Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Kontakt- und Schnittrepräsentationen

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Ignaz Rutter

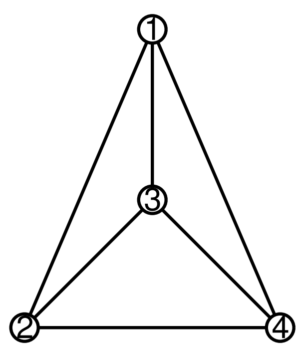
1.2.2012

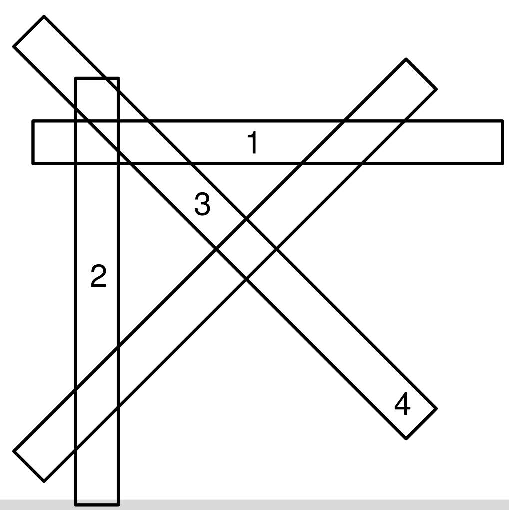
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

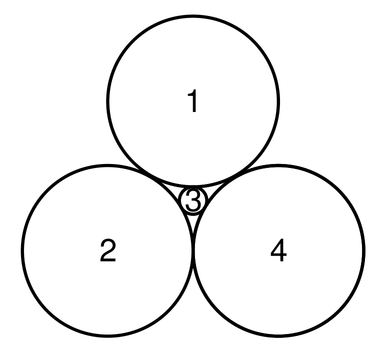
Schnitt- und Kontaktrepräsentationen

Bisher: Repräsentation im Knoten–Kanten-Modell
Neue Idee:

- Ordne jedem Knoten v geometrisches Objekt $R(v)$ zu
- u, v adjazent $\Leftrightarrow R(u) \cap R(v) \neq \emptyset$







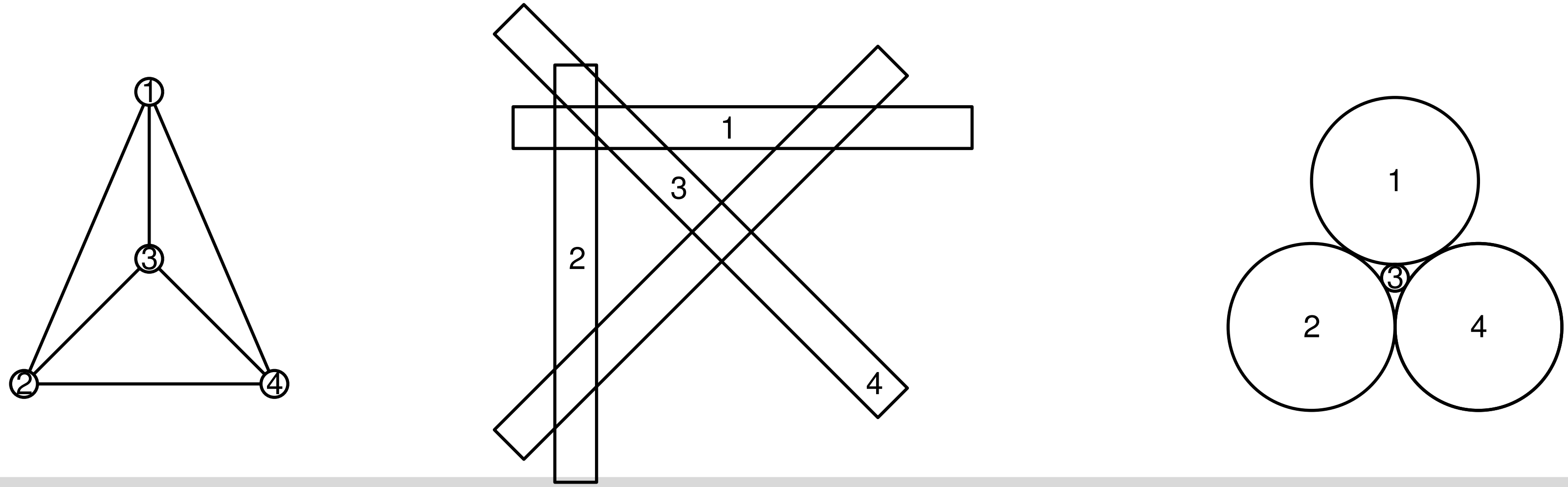
Schnitt- und Kontaktrepräsentationen

Bisher: Repräsentation im Knoten–Kanten-Modell
Neue Idee:

- Ordne jedem Knoten v geometrisches Objekt $R(v)$ zu
- u, v adjazent $\Leftrightarrow R(u) \cap R(v) \neq \emptyset$

Freiheitsgrade:

- Welche geometrischen Objekte sind erlaubt?
- Dürfen sich Objekte überschneiden?
- Wie werden Adjazenzen repräsentiert?



Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Schnitt- und Kontaktrepräsentationen

Bisher: Repräsentation im Knoten–Kanten-Modell
Neue Idee:

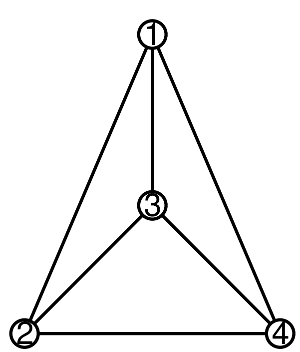
- Ordne jedem Knoten v geometrisches Objekt $R(v)$ zu
- u, v adjazent $\Leftrightarrow R(u) \cap R(v) \neq \emptyset$

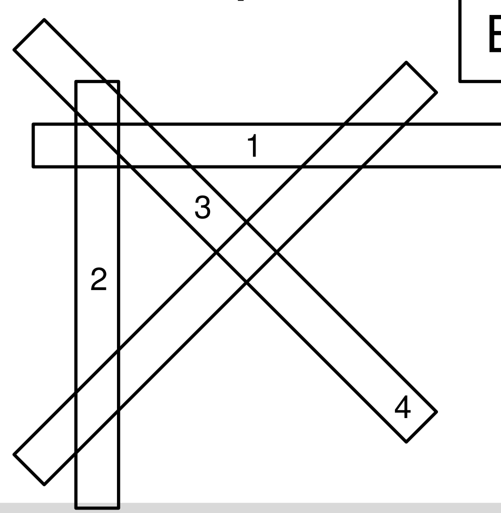
Geraden, Streckensegmente, Kreise, achsenparallele Rechtecke, Einheitsquadrate

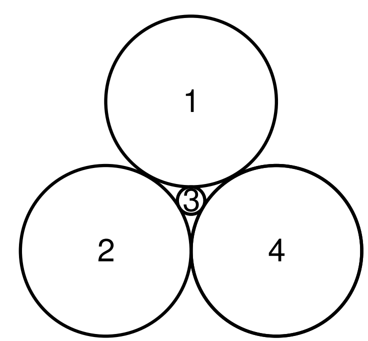
Freiheitsgrade:

- Welche geometrischen Objekte sind erlaubt?
- Dürfen sich Objekte überschneiden?
- Wie werden Adjazenzen repräsentiert?

Berührung, Schnitt, Seitenkontakt







Grundsätzliche Problemstellungen

Grundsätzliche interessante Problemstellungen nach Festlegung einer Art Repräsentationsart:

- Erkennungsproblem:
  Gegeben einen Graph, entscheide ob er eine zulässige Repräsentation besitzt.
- Charakterisierungsproblem:
  Finde eine Charakterisierung der Graphen, die eine solche Repräsentation besitzen
- Beweise für Klassen von Graphen, dass Sie eine Repräsentation besitzen

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Grundsätzliche Problemstellungen

Grundsätzliche interessante Problemstellungen nach Festlegung einer Art Repräsentationsart:

- Erkennungsproblem:
  Gegeben einen Graph, entscheide ob er eine zulässige Repräsentation besitzt.
- Charakterisierungsproblem:
  Finde eine Charakterisierung der Graphen, die eine solche Repräsentation besitzen
- Beweise für Klassen von Graphen, dass Sie eine Repräsentation besitzen

Optimierung weiterer ästhetischer Kriterien:
Fläche der Regionen, Komplexität der Regionen

Grundsätzliche Problemstellungen

Grundsätzliche interessante Problemstellungen nach Festlegung einer Art Repräsentationsart:

- Erkennungsproblem:
  Gegeben einen Graph, entscheide ob er eine zulässige Repräsentation besitzt.
- Charakterisierungsproblem:
  Finde eine Charakterisierung der Graphen, die eine solche Repräsentation besitzen
- Beweise für Klassen von Graphen, dass Sie eine Repräsentation besitzen

Optimierung weiterer ästhetischer Kriterien:
Fläche der Regionen, Komplexität der Regionen

- Hilft eine Repräsentation algorithmische Probleme besser zu lösen?

Beispiele für Schnittrepräsentationen

Intervallgraphen: Schnittgraph von Intervallen

- Linearer Algorithmus zur Erkennung
- Viele im Allgemeinen NP-schwere Probleme effizient lösbar

Ähnlich: circular arc graphs

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Beispiele für Schnittrepräsentationen

Intervallgraphen: Schnittgraph von Intervallen

- Linearer Algorithmus zur Erkennung
- Viele im Allgemeinen NP-schwere Probleme effizient lösbar

Ähnlich: circular arc graphs

Unit disk graphs: Schnittgraphen von Einheitskreisen

- Erkennung NP-schwer
- Gegebene Repräsentation $\Rightarrow$ manche Probleme lösbar

Beispiele für Schnittrepräsentationen

Intervallgraphen: Schnittgraph von Intervallen

- Linearer Algorithmus zur Erkennung
- Viele im Allgemeinen NP-schwere Probleme effizient lösbar

Ähnlich: circular arc graphs

Unit disk graphs: Schnittgraphen von Einheitskreisen

- Erkennung NP-schwer
- Gegebene Repräsentation $\Rightarrow$ manche Probleme lösbar

Schnittgraphen von Kantensegmenten:

- Jeder planare Graph besitzt eine solche Repräsentation
- Auch nicht planare Graphen? $K_{3,3}$?

Beispiele für Schnittrepräsentationen

Intervallgraphen: Schnittgraph von Intervallen

- Linearer Algorithmus zur Erkennung
- Viele im Allgemeinen NP-schwere Probleme effizient lösbar

Ähnlich: circular arc graphs

Unit disk graphs: Schnittgraphen von Einheitskreisen

- Erkennung NP-schwer
- Gegebene Repräsentation $\Rightarrow$ manche Probleme lösbar

Schnittgraphen von Kantensegmenten:

- Jeder planare Graph besitzt eine solche Repräsentation
- Auch nicht planare Graphen? $K_{3,3}$?

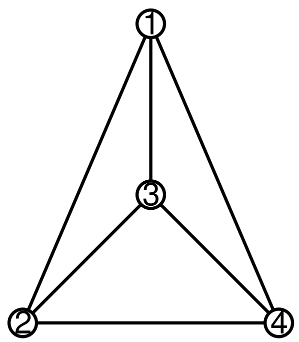
String Graphs: Schnitt von Kurven in der Ebene

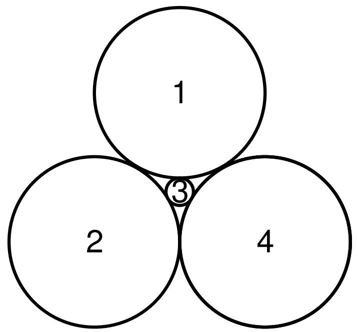
- Erkennung NP-schwer
- viele offene Fragen (chromatische Zahl von String-Graphen)?

Kontaktrepräsentationen

- Regionen dürfen sich nicht überschneiden
- Adjazenzen werden durch Berührung dargestellt.

Satz von Koebe:
Jeder planare Graph ist Kontaktgraph von Kreisen





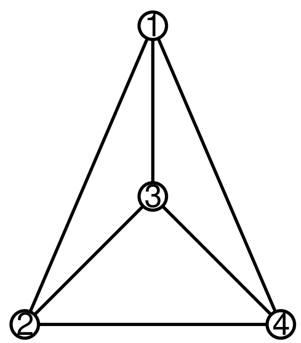
Kontaktgraphen von Streckensegmenten?

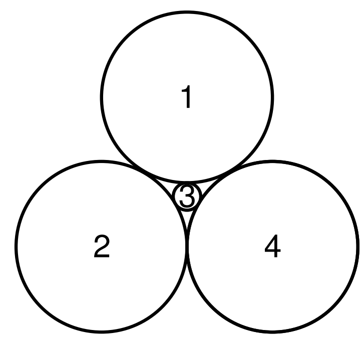
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kontaktrepräsentiationen

- Regionen dürfen sich nicht überschneiden
- Adjazenzen werden durch Berührung dargestellt.

Satz von Koebe:
Jeder planare Graph ist Kontaktgraph von Kreisen





Kontaktgraphen von Streckensegmenten?

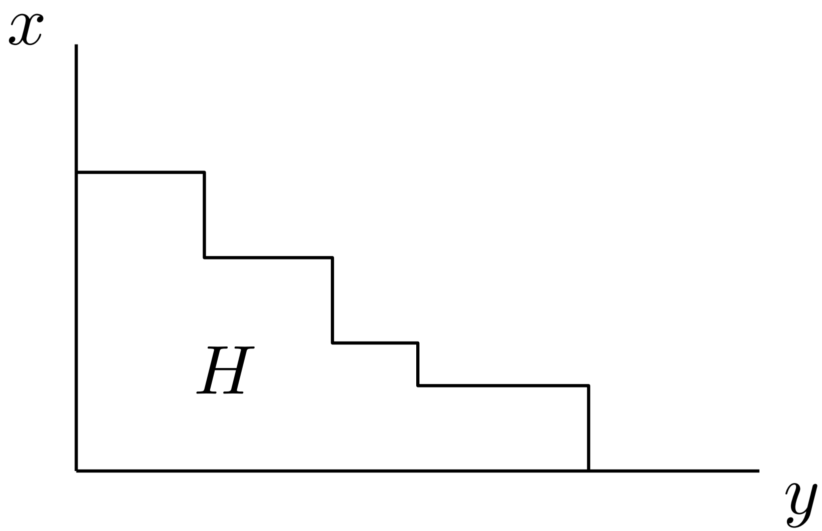
Satz

Jeder bipartite planare Graph ist Kontaktgraph orthogonaler Streckensegmente.

Beweisskizze

Induktion:

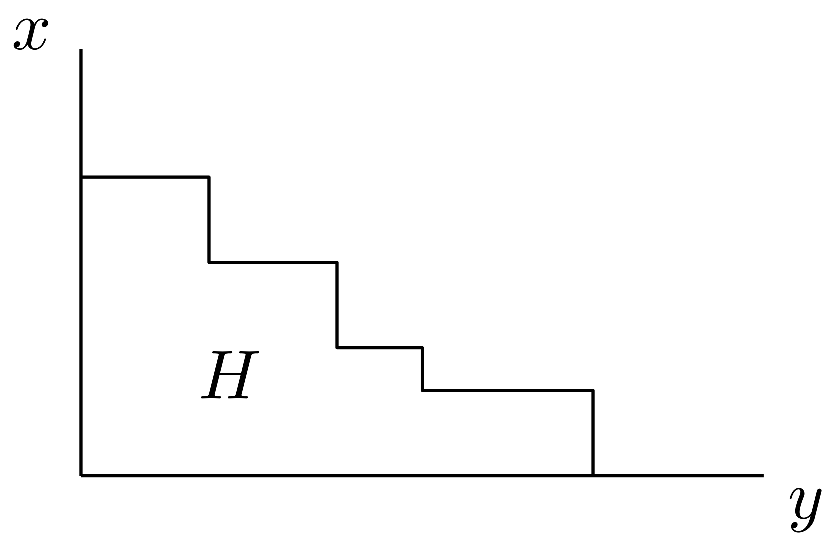
- bipartiter planarer Graph H mit weniger als n Knoten besitzt Repräsentation, sodass äußere Facette eine Treppe bildet.
- Stimmt für $n = 2$



Beweisskizze

Induktion:

- bipartiter planarer Graph H mit weniger als n Knoten besitzt Repräsentation, sodass äußere Facette eine Treppe bildet.
- Stimmt für $n = 2$



Induktionsschritt:

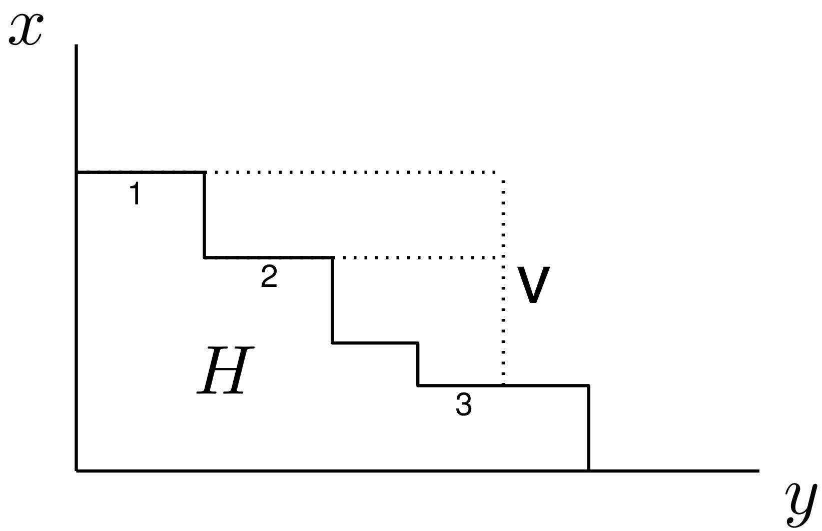
- v Knoten auf äußerer Facette $\rightsquigarrow$ Repräsentation von $G - v$
- Nachbarn von v alle horizontal oder alle vertikal
- Verlängere Nachbarn von v

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Beweisskizze

Induktion:

- bipartiter planarer Graph H mit weniger als n Knoten besitzt Repräsentation, sodass äußere Facette eine Treppe bildet.
- Stimmt für $n = 2$



Induktionsschritt:

- v Knoten auf äußerer Facette $\rightsquigarrow$ Repräsentation von $G - v$
- Nachbarn von v alle horizontal oder alle vertikal
- Verlängere Nachbarn von v

Kontaktrepräsentationen von Strecken

Notwendige Bedingungen Kontaktrepräsentionen:

- Planarität
- Bei Kontakt durch orthogonale Strecken: Zwei-Färbbarkeit

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Kontaktrepräsentationen von Strecken

Notwendige Bedingungen Kontaktrepräsentionen:

- Planarität
- Bei Kontakt durch orthogonale Strecken: Zwei-Färbbarkeit

$\rightsquigarrow$ Erkennungsproblem für Kontaktgraph orthogonaler Streckensegmente gelöst.

Kontaktrepräsentationen von Strecken

Notwendige Bedingungen Kontaktrepräsentionen:

- Planarität
- Bei Kontakt durch orthogonale Strecken: Zwei-Färbbarkeit

$\rightsquigarrow$ Erkennungsproblem für Kontaktgraph orthogonaler Streckensegmente gelöst.

Satz (ohne Beweis)

- Dreiecksfreie planare Graphen sind 3-färbbar
- Besitzen Kontaktrepräsenation von horizontalen, vertikalen und diagonalen (eine Richtung) Strecken

Kontaktrepräsentationen von Strecken

Notwendige Bedingungen Kontaktrepräsentionen:

- Planarität
- Bei Kontakt durch orthogonale Strecken: Zwei-Färbbarkeit

$\rightsquigarrow$ Erkennungsproblem für Kontaktgraph orthogonaler Strecken-segmente gelöst.

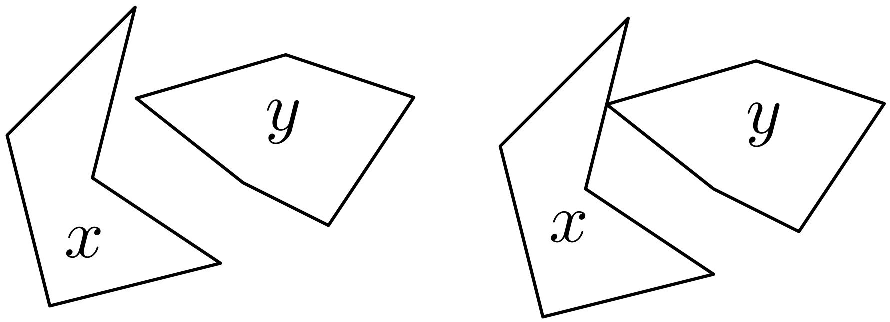
Satz (ohne Beweis)

- Dreiecksfreie planare Graphen sind 3-färbbar
- Besitzen Kontaktrepräsenation von horizontalen, vertikalen und diagonalen (eine Richtung) Strecken

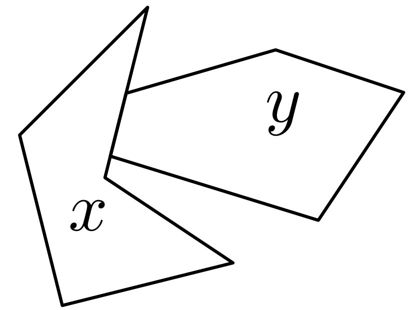
Offene Frage:
Besitzt c-färbbarer planarer Graph Kontaktrepräsentation von Strecken mit c Richtungen?

Kontaktrepräsentation mit Seitenkontakt

- Repräsentiere Knoten durch Polygone
- Berührpunkte gelten nicht als Adjazenz



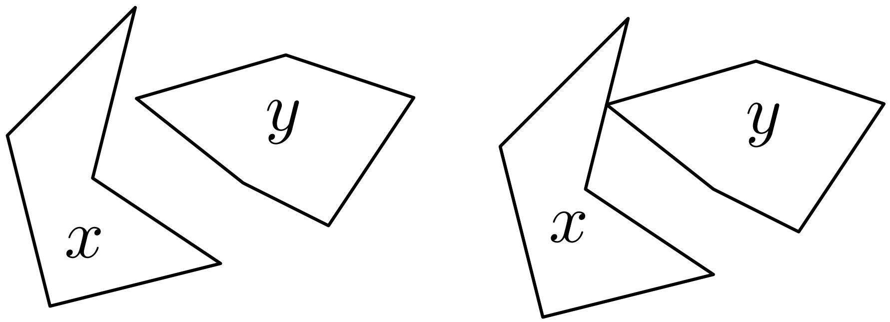
x, y nicht adjazent



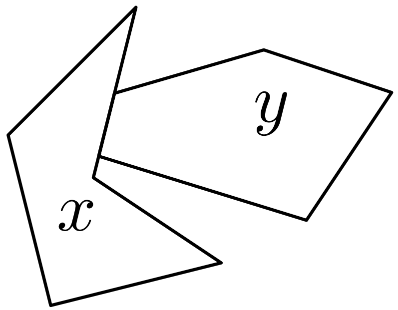
x, y adjazent

Kontaktrepräsentation mit Seitenkontakt

- Repräsentiere Knoten durch Polygone
- Berührpunkte gelten nicht als Adjazenz



x, y nicht adjazent



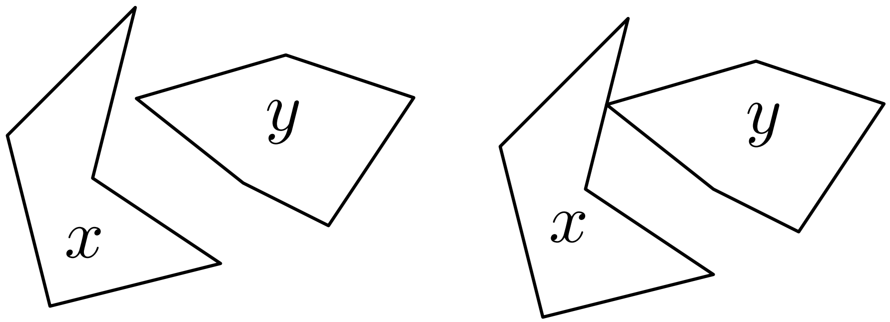
x, y adjazent

Satz

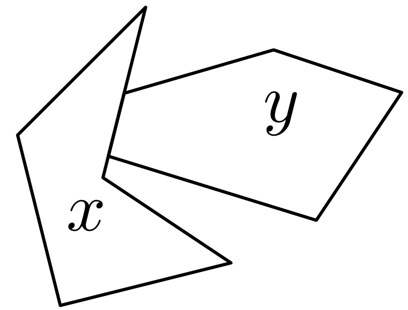
Jeder planare Graph besitzt Seitenkontakt-Repräsentation durch Polygone

Kontaktrepräsentation mit Seitenkontakt

- Repräsentiere Knoten durch Polygone
- Berührpunkte gelten nicht als Adjazenz



x, y nicht adjazent



x, y adjazent

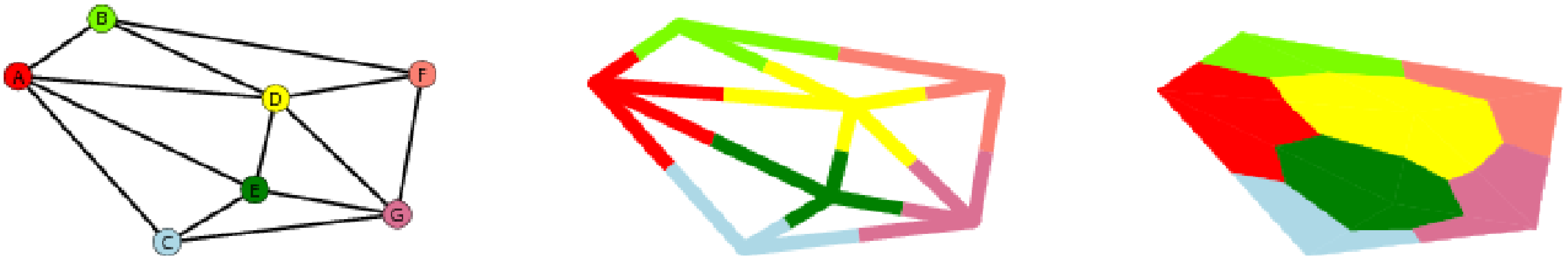
Satz

Jeder planare Graph besitzt Seitenkontakt-Repräsentation durch Polygone

Beweisidee:

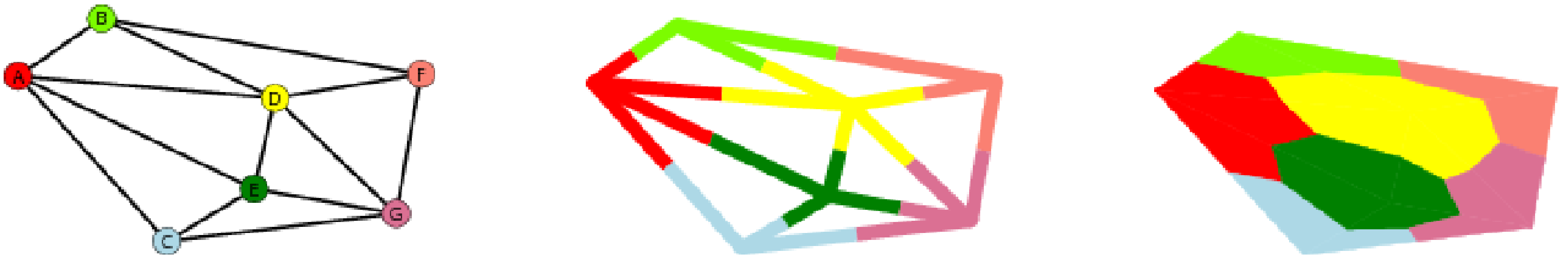
- verwende planare Zeichnung
- verwende Mittepunkte von Kanten und Facetten

Nachteile dieser Repräsentation



- Polygone benötigen bis zu $|V| - 1$ Knicke
- Polygone können nicht-konvex sein

Nachteile dieser Repräsentation



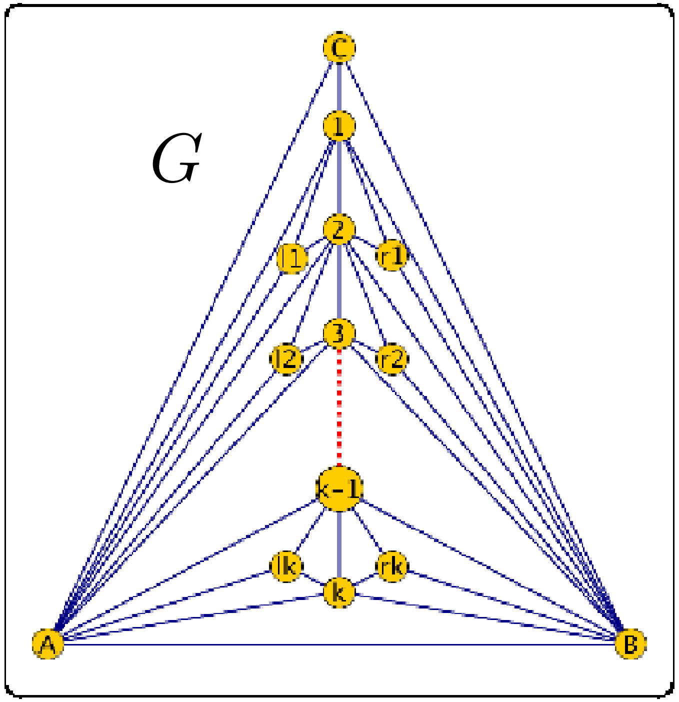
- Polygone benötigen bis zu $|V| - 1$ Knicke
- Polygone können nicht-konvex sein

Kann man mit konvexen Polygonen auskommen?
Wieviele Ecken brauchen die Polygone?

Vier Seiten sind nicht genug!

Satz

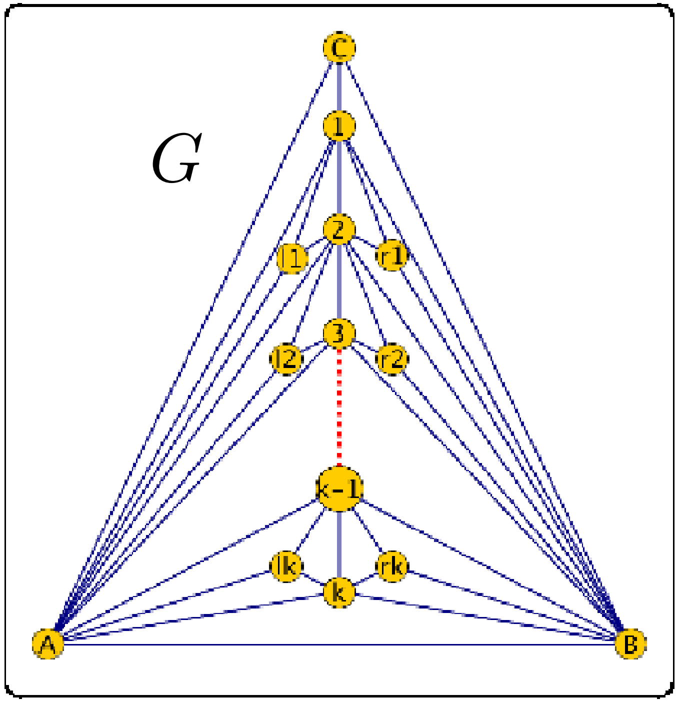
Für ausreichend großes k besitzt G keine Kontaktrepräsentation mit Vierecken



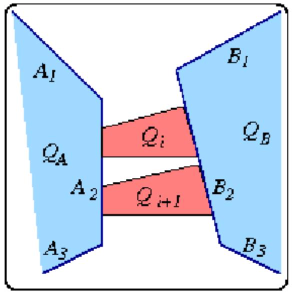
Vier Seiten sind nicht genug!

Satz

Für ausreichend großes k besitzt G keine Kontaktrepräsentation mit Vierecken



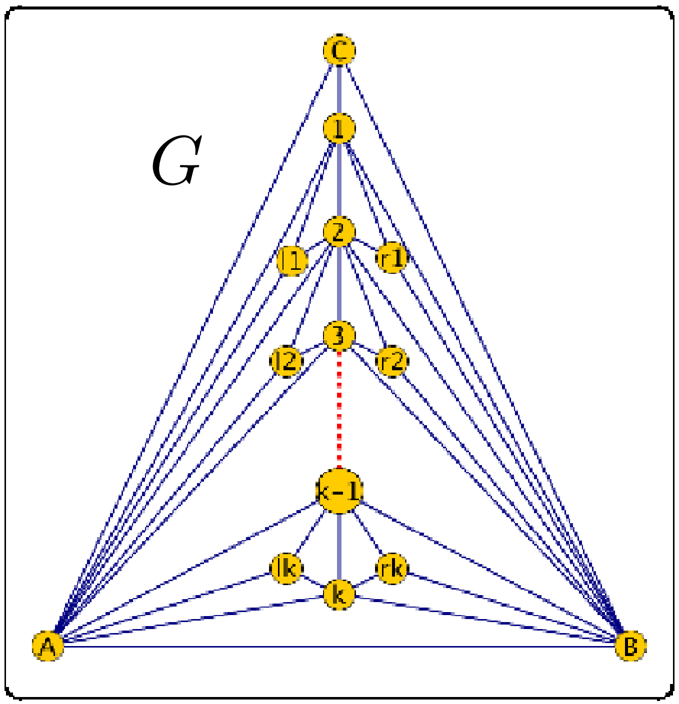
- Q_A, Q_B, Q_C haben ganze Seite auf äußerer Facette
- Betrachte innere Seiten A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 von Q_A, Q_B
- Vierecke von $1, \ldots, k$ bilden Folge entlang der inneren Kanten
- Jedes Q_i bildet Intervall auf A_r und B_s



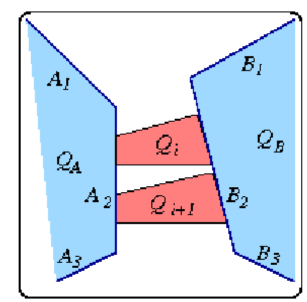
Vier Seiten sind nicht genug!

Satz

Für ausreichend großes k besitzt G keine Kontaktrepräsentation mit Vierecken



- Q_A, Q_B, Q_C haben ganze Seite auf äußerer Facette
- Betrachte innere Seiten A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 von Q_A, Q_B
- Vierecke von $1, \dots, k$ bilden Folge entlang der inneren Kanten
- Jedes Q_i bildet Intervall auf A_r und B_s



Höchstens 8 Intervalle liegen an Eckpunkten von Q_A bzw. Q_B

Betrachte Folge fairer Vierecke auf demselben Intervall

Vier Seiten sind nicht genug! (II)

Lemma

Berühren sich zwei Regionen R und S auf einem Intervall (a, b), so ist bei a eine Ecke von R oder S. Dasselbe gilt für b.

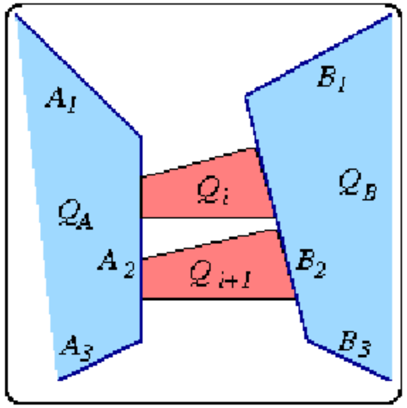
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Vier Seiten sind nicht genug! (II)

Lemma

Berühren sich zwei Regionen R und S auf einem Intervall (a, b), so ist bei a eine Ecke von R oder S. Dasselbe gilt für b.

- (Q_i, Q_{i+1}) Paar fairer, auf gleichem Intervall berührender Vierecke.



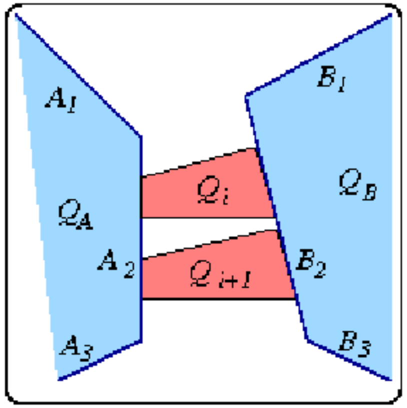
- Q_i, Q_{i+1} adjazent
  $\Rightarrow$ benachbarte Seiten berühren sich.

Vier Seiten sind nicht genug! (II)

Lemma

Berühren sich zwei Regionen R und S auf einem Intervall (a, b), so ist bei a eine Ecke von R oder S. Dasselbe gilt für b.

- (Q_i, Q_{i+1}) Paar fairer, auf gleichem Intervall berührender Vierecke.



- Q_i, Q_{i+1} adjazent
  $\Rightarrow$ benachbarte Seiten berühren sich.
- Repräsentation von r_i, ℓ_i erfordert, dass sich Q_i und Q_{i+1} außerhalb von Q_A, Q_B berühren.
- Obiges Lemma liefert weitere Ecke!

Fünf Seiten sind nicht genug!

Idee: genauso!

- Finde Tripel fairer Fünfecke
- Zeige, dass zu wenig Ecken da sind

Sechs Seiten? 100 Seiten?

Fünf Seiten sind nicht genug!

Idee: genauso!

- Finde Tripel fairer Fünfecke
- Zeige, dass zu wenig Ecken da sind

Sechs Seiten? 100 Seiten?

Sechs Seiten sind genug!

- Algorithmus von Kant zeichnet Dualgraph von G, sodass alle Facetten konvex sind und alle Kanten (bis auf eine) Steigung $-1, 0$ oder 1 haben.
- Verwende Facetten als Repräsentation für Knoten

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Fünf Seiten sind nicht genug!

Idee: genauso!

- Finde Tripel fairer Fünfecke
- Zeige, dass zu wenig Ecken da sind

Sechs Seiten? 100 Seiten?

Sechs Seiten sind genug!

- Algorithmus von Kant zeichnet Dualgraph von G, sodass alle Facetten konvex sind und alle Kanten (bis auf eine) Steigung $-1, 0$ oder 1 haben.
- Verwende Facetten als Repräsentation für Knoten

Was ist mit k-Ecken für $3 \leq k \leq 5$?

Touching Triangle Graphs (TTG)

Seitenkontakt-Repräsentation durch Dreiecke

- Repräsentation mit oder ohne Löcher?

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Touching Triangle Graphs (TTG)

Seitenkontakt-Repräsentation durch Dreiecke

- Repräsentation mit oder ohne Löcher?

Welche Graphen lassen eine solche Repräsentation zu?

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Touching Triangle Graphs (TTG)

Seitenkontakt-Repräsentation durch Dreiecke

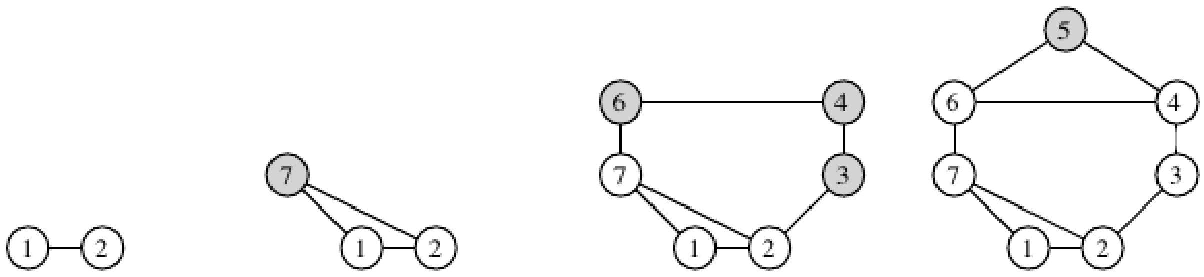
- Repräsentation mit oder ohne Löcher?

Welche Graphen lassen eine solche Repräsentation zu?

Gibt es Graphklassen, die solche eine Repräsentation zulassen?
Charakterisierungen?

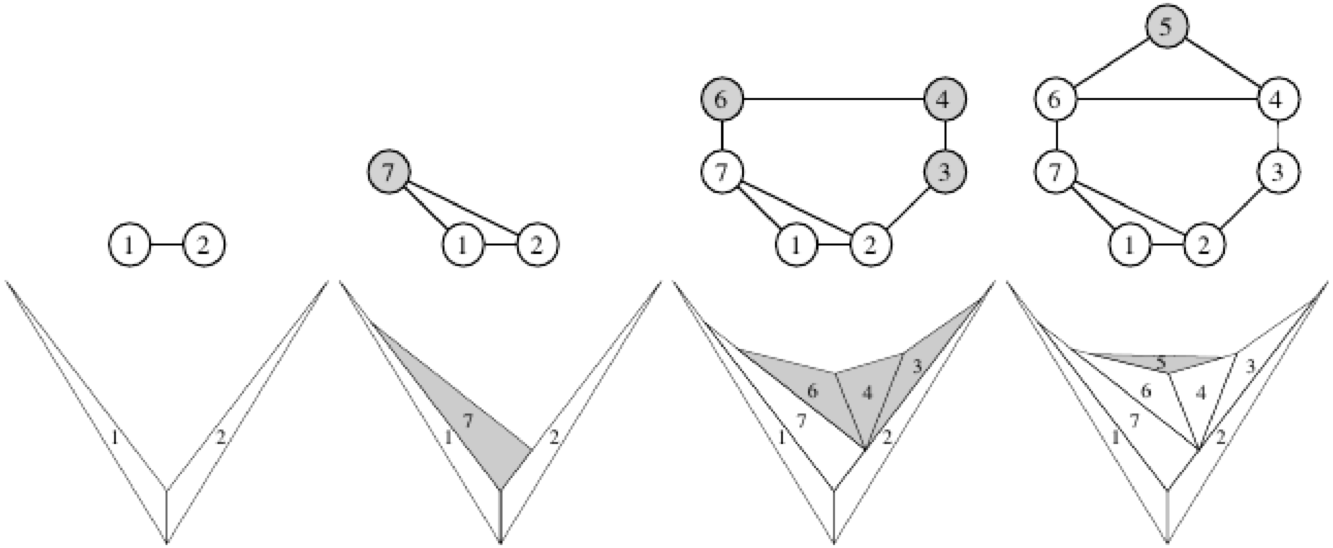
Außenplanare Graphen

- Berechne außenplanare Einbettung
- Berechne Abschälordnung von Grad-2-Ketten auf äußerer Facette



Außenplanare Graphen

- Berechne außenplanare Einbettung
- Berechne Abschälordnung von Grad-2-Ketten auf äußerer Facette

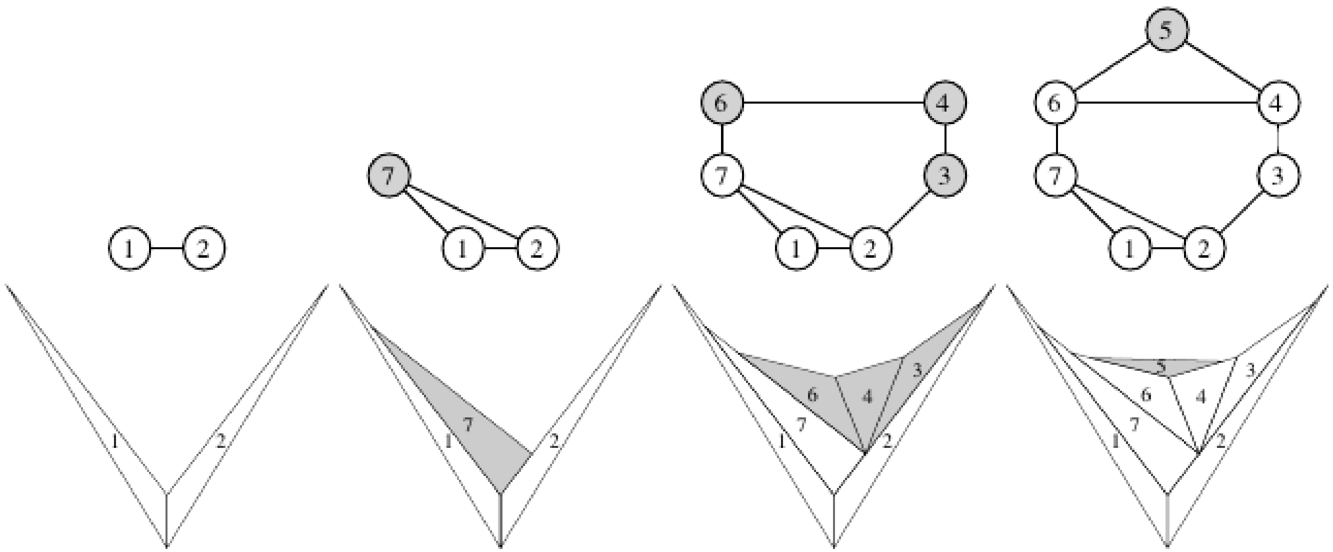


- Setze rückwärts zusammen, halte obere Einhüllende konkav

Das geht in Linearzeit!

Außenplanare Graphen

- Berechne außenplanare Einbettung
- Berechne Abschälordnung von Grad-2-Ketten auf äußerer Facette

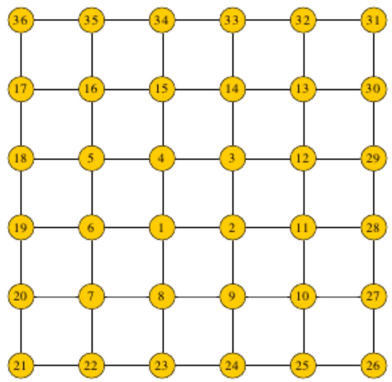


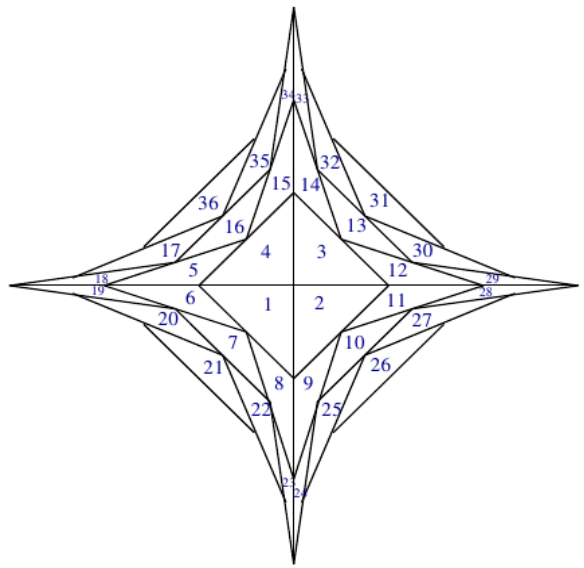
- Setze rückwärts zusammen, halte obere Einhüllende konkav

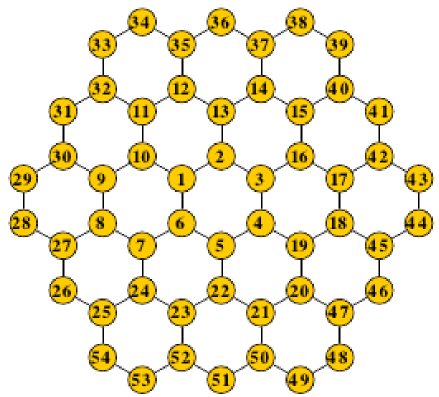
Das geht in Linearzeit!

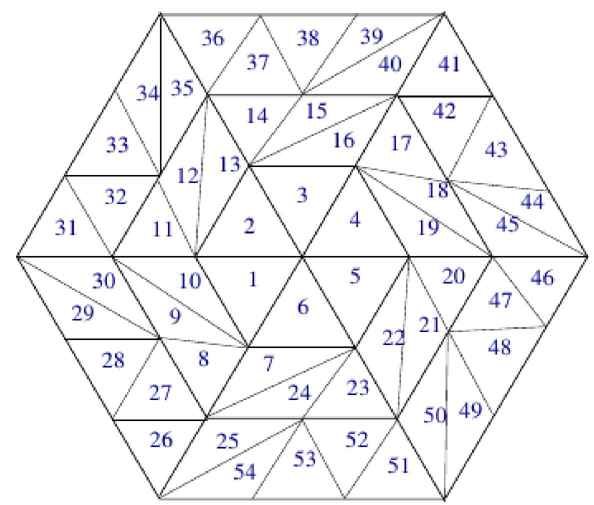
Ist das alles? Welche Graphen sind nicht außenplanar? Kann man einen davon repräsentieren?

Gittergraphen









Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

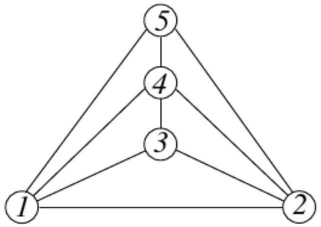
Notwendige Bedingungen für TTGs

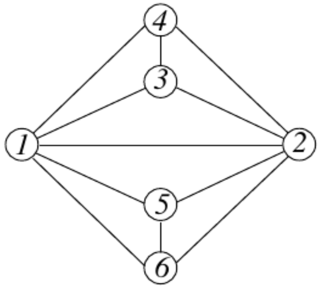
Satz

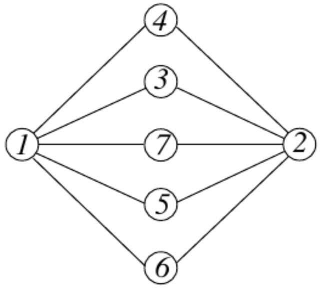
Seit G ein TTG-Graph und u und v zwei Knoten von G.

- Sind u und v verbunden, so haben sie höchstens drei gemeinsame Nachbarn.
- Anderenfalls haben sie höchstens vier gemeinsame Nachbarn.

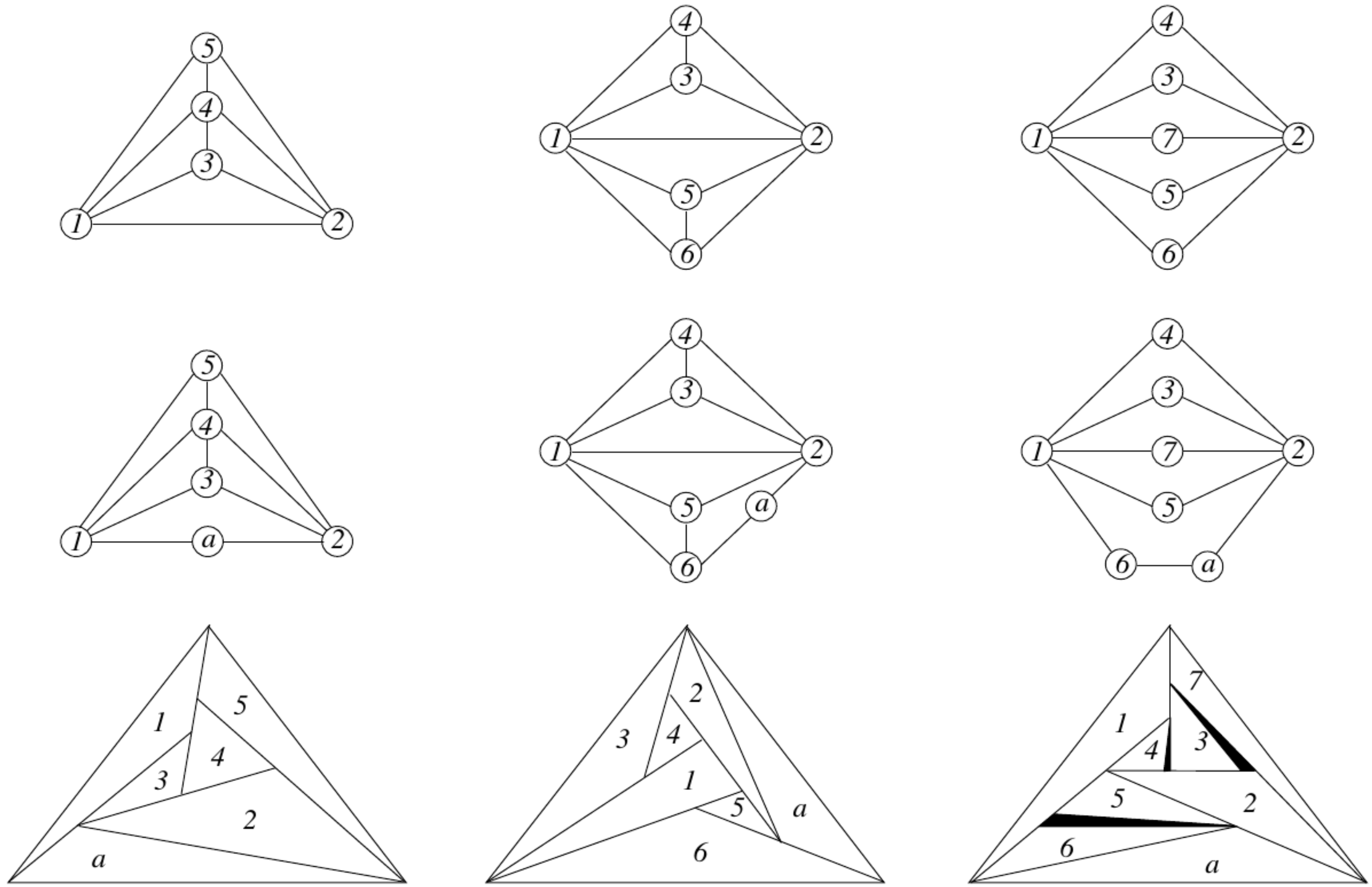
Beispiele, die nicht TTG sind







Beispiele, die nicht TTG sind



Unterteilt man eine Kante, so sind es TTG-Graphen

Das erschwert die Charakterisierung!