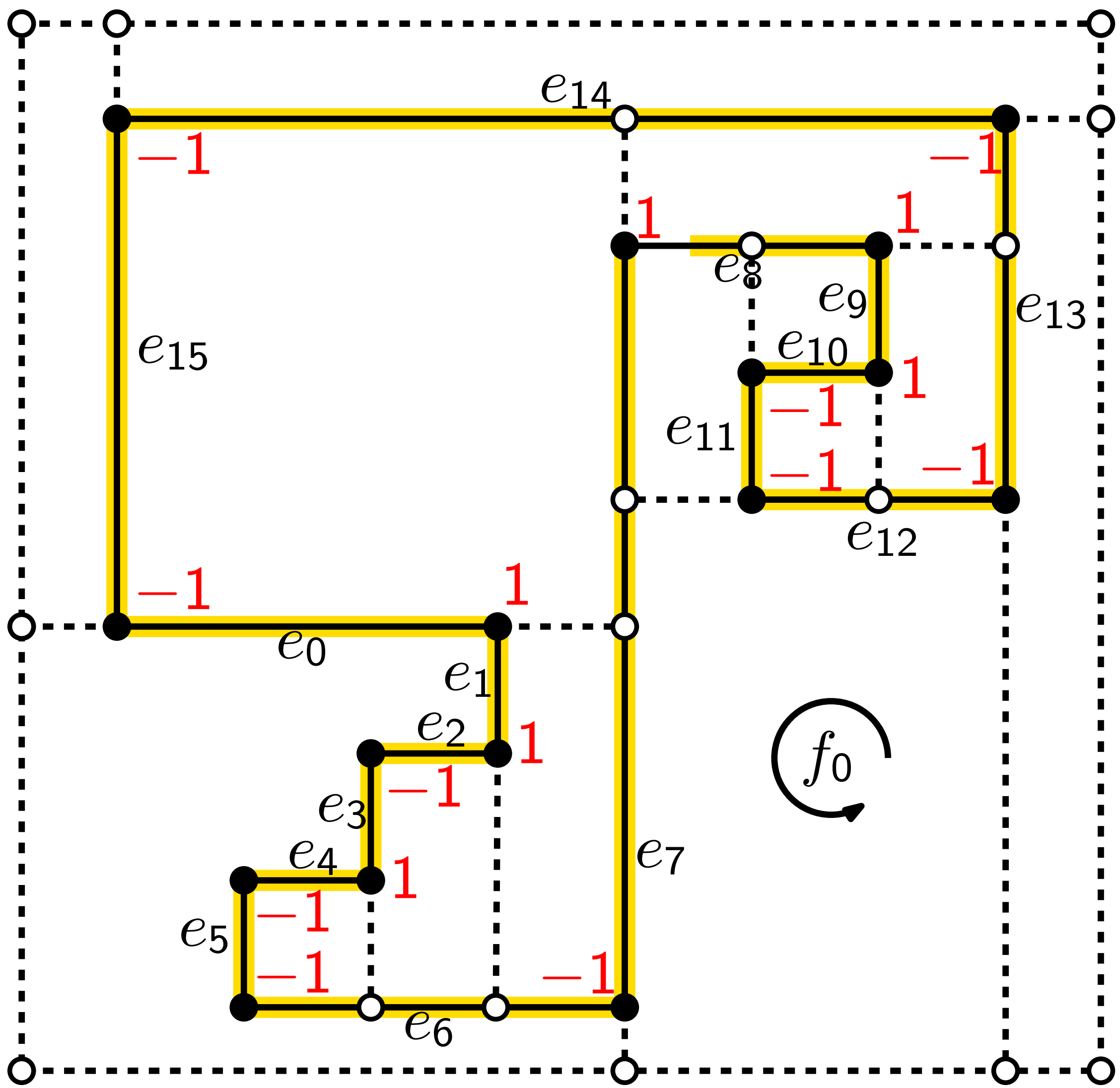
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



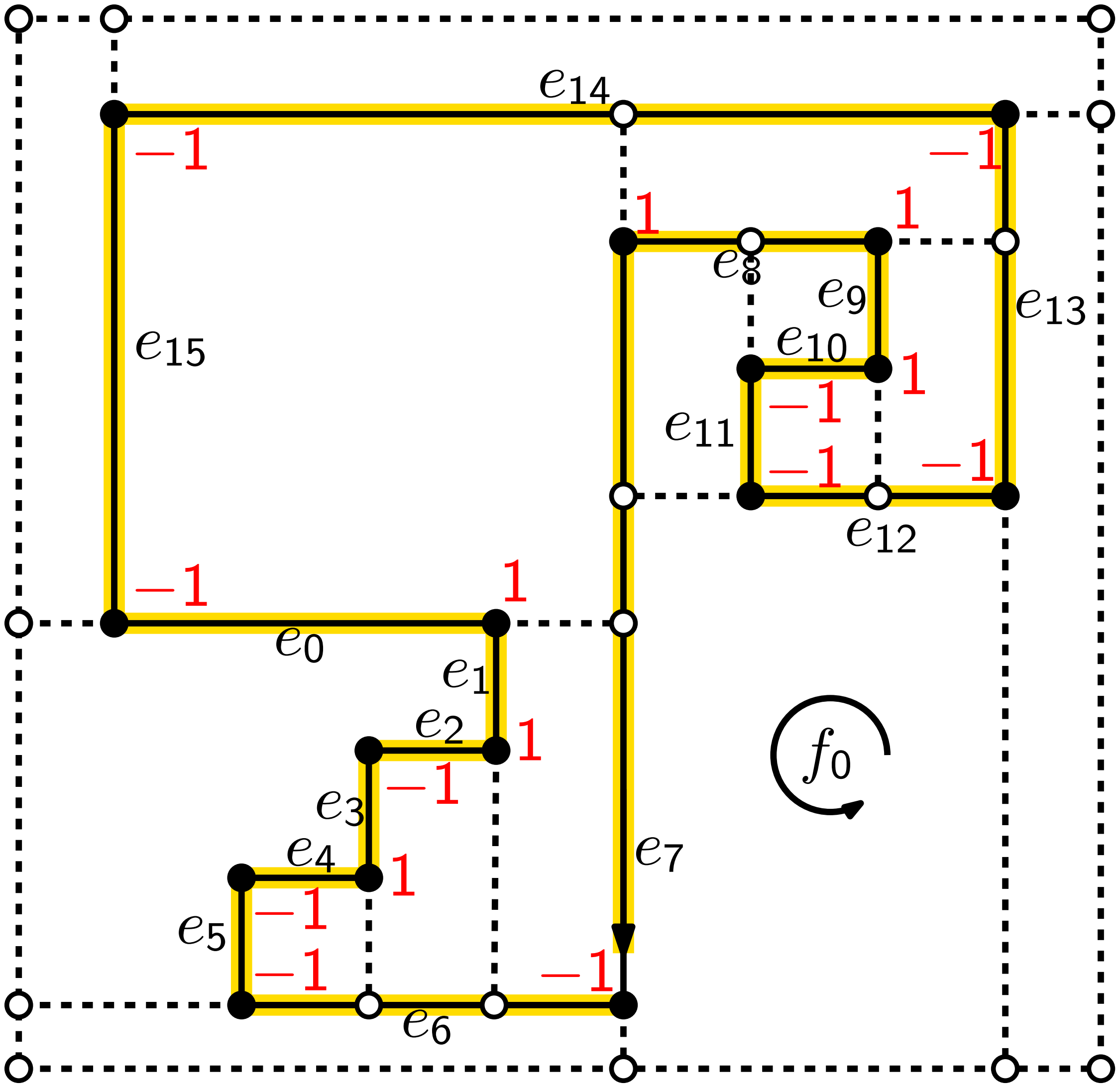
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



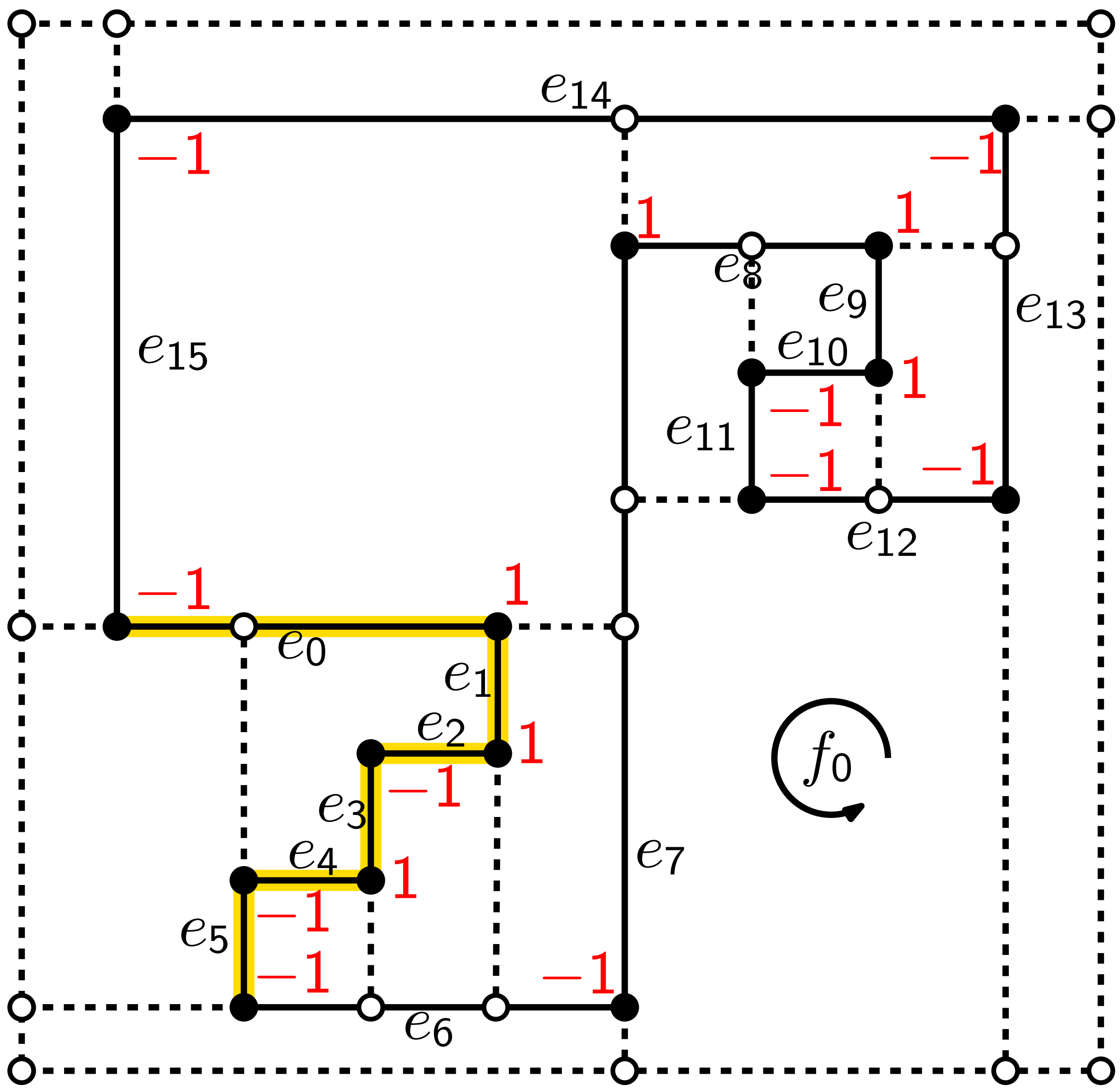
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



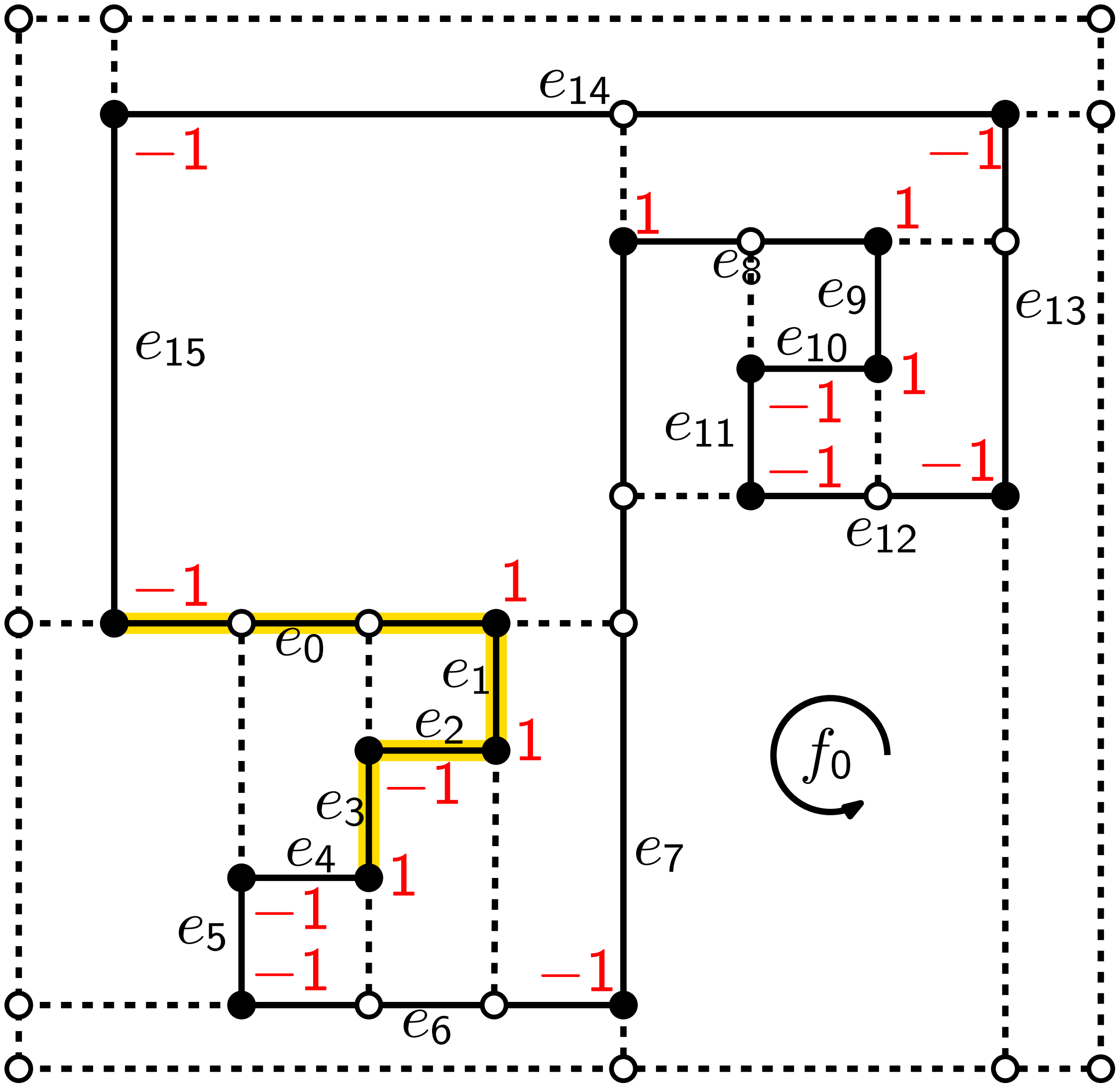
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



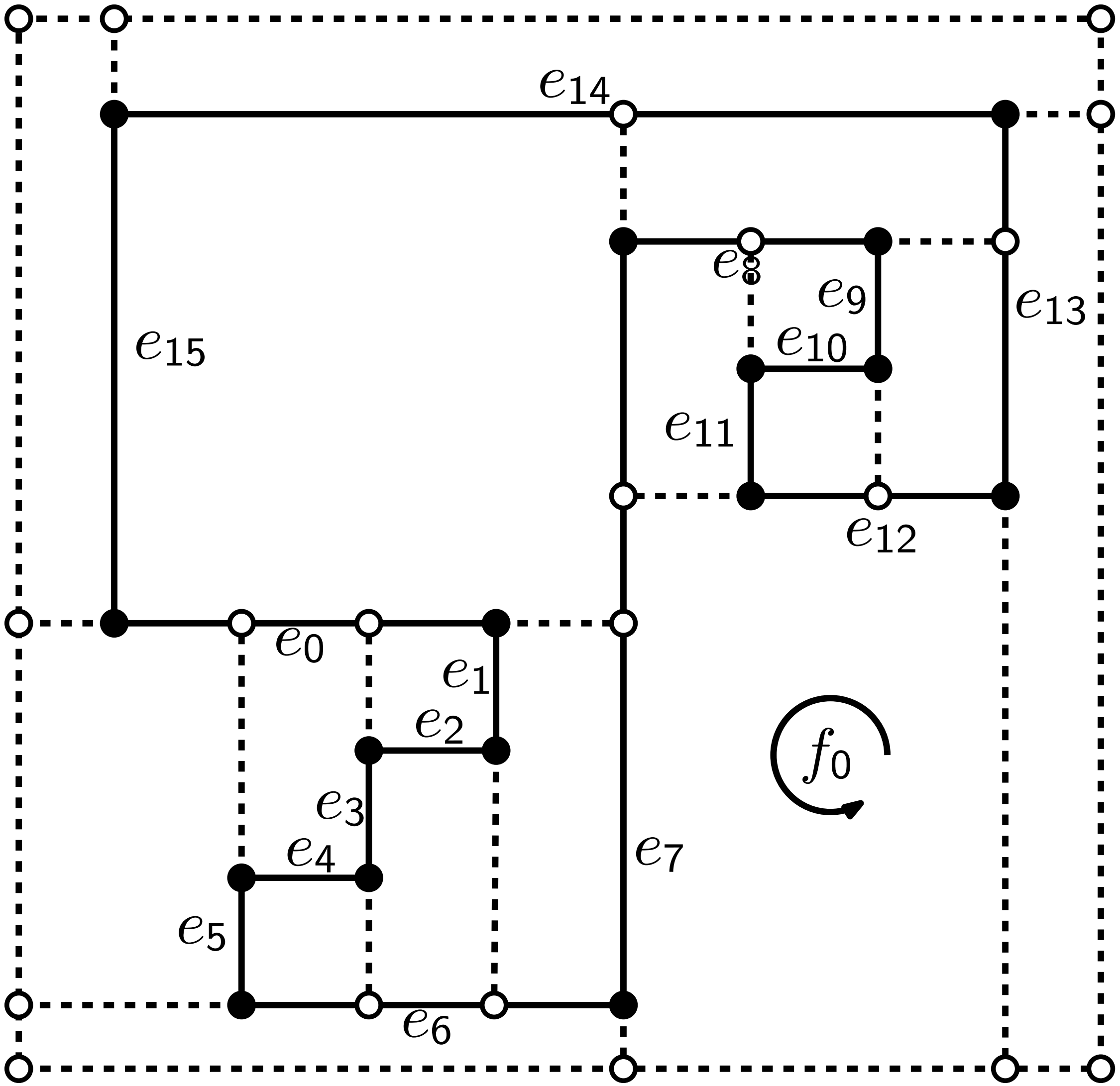
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



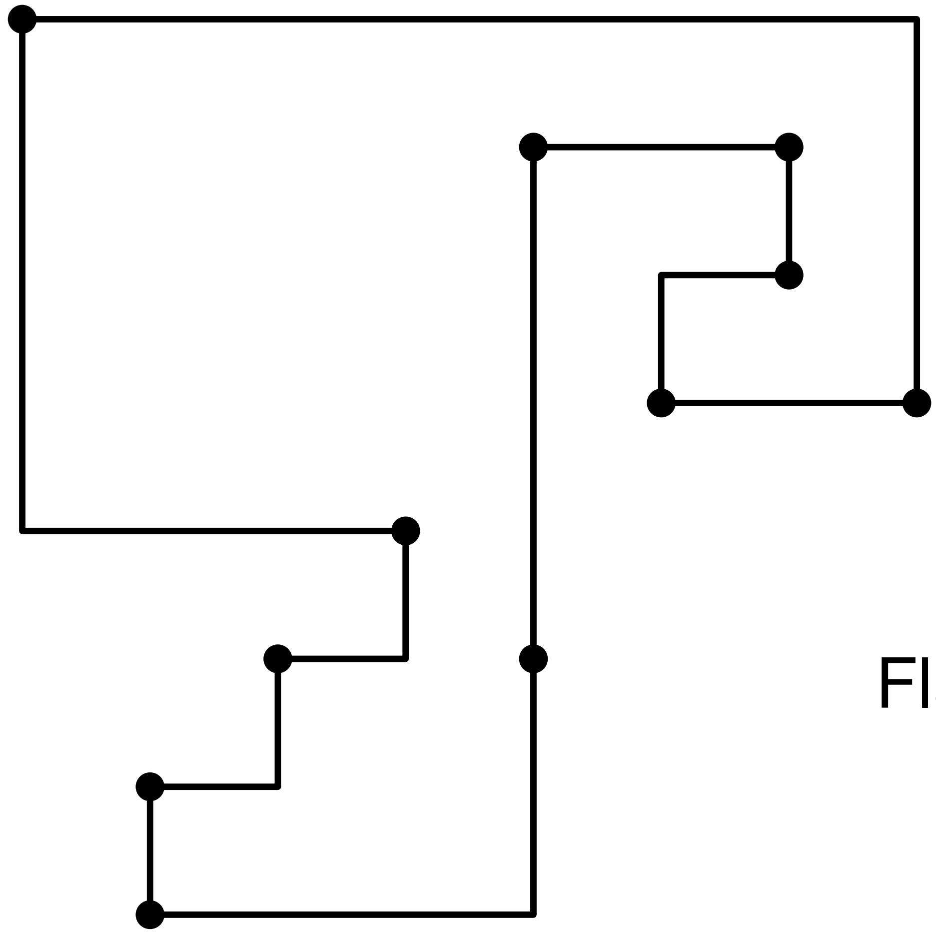
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette

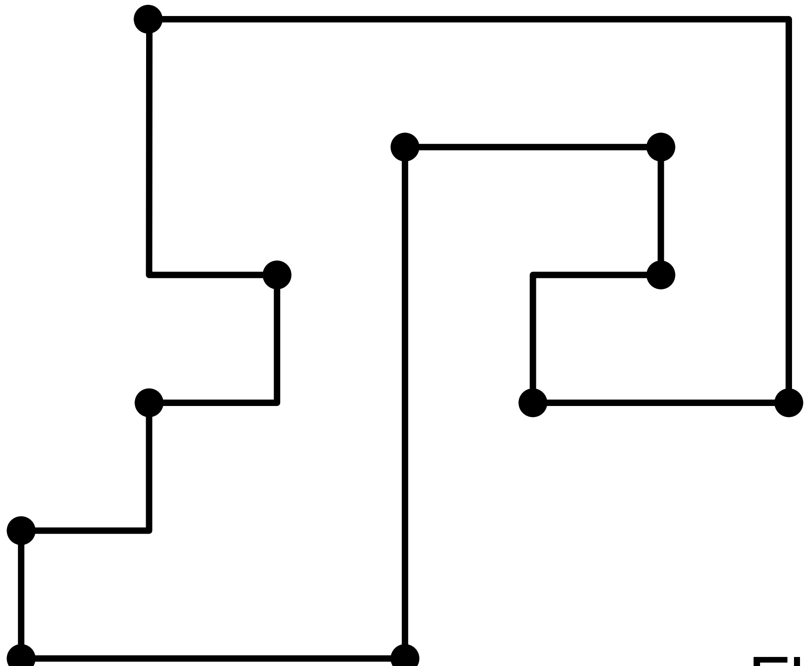


Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



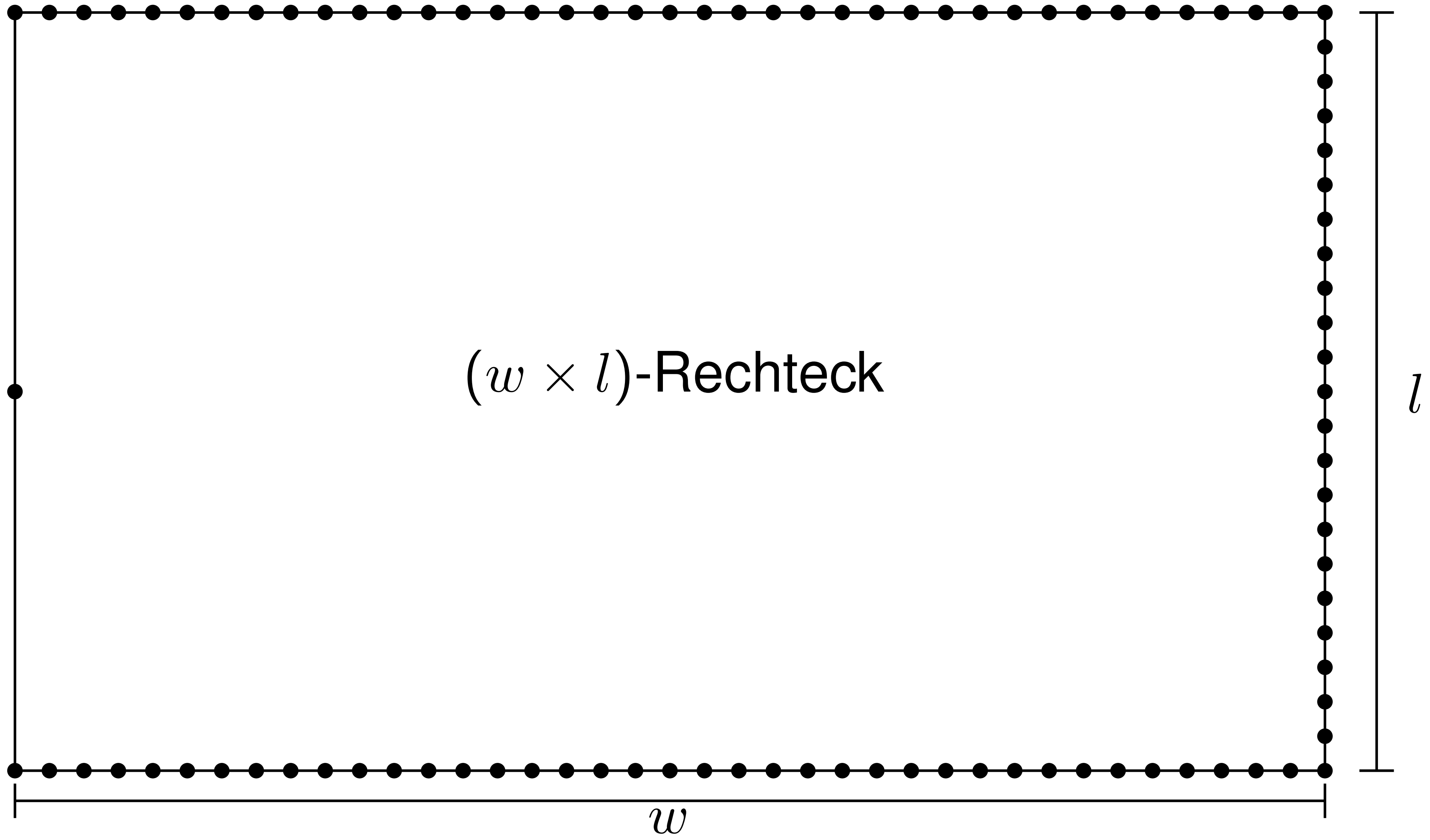
Flächenminimal?

Nein!

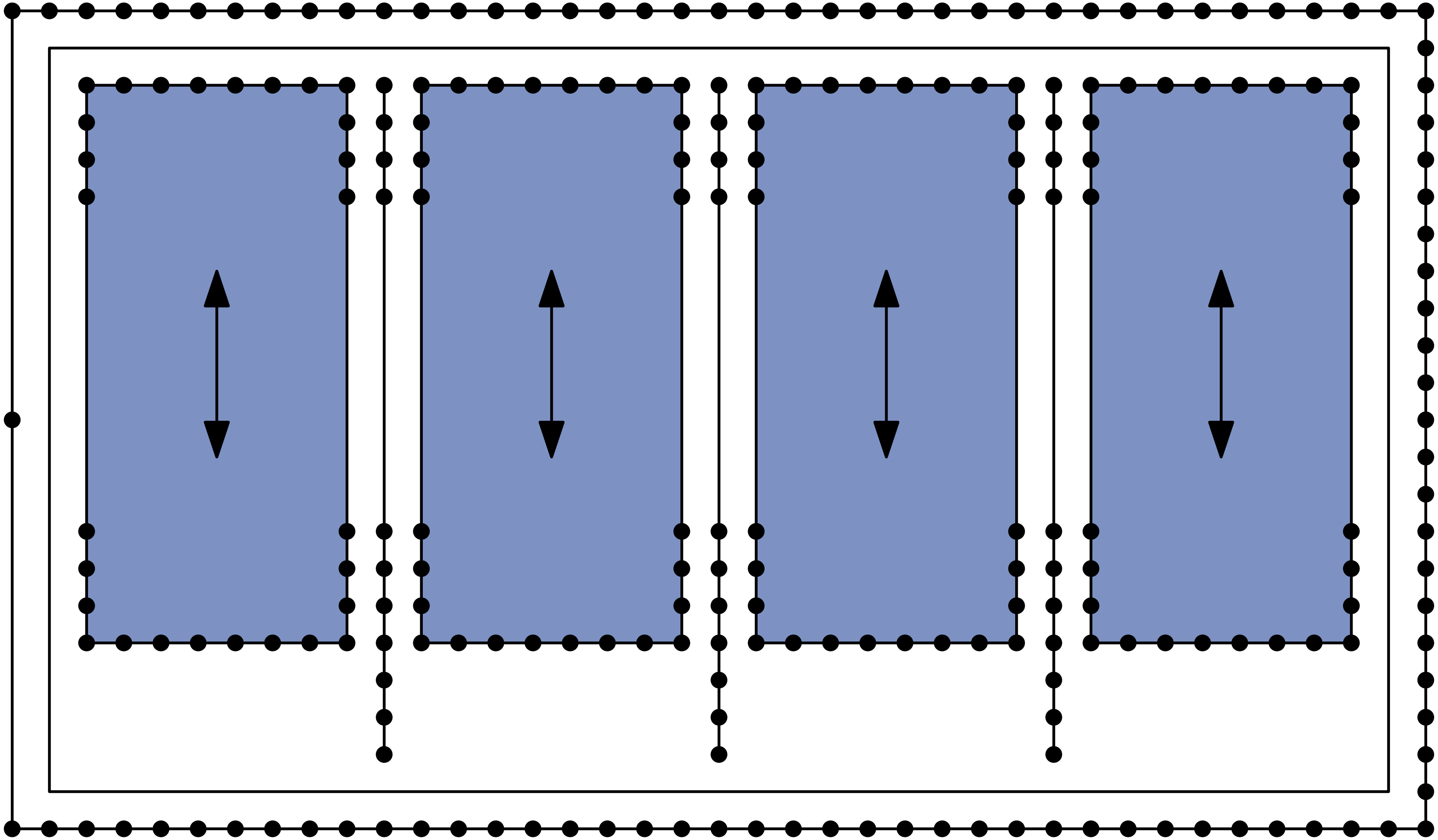
Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani '01]

- Grobstruktur von (G, H)
  - Begrenzung
  - Gürtel
  - Klauselgadgets
  - Variablengadgets
- Bestimme geeigneten Wert K
- (G, H) lässt sich in Fläche K zeichnen gdw. Φ erfüllbar

Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget

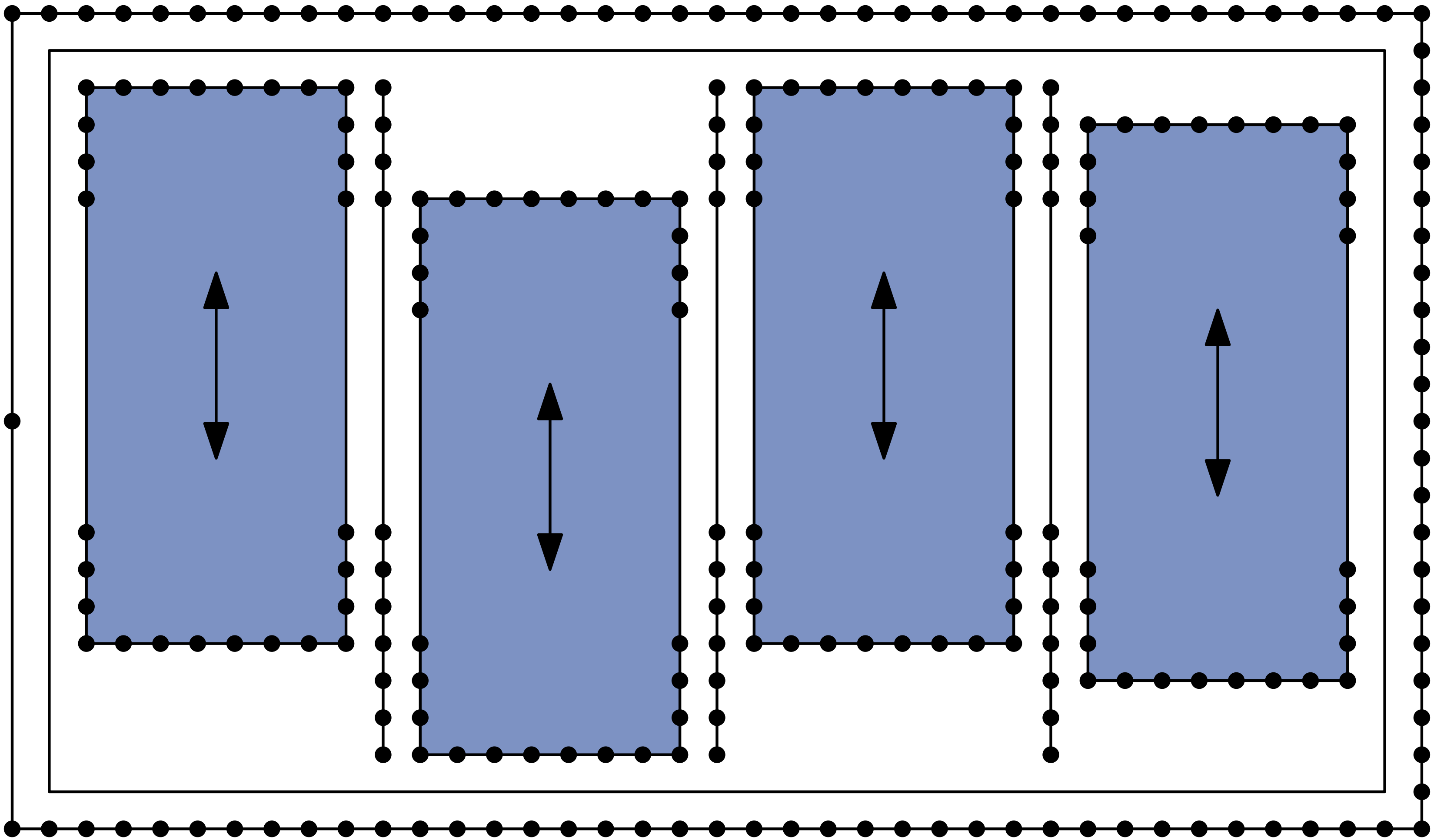


Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



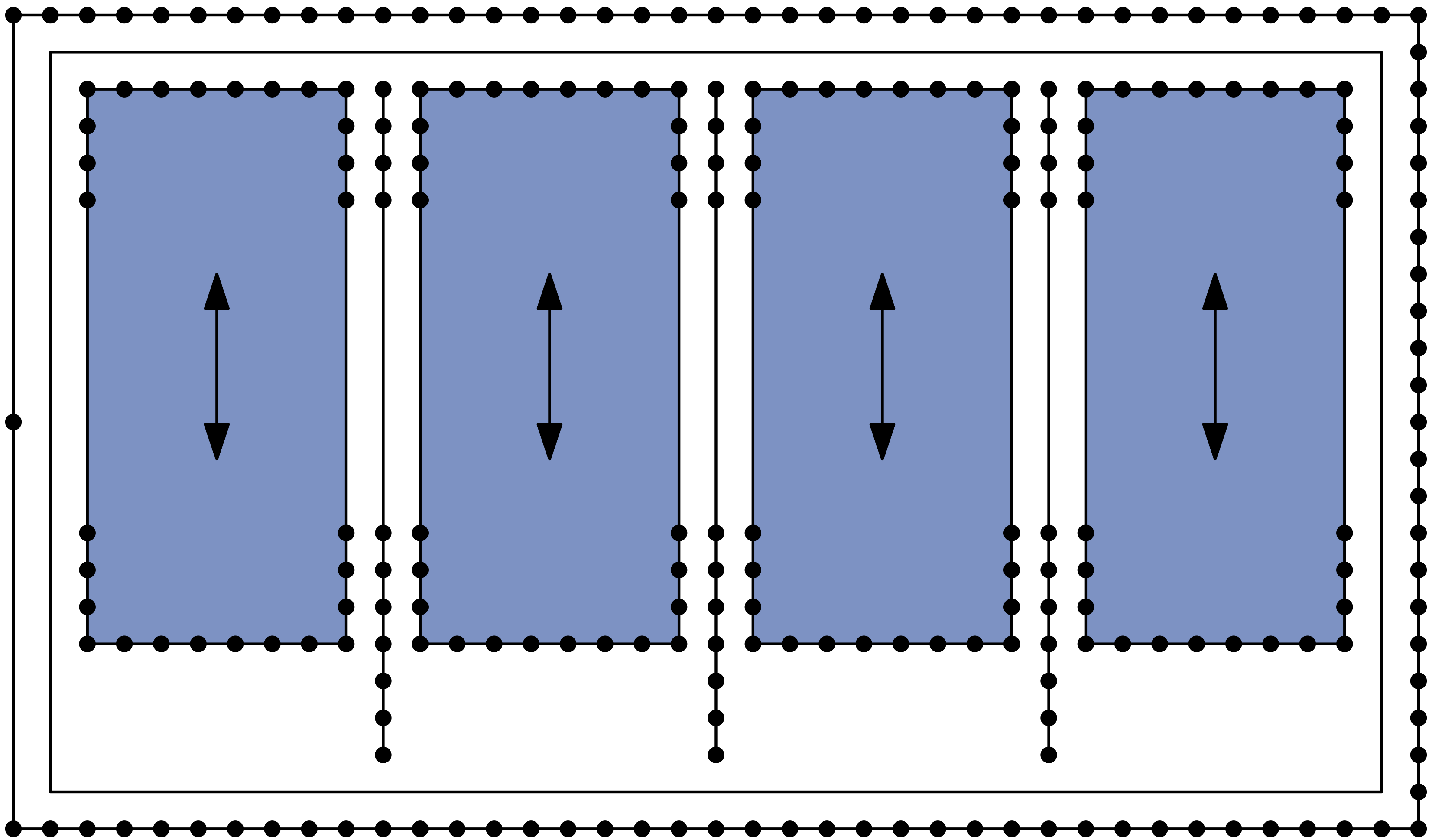
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



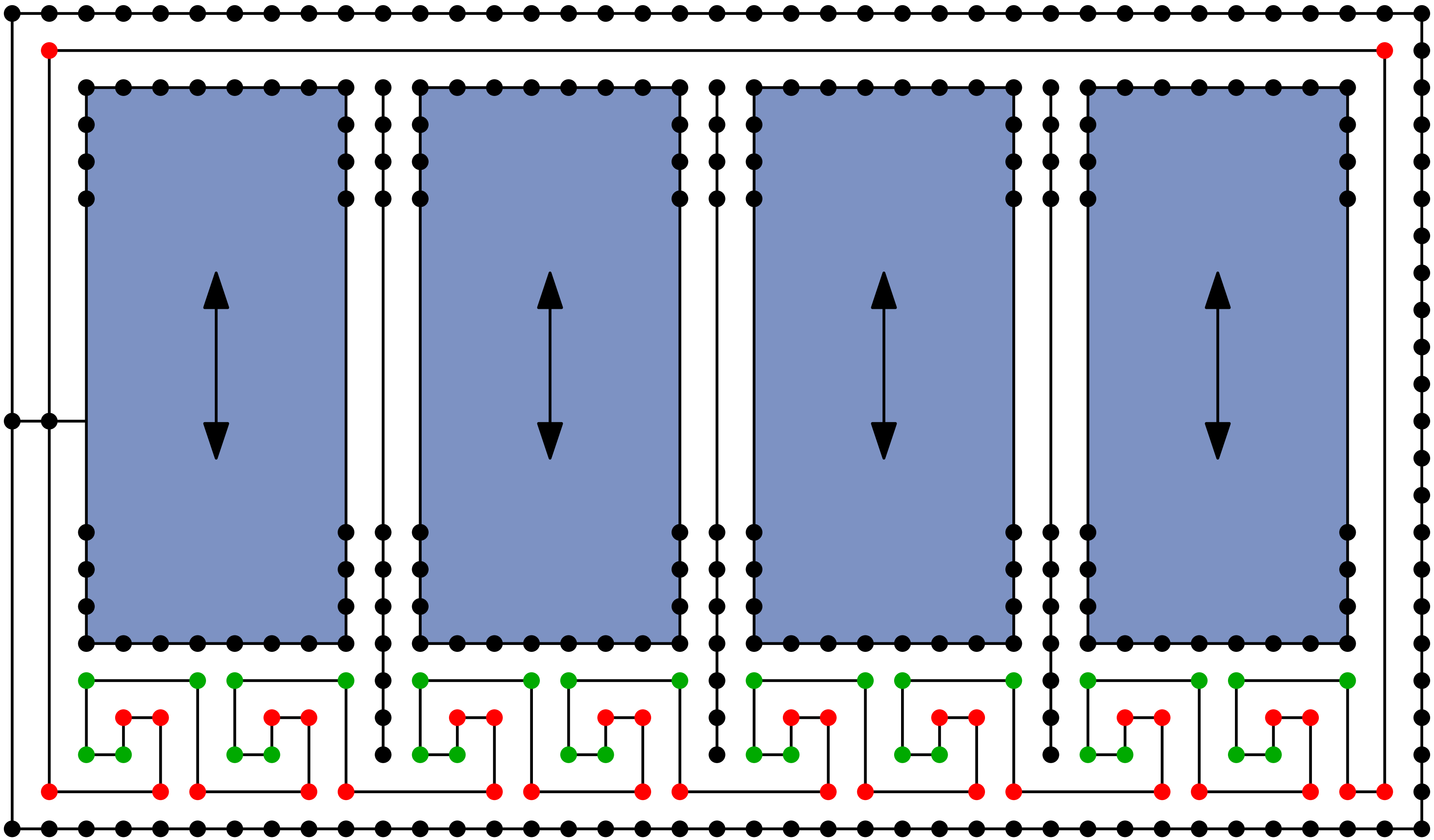
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget

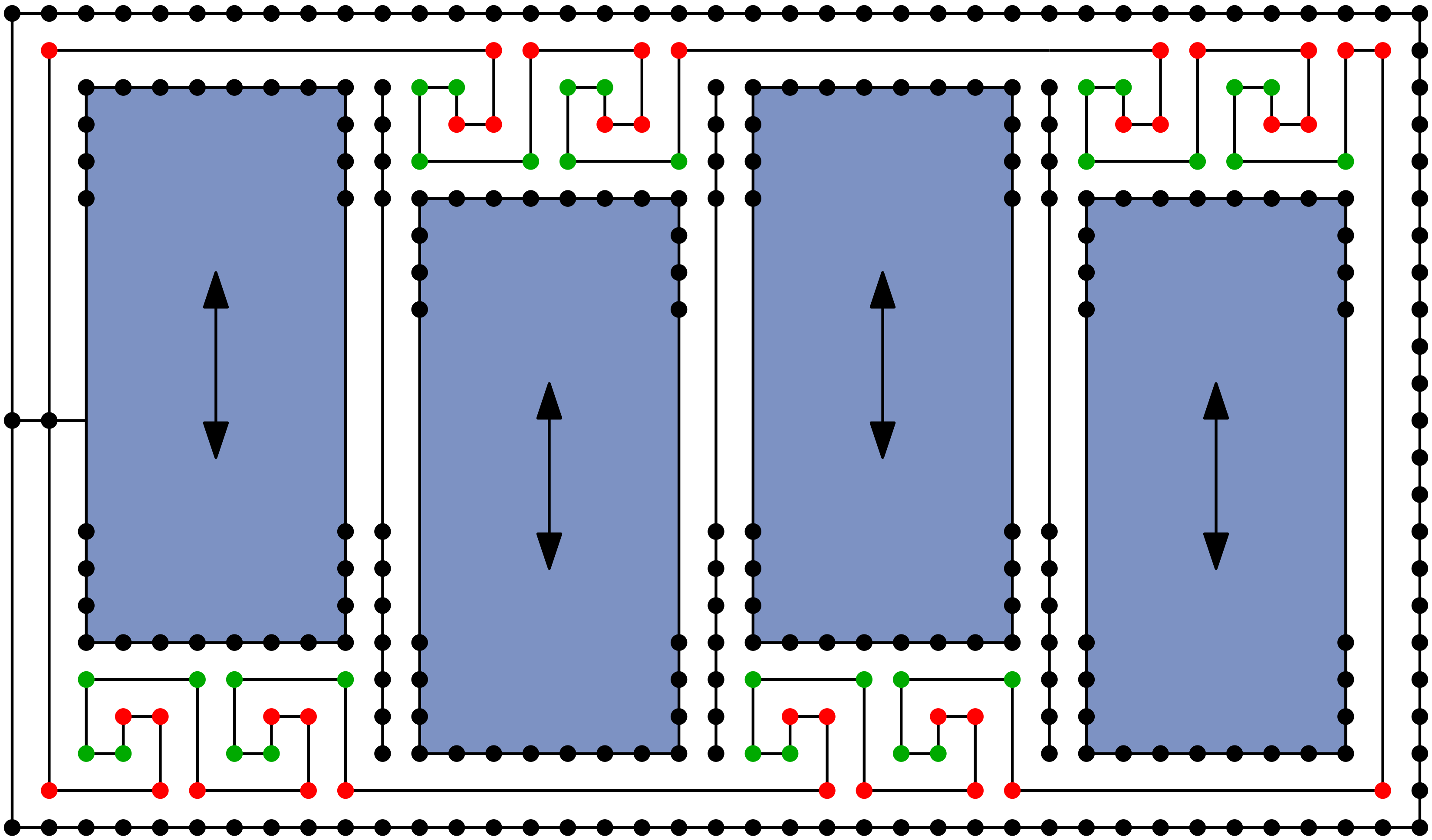


Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

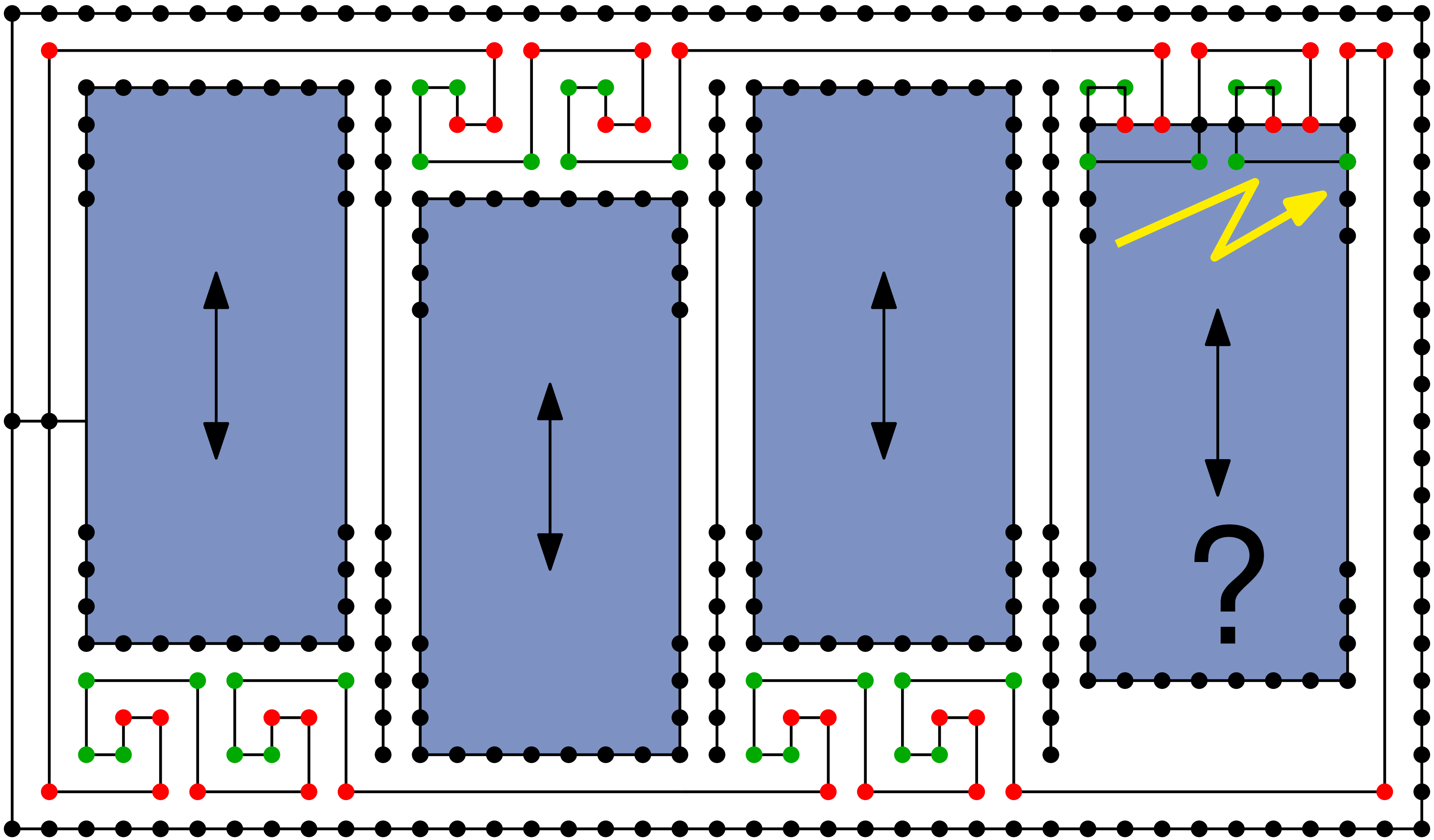
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



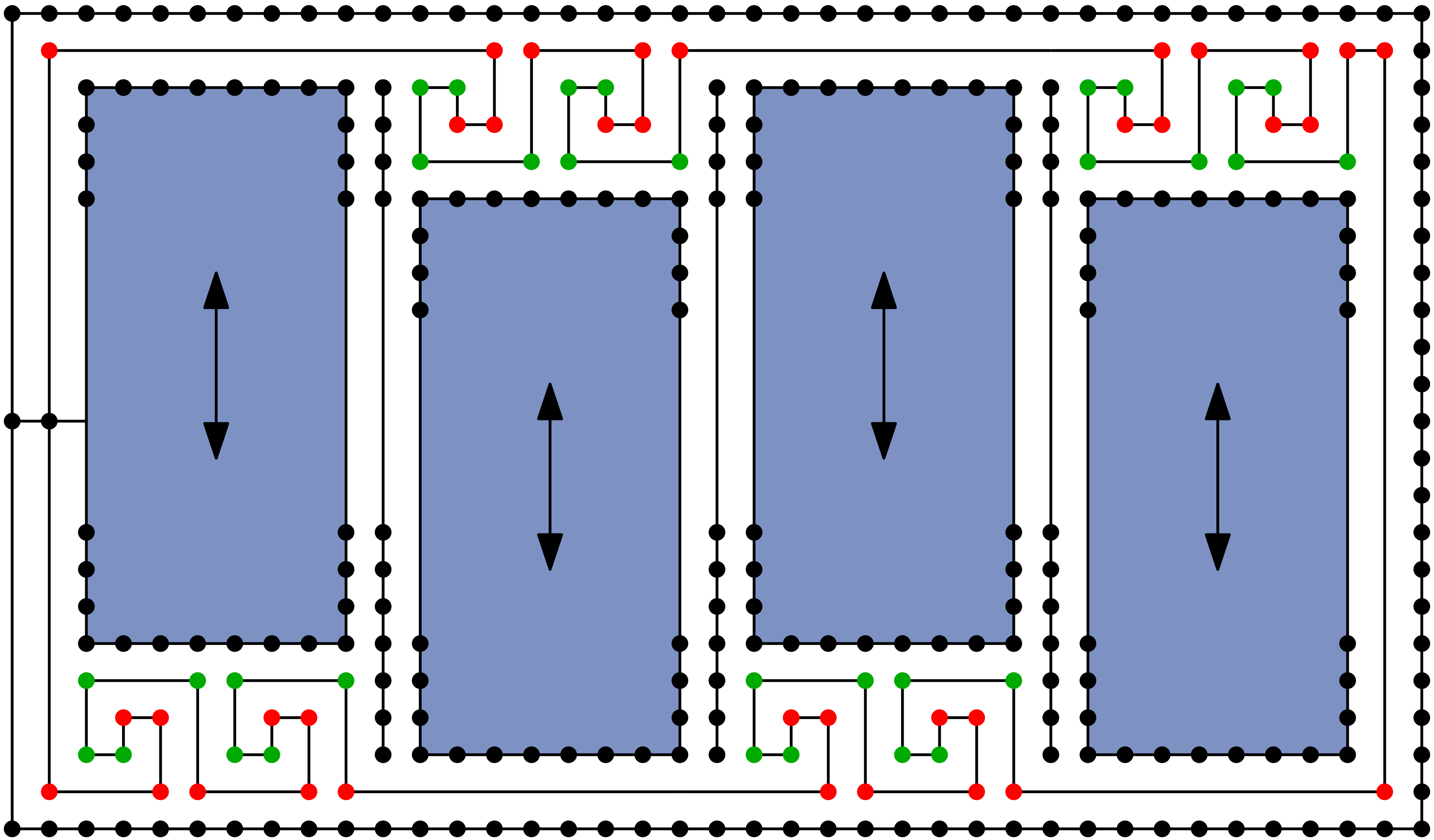
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget

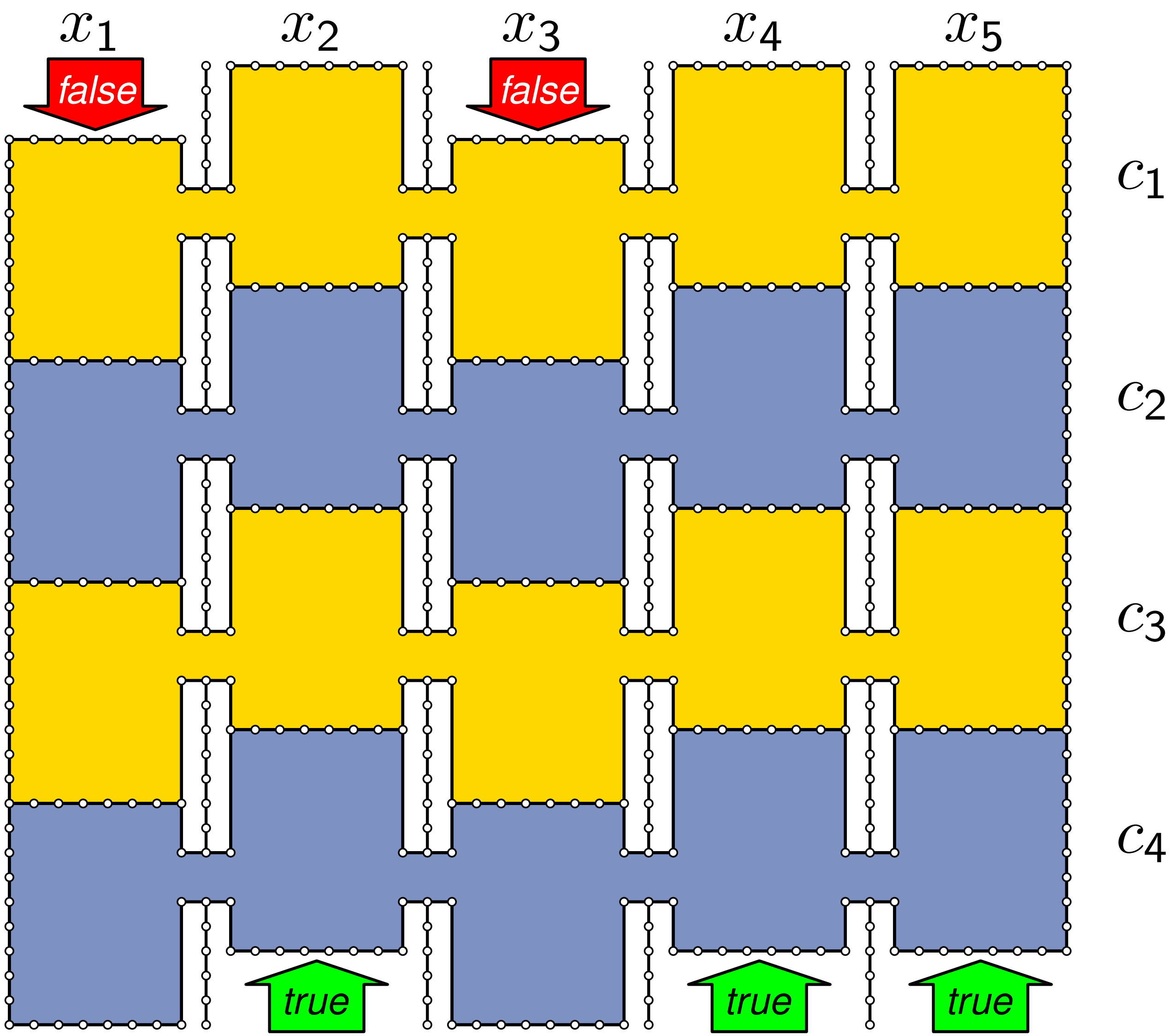


Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget

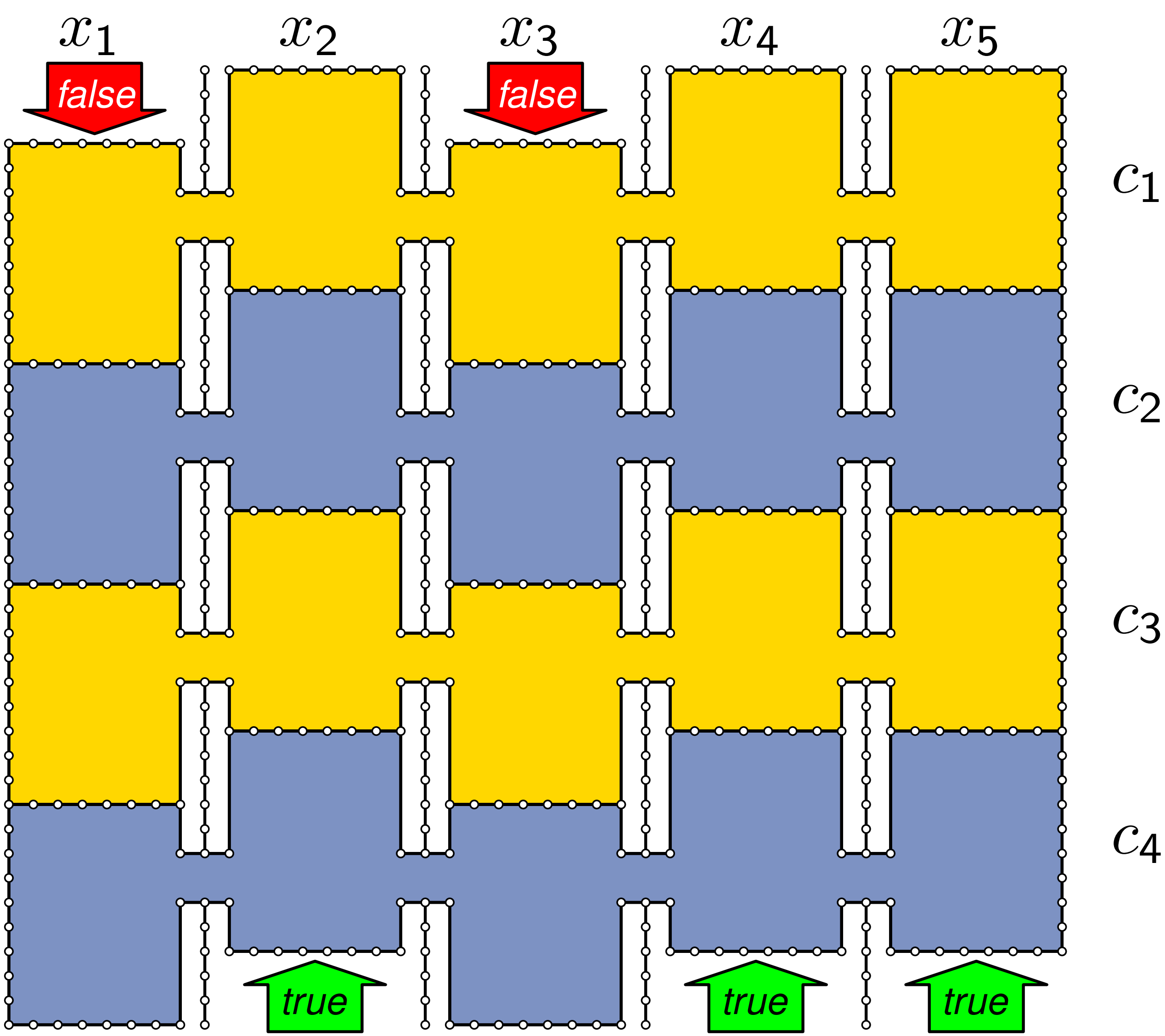


Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Klauselgadgets



Klauselgadgets



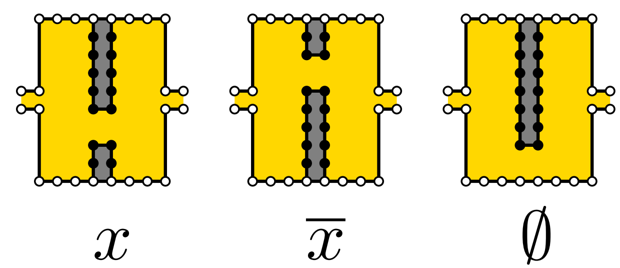
Beispiel:

$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

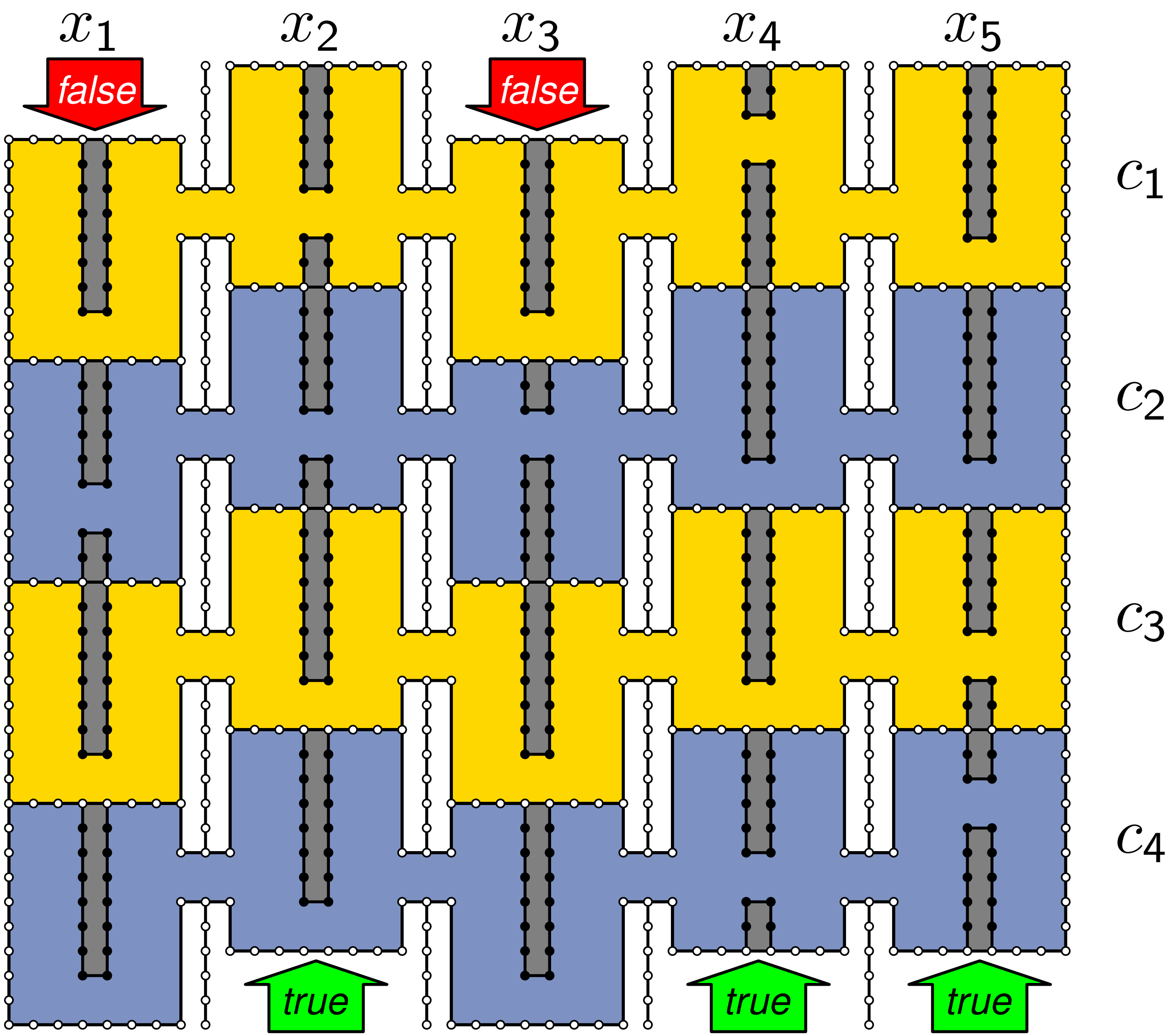
$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$

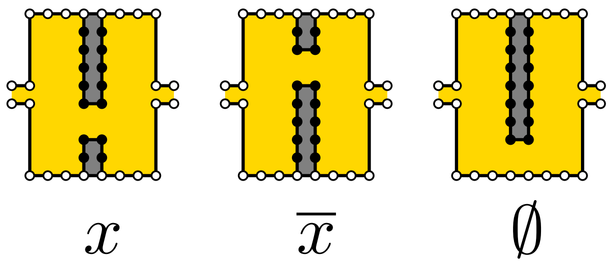


Klauselgadgets

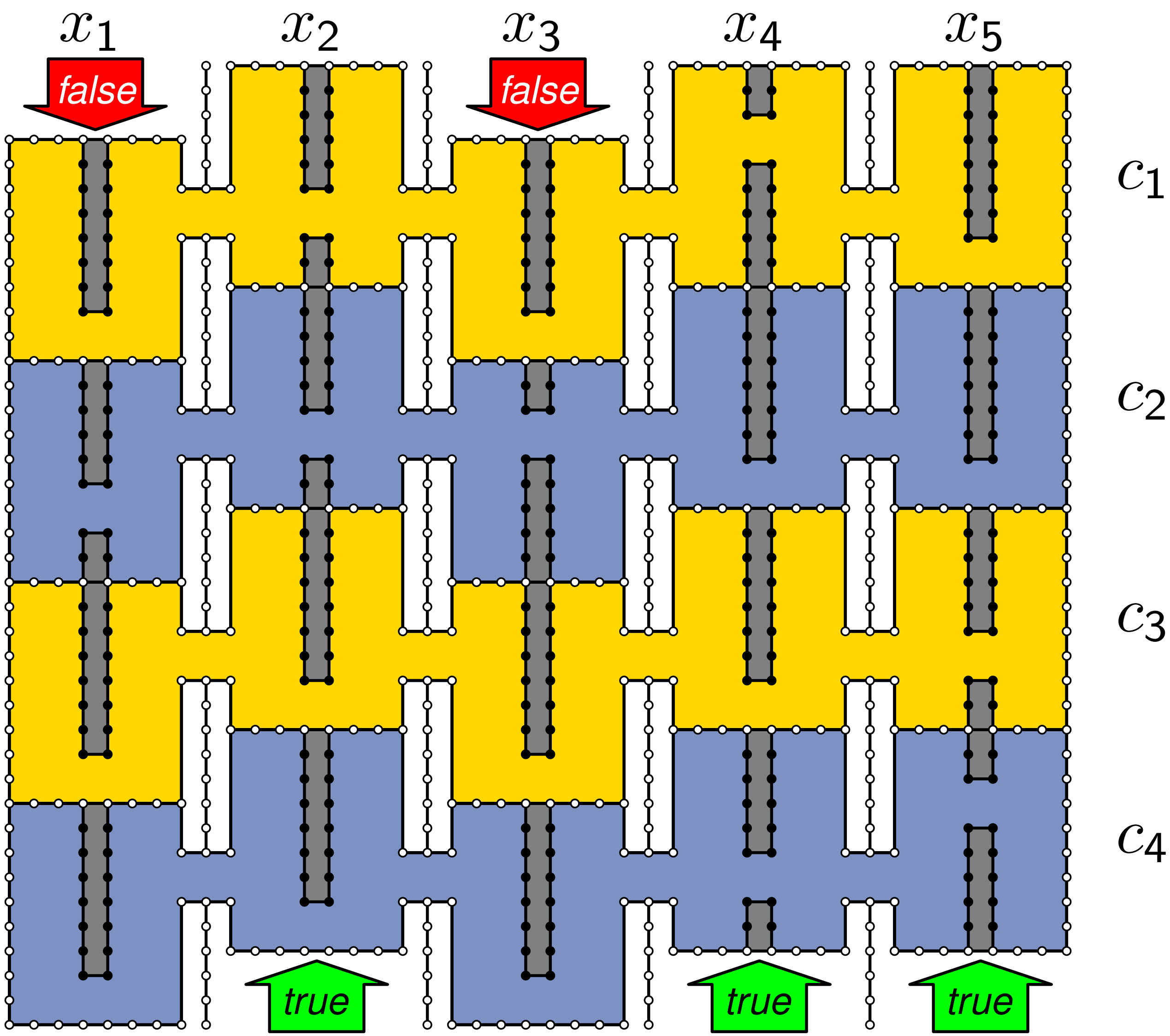


Beispiel:

$$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$$
$$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$$
$$c_3 = x_5$$
$$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$$



Klauselgadgets



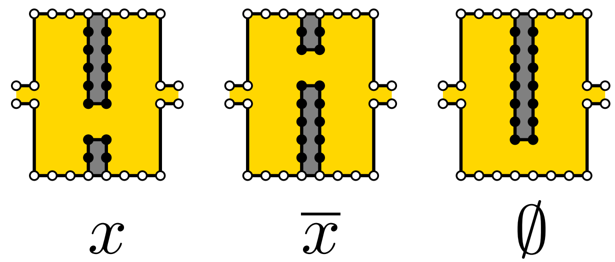
Beispiel:

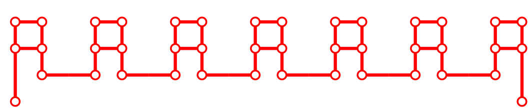
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

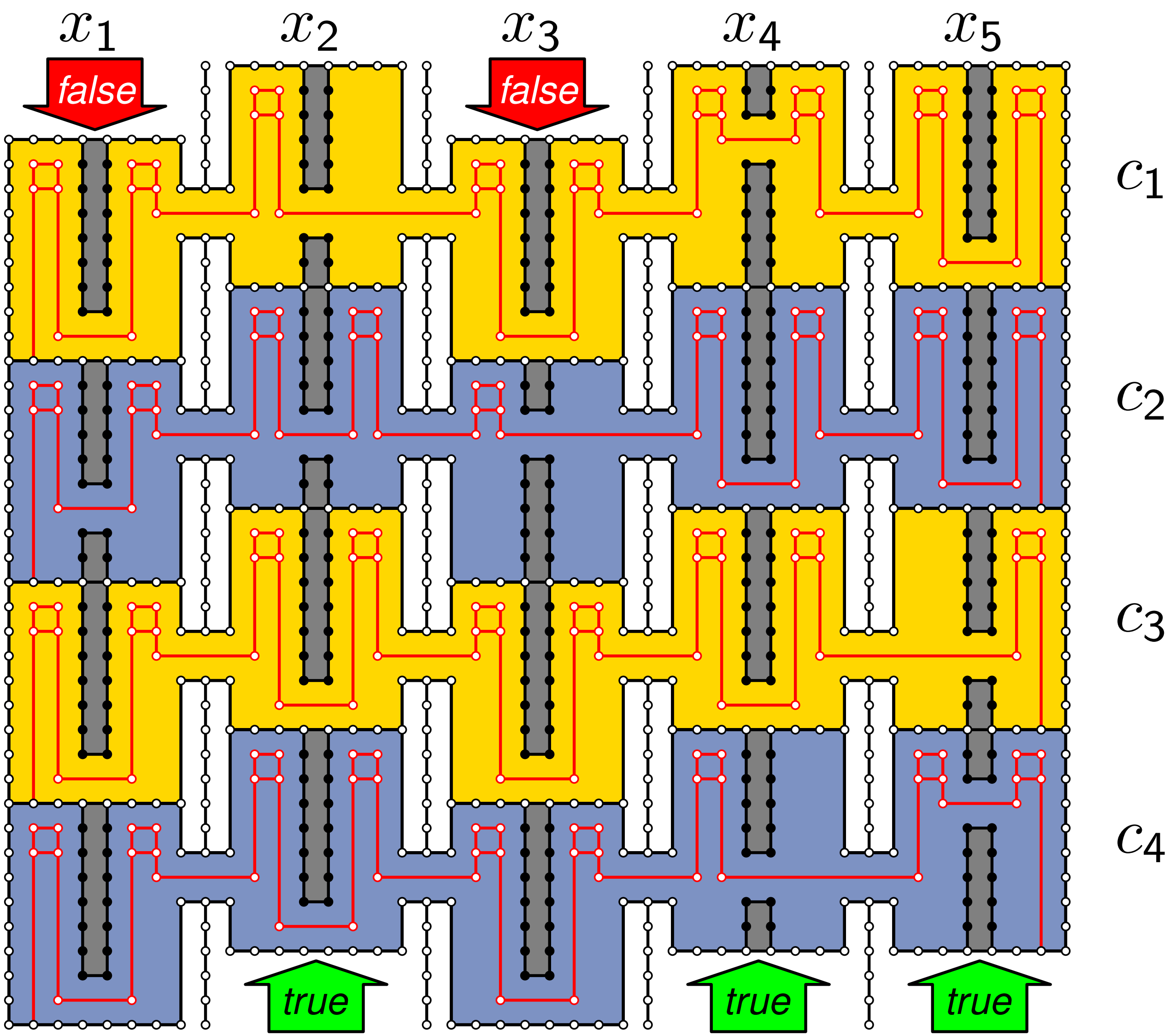
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n - 1)$-A-Kette durch jede Klausel

Klauselgadgets



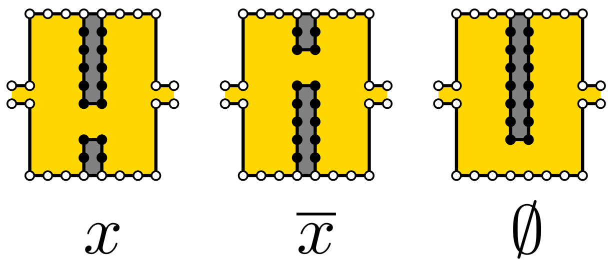
Beispiel:

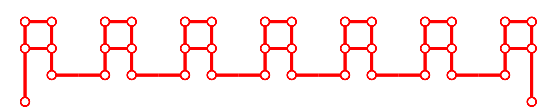
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$

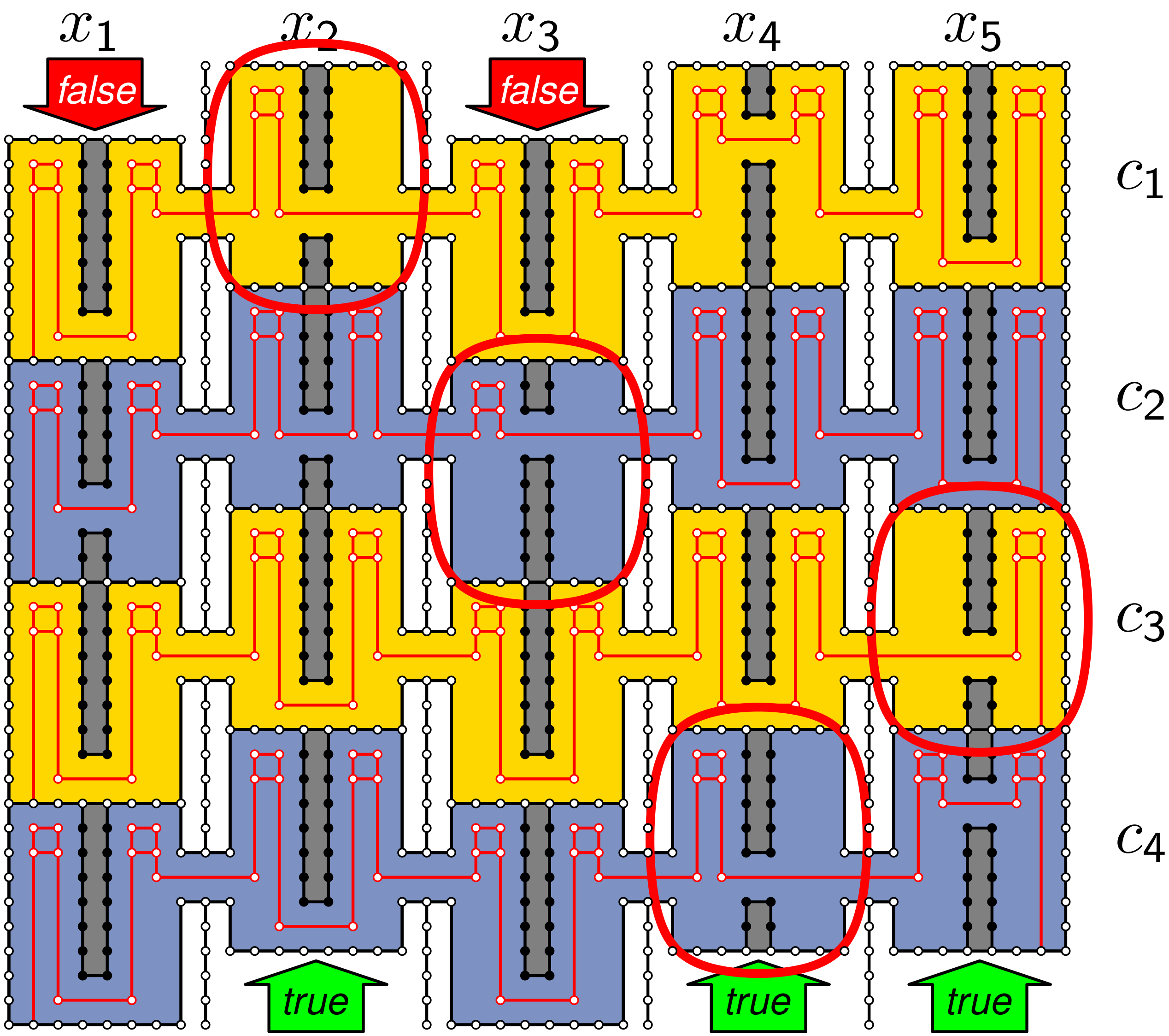




lege $(2n - 1)$-A-Kette
durch jede Klausel

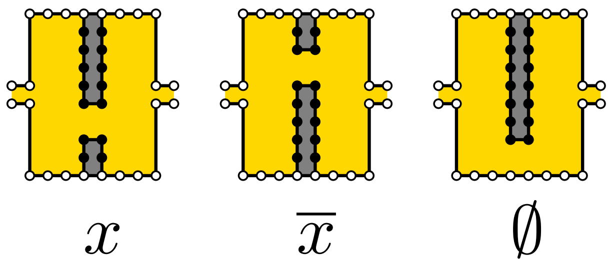
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

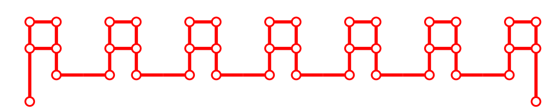
Klauselgadgets



Beispiel:

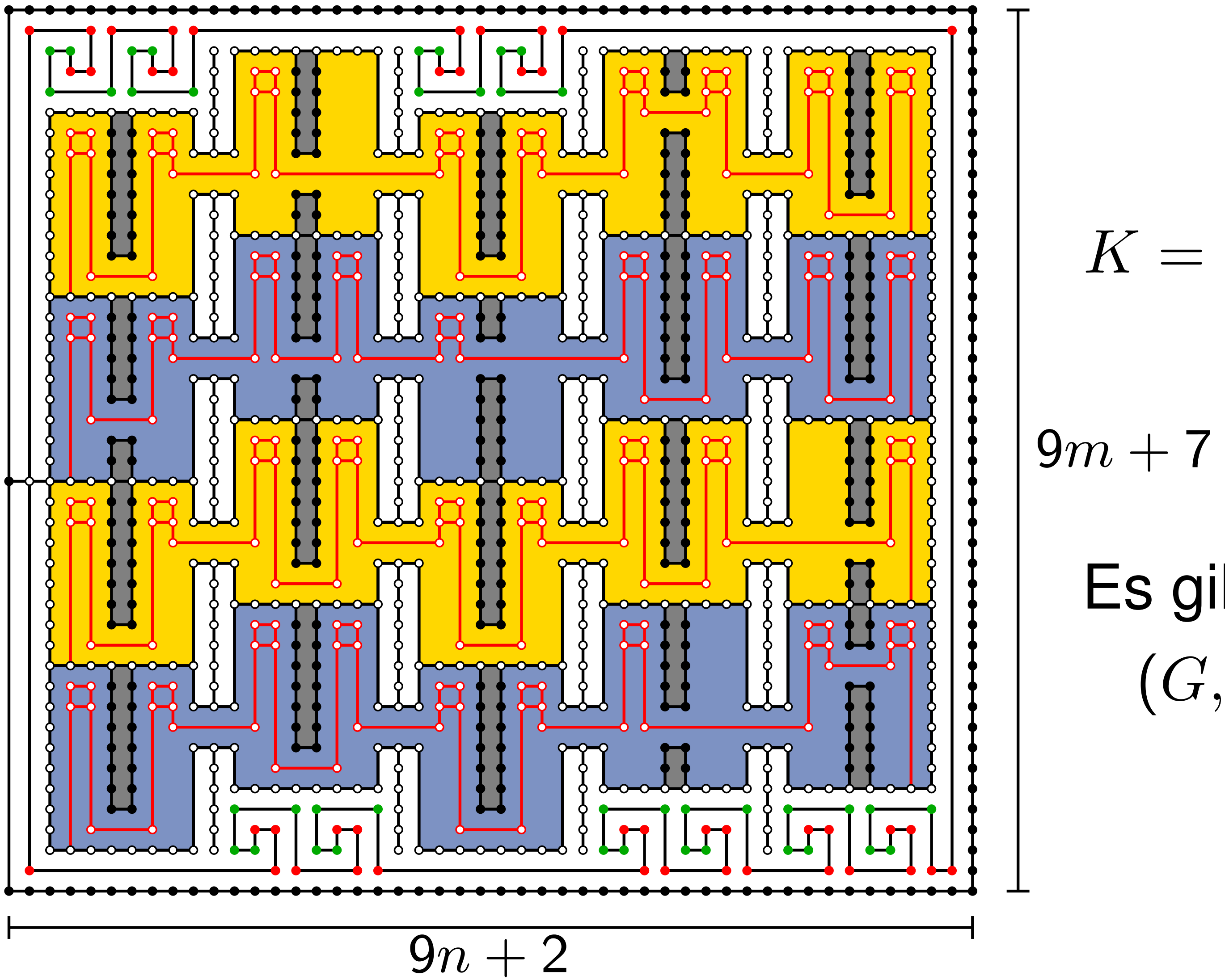
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$
$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$c_3 = x_5$
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n - 1)$-A-Kette
durch jede Klausel

Komplette Reduktion



Setze

$$K = (9n+2)\cdot(9m+7)$$

Es gilt:

(G, H) auf Fläche K zeichenbar

$\Leftrightarrow$

Φ erfüllbar

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I