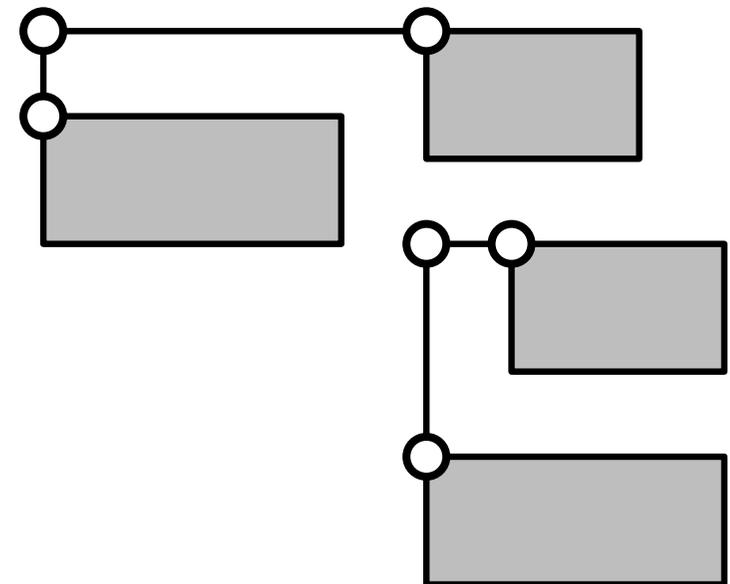
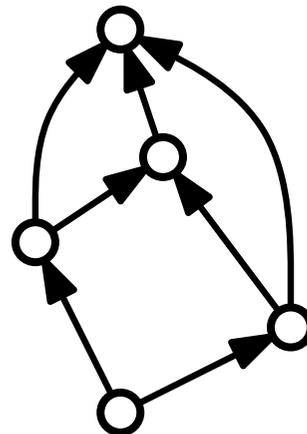
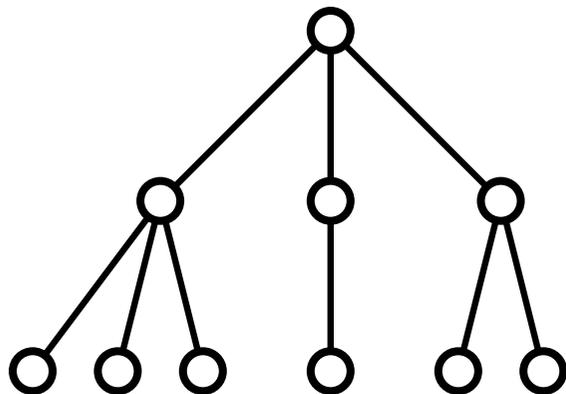


# Fünfte Übung

## Algorithmen zu Visualisierung von Graphen Teile-und-Herrsche und s-t-Ordnungen

Thomas Bläsius

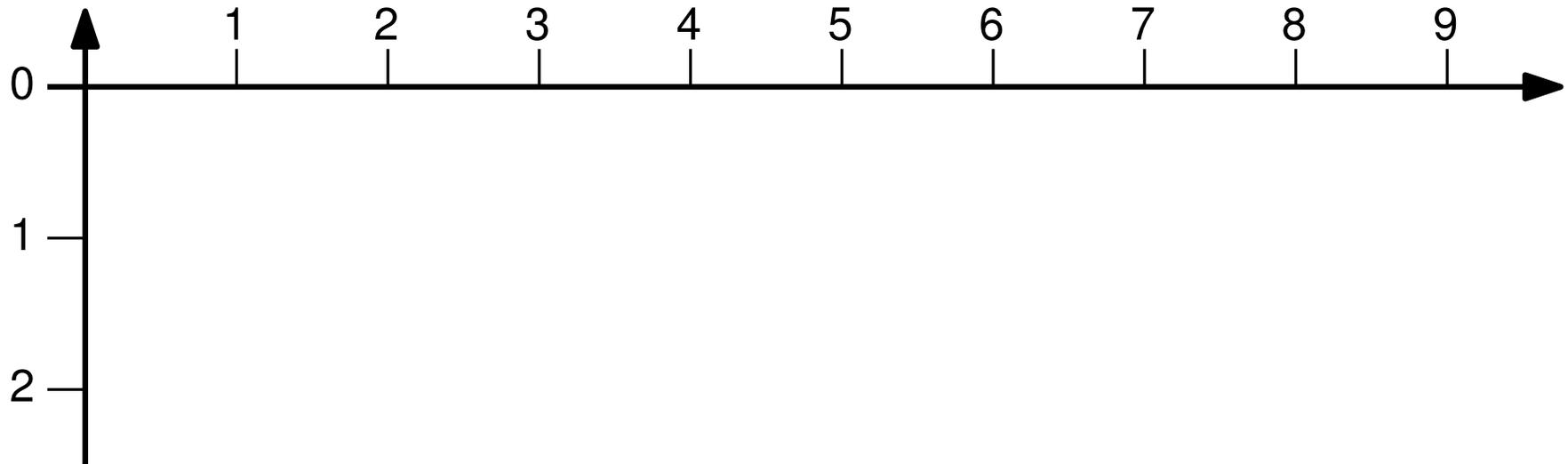
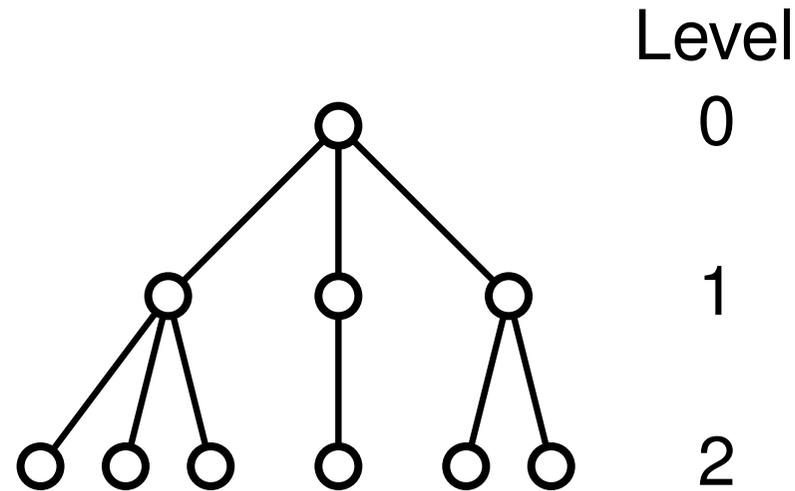
INSTITUTE OF THEORETICAL INFORMATICS  
KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY (KIT)



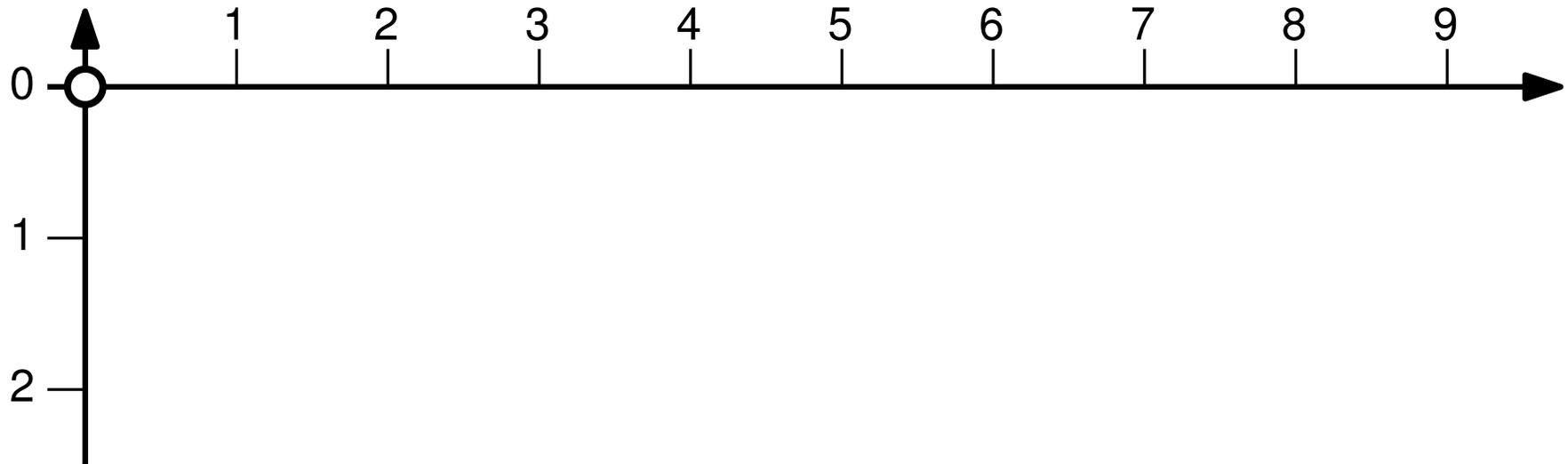
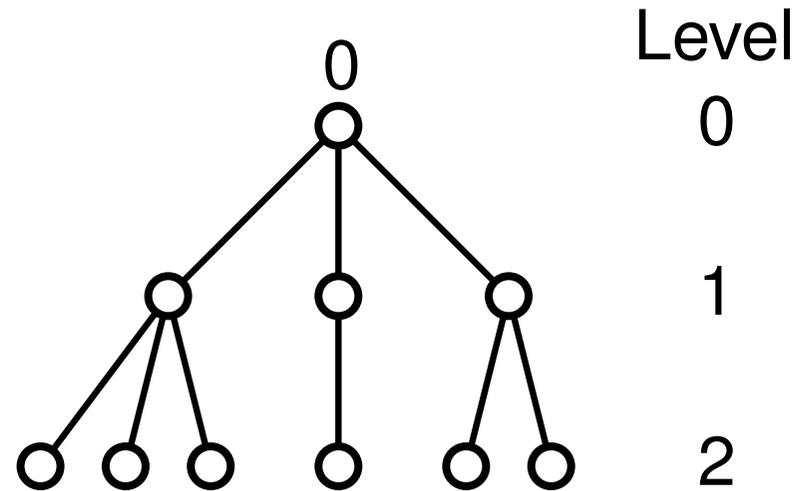
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout

In der Vorlesung wurde ein einfaches Verfahren zum Zeichnen von Bäumen vorgestellt, das jedem Knoten  $v$  die Koordinaten  $x(v) = \text{pre-/in-/postorder}(v)$  und  $y(v) = -\text{tiefe}(v)$  zuordnet. Garantiert dieses Verfahren auch dann noch eine geradlinige Gitterzeichnung, wenn man für die  $x$ -Koordinaten die sogenannte *levelorder*-Nummerierung verwendet, die nacheinander in einer Breitensuche alle Knoten der gleichen Tiefe von links nach rechts besucht?

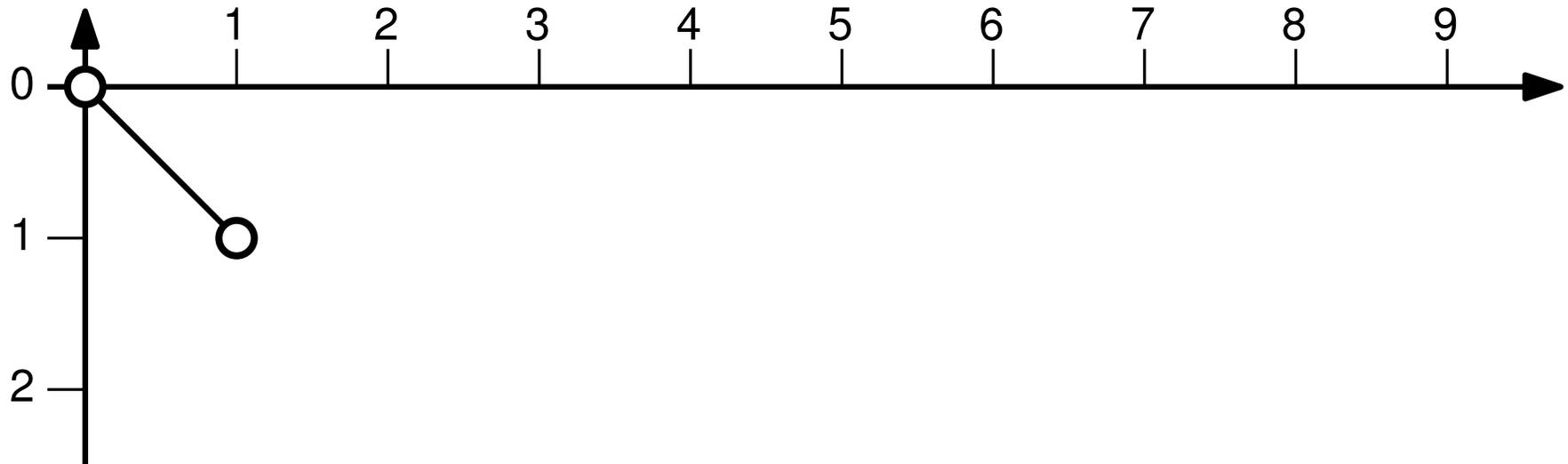
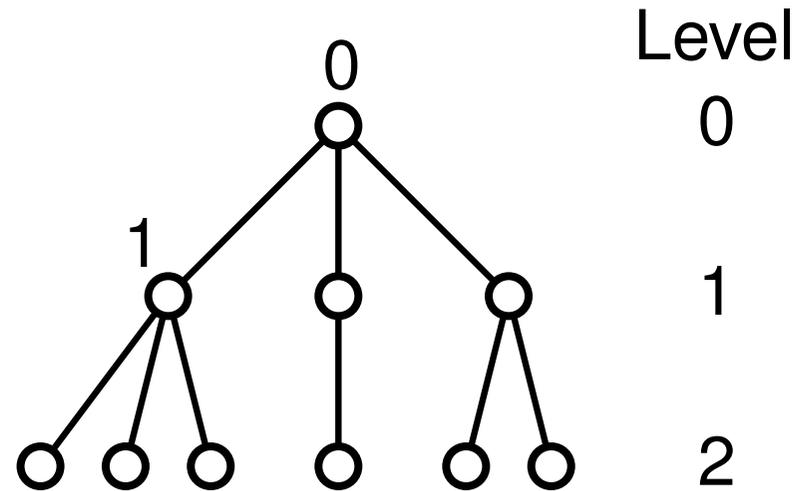
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



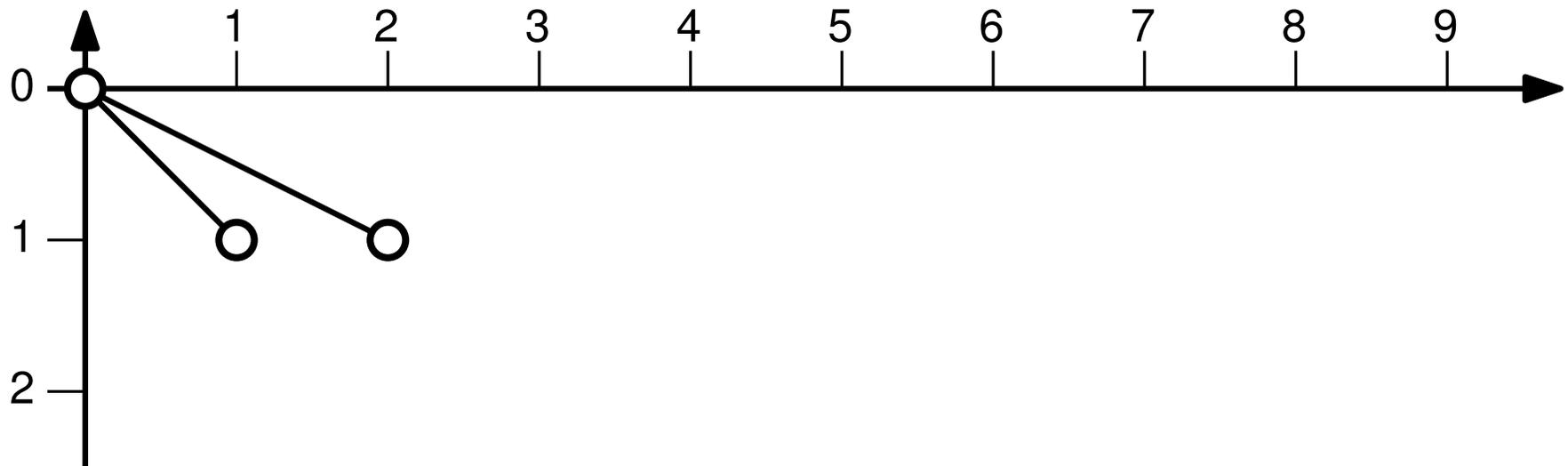
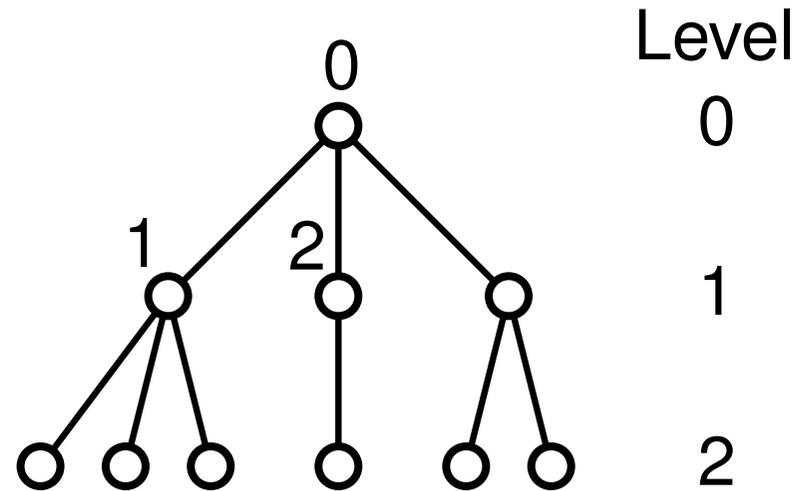
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



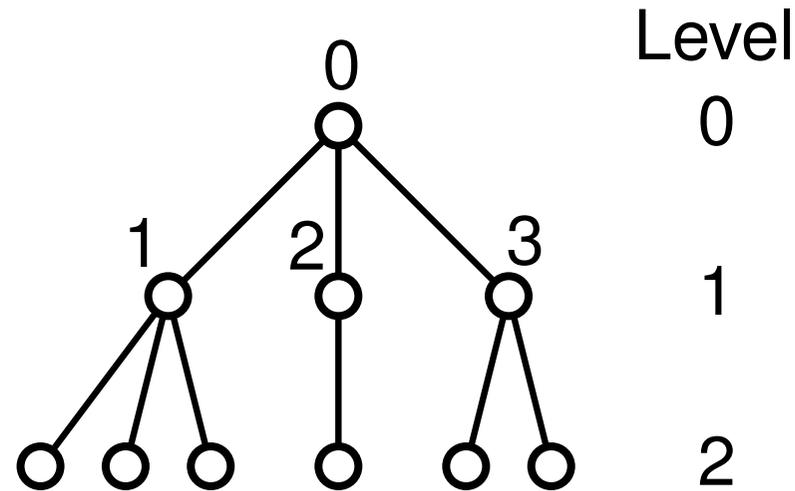
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



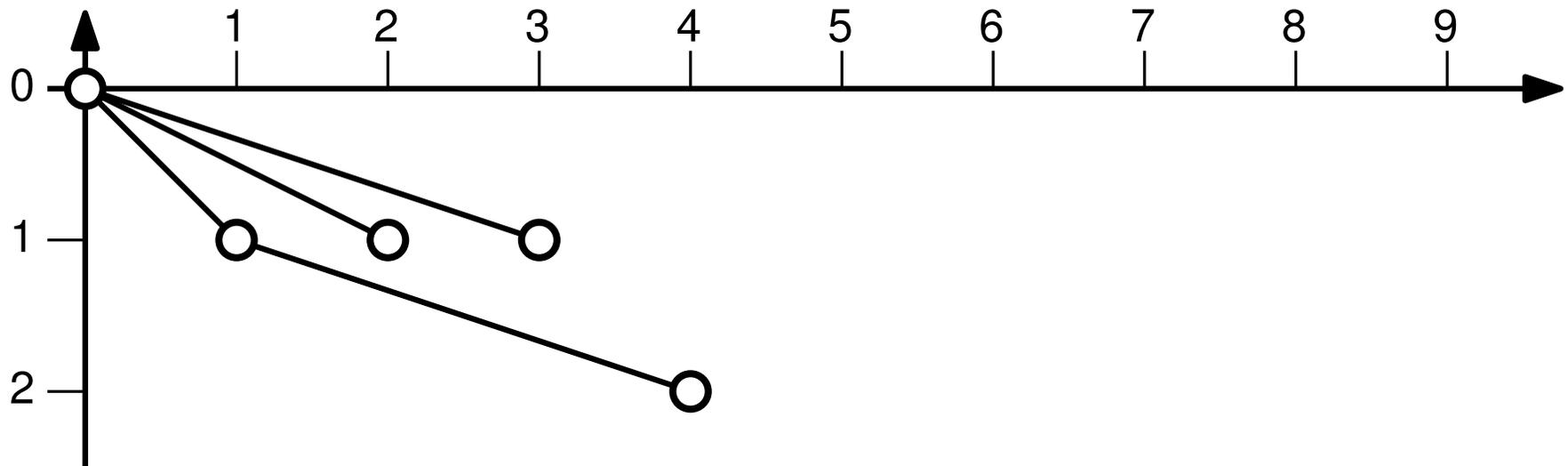
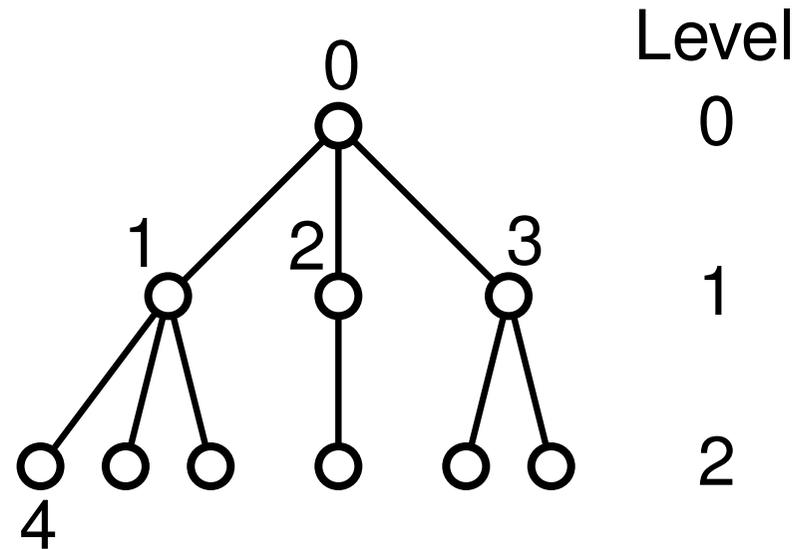
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



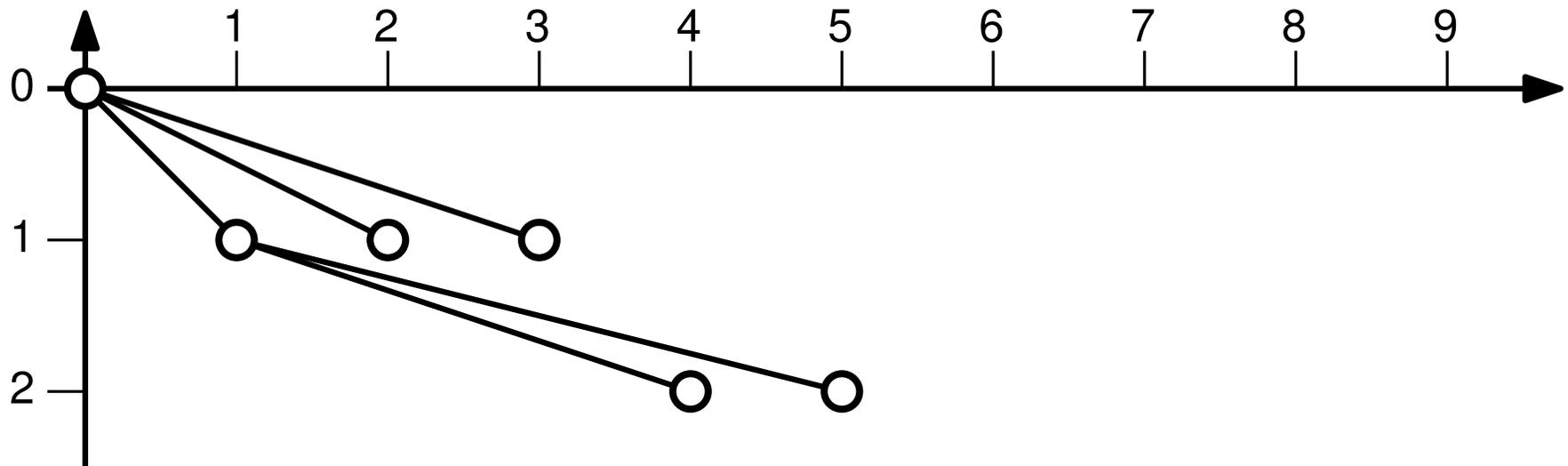
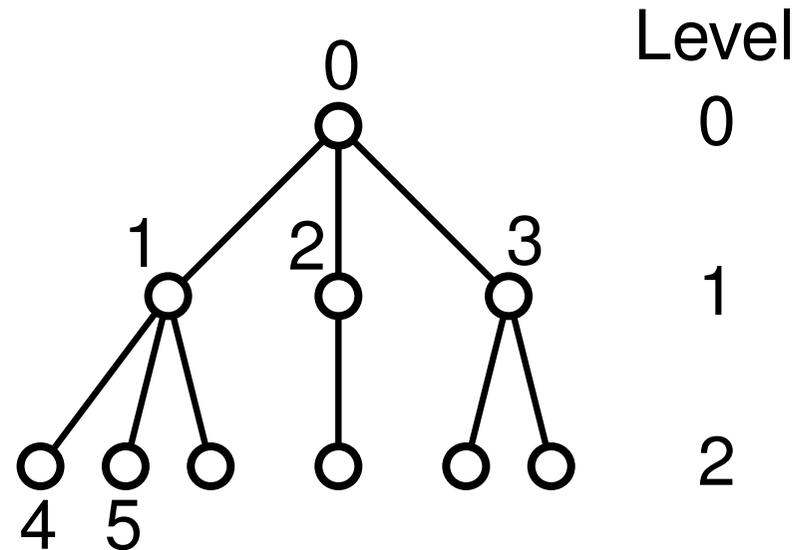
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



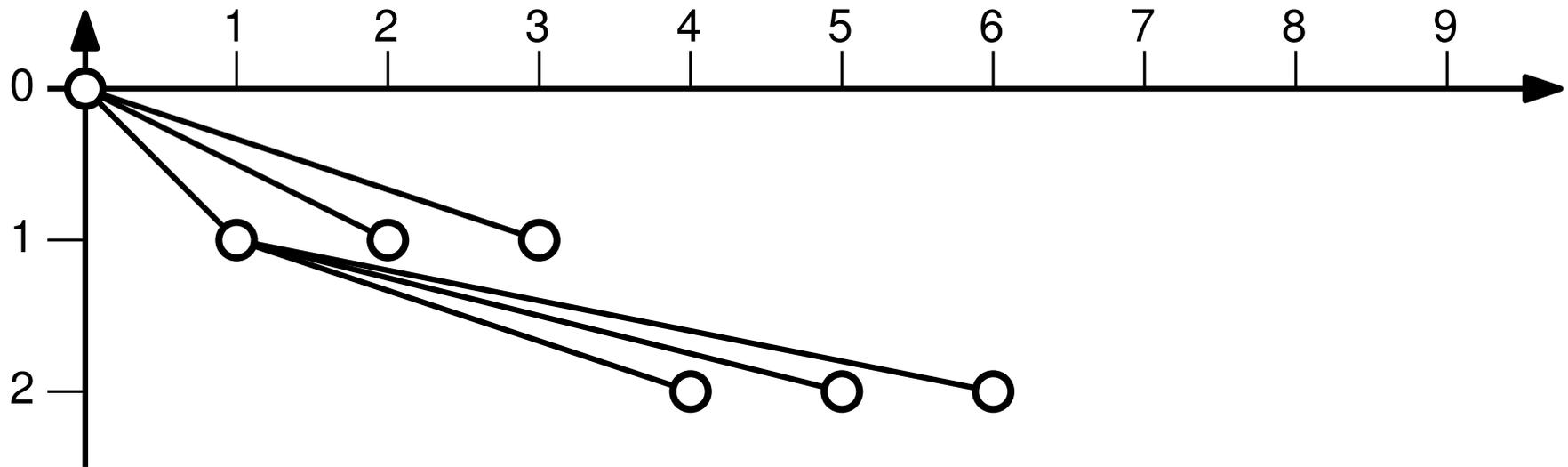
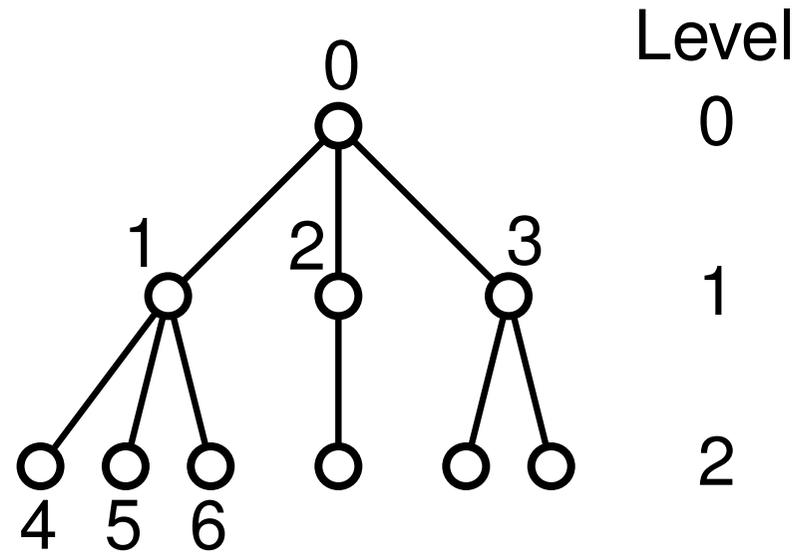
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



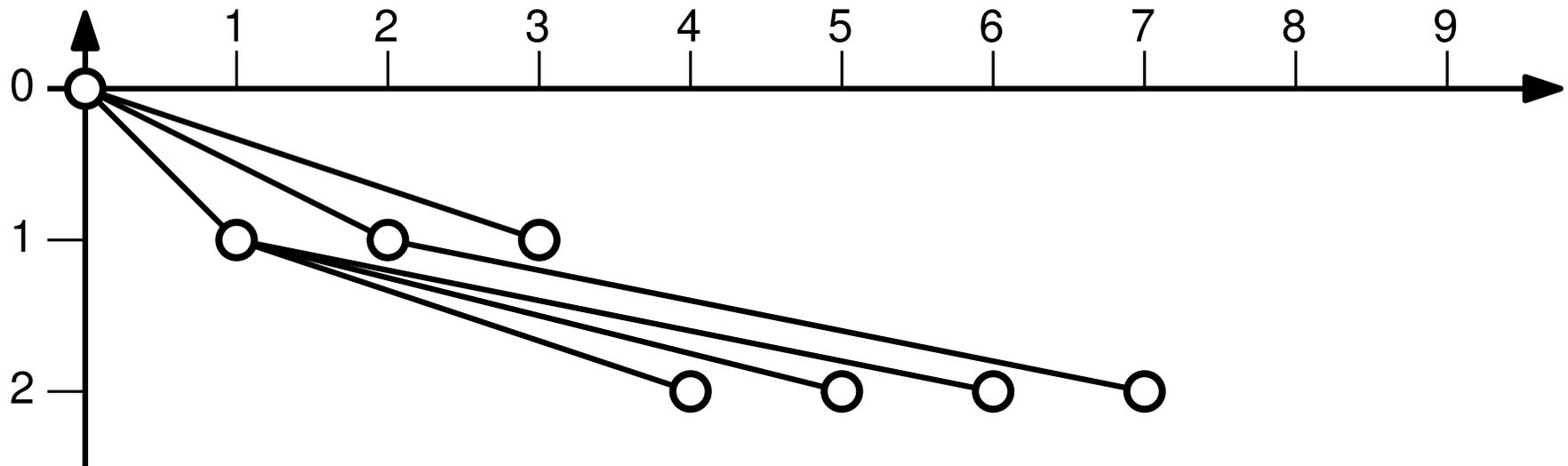
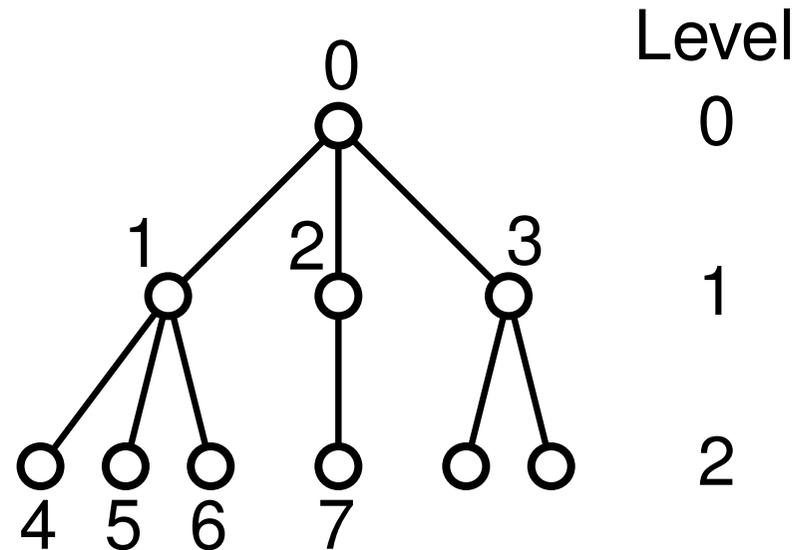
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



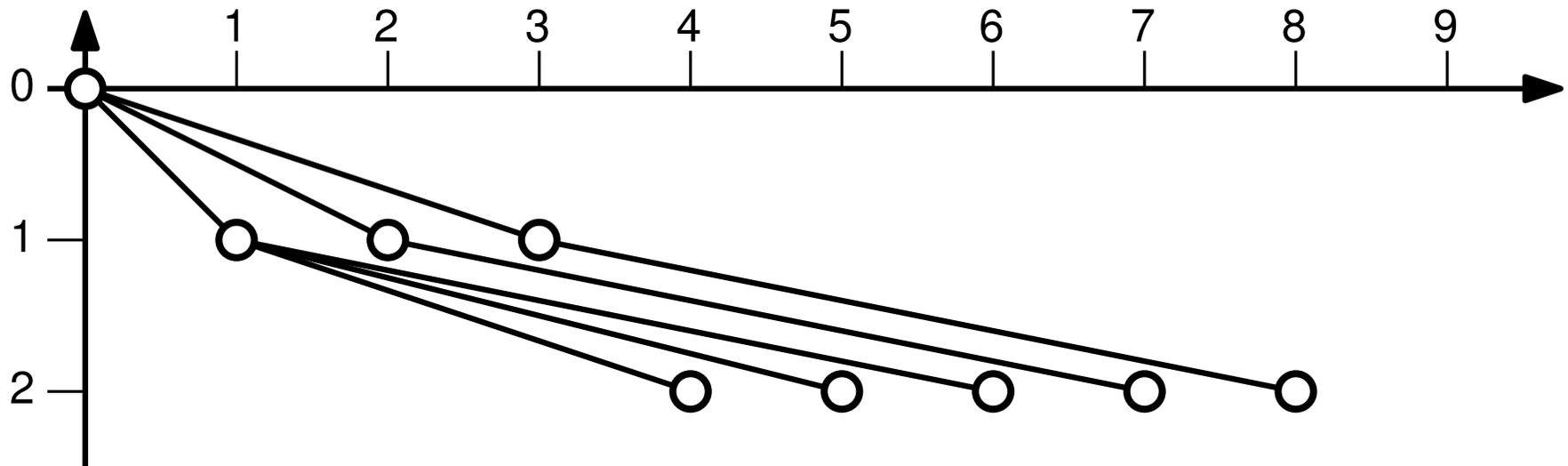
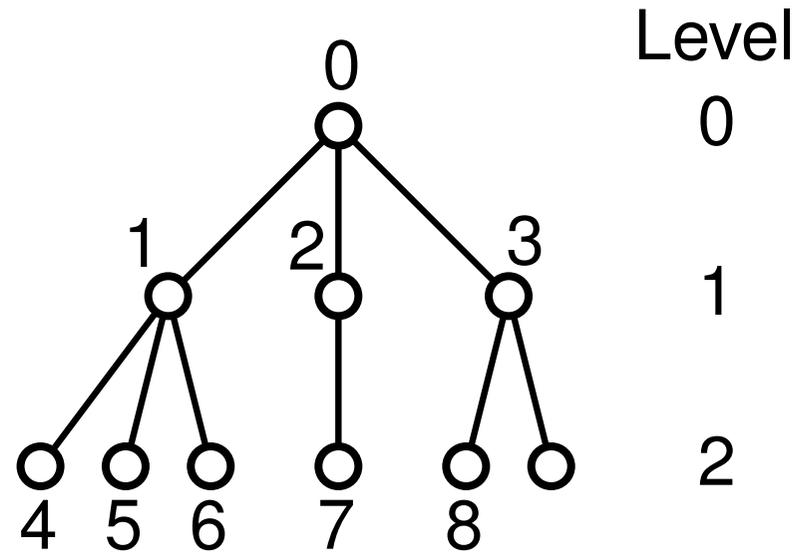
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



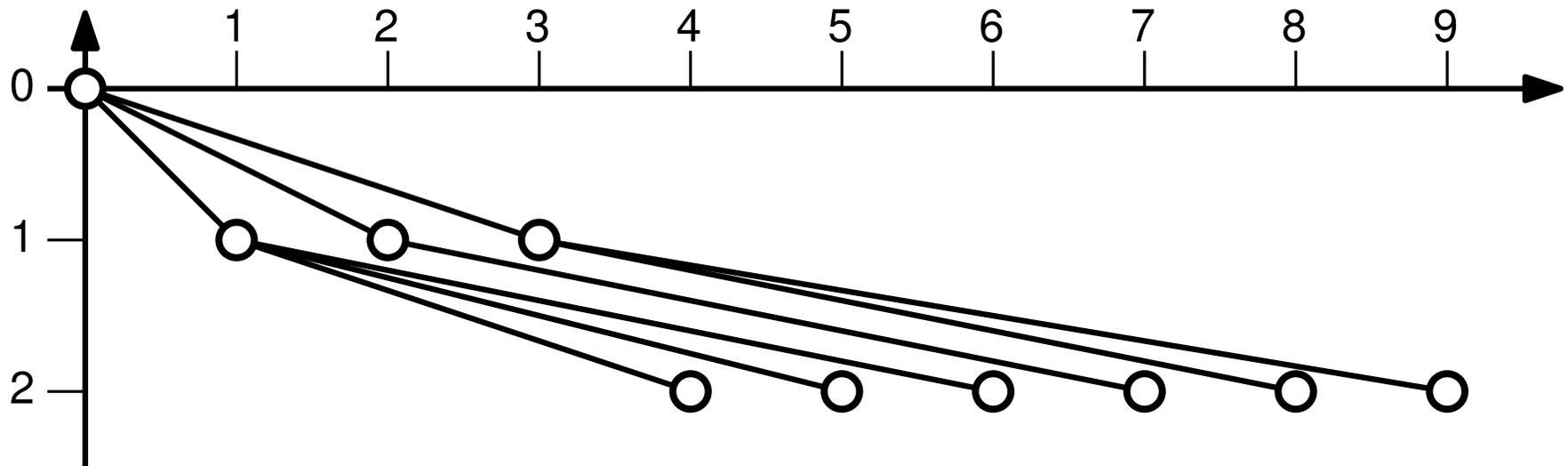
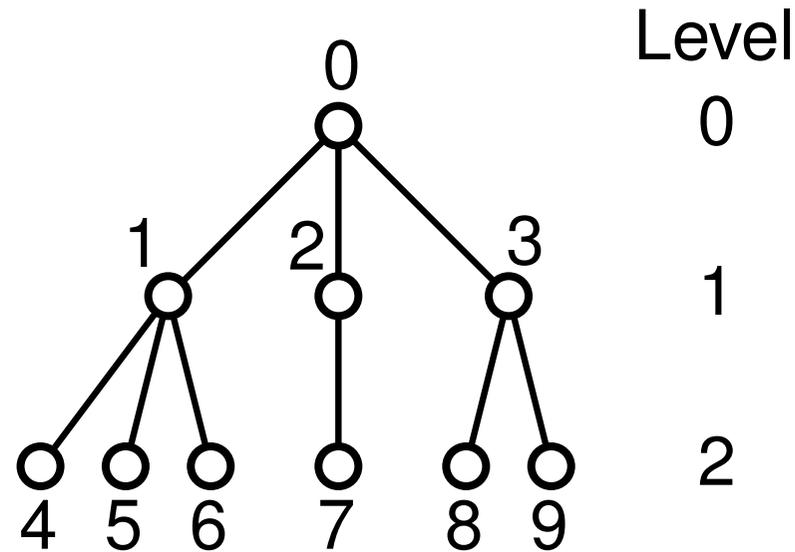
# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



# Aufgabe 1 – Levelorder-Baumlayout



# Aufgabe 2 – HV-Layouts

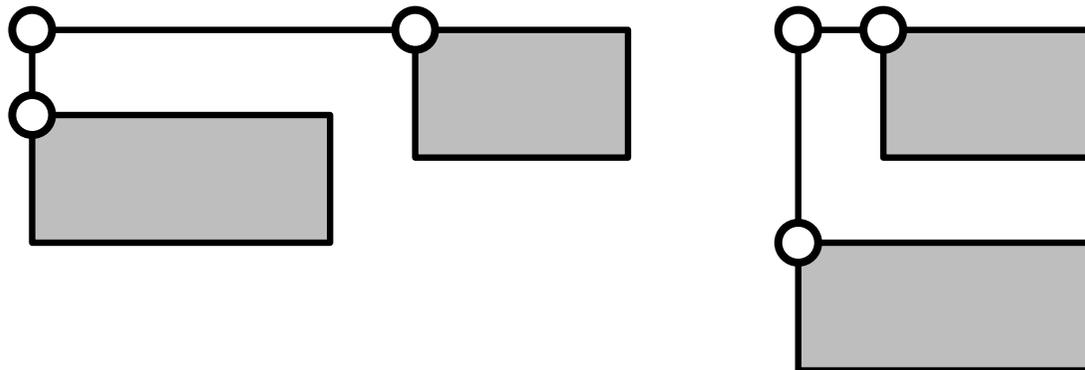
Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Binärbaum in  $\mathcal{O}(n^2)$  Zeit ein HV-Layout minimaler Fläche berechnet. Betrachten Sie dabei sowohl feste als auch variable Einbettung.

# Aufgabe 2 – HV-Layouts

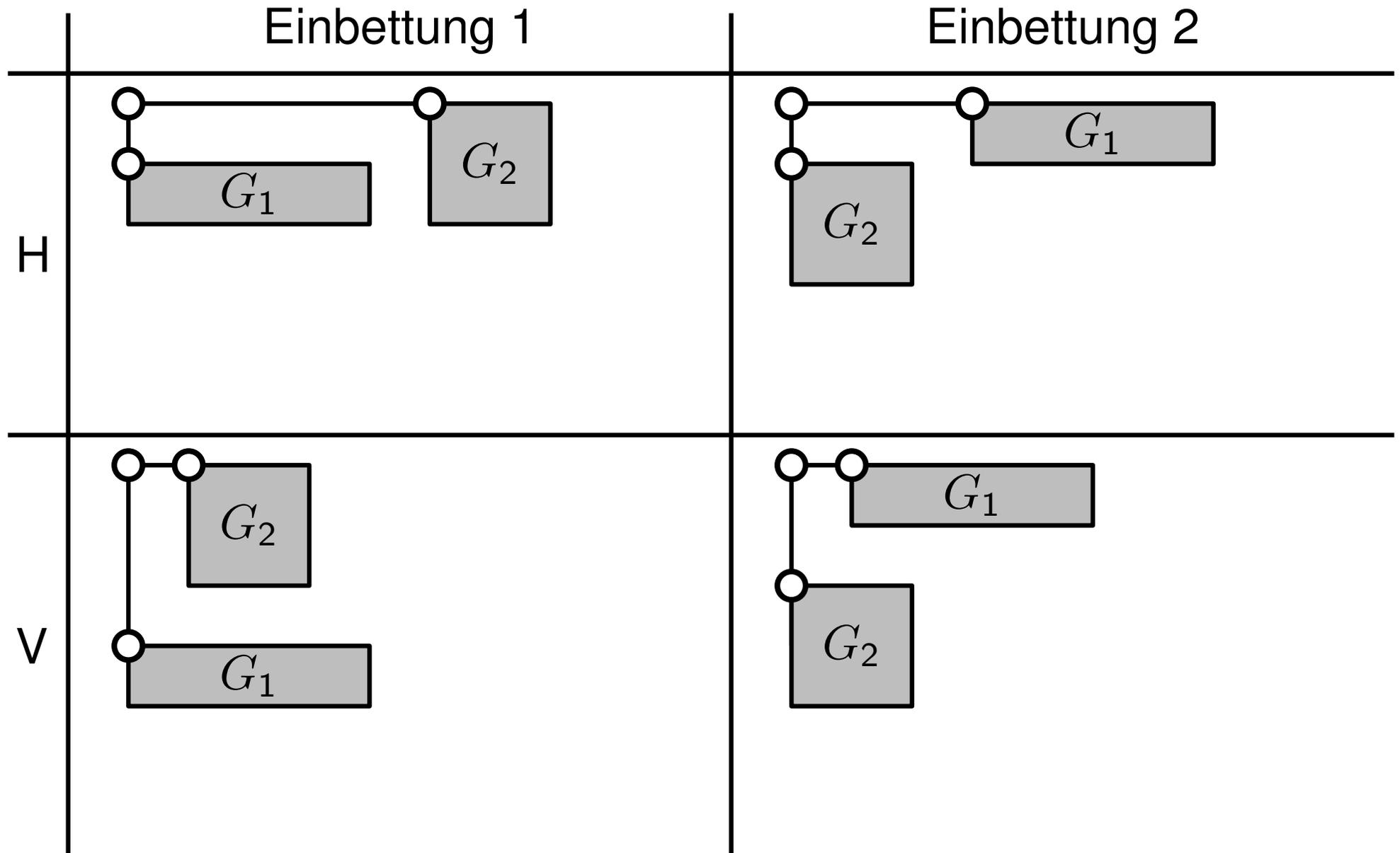
Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Binärbaum in  $\mathcal{O}(n^2)$  Zeit ein HV-Layout minimaler Fläche berechnet. Betrachten Sie dabei sowohl feste als auch variable Einbettung.

zur Erinnerung:

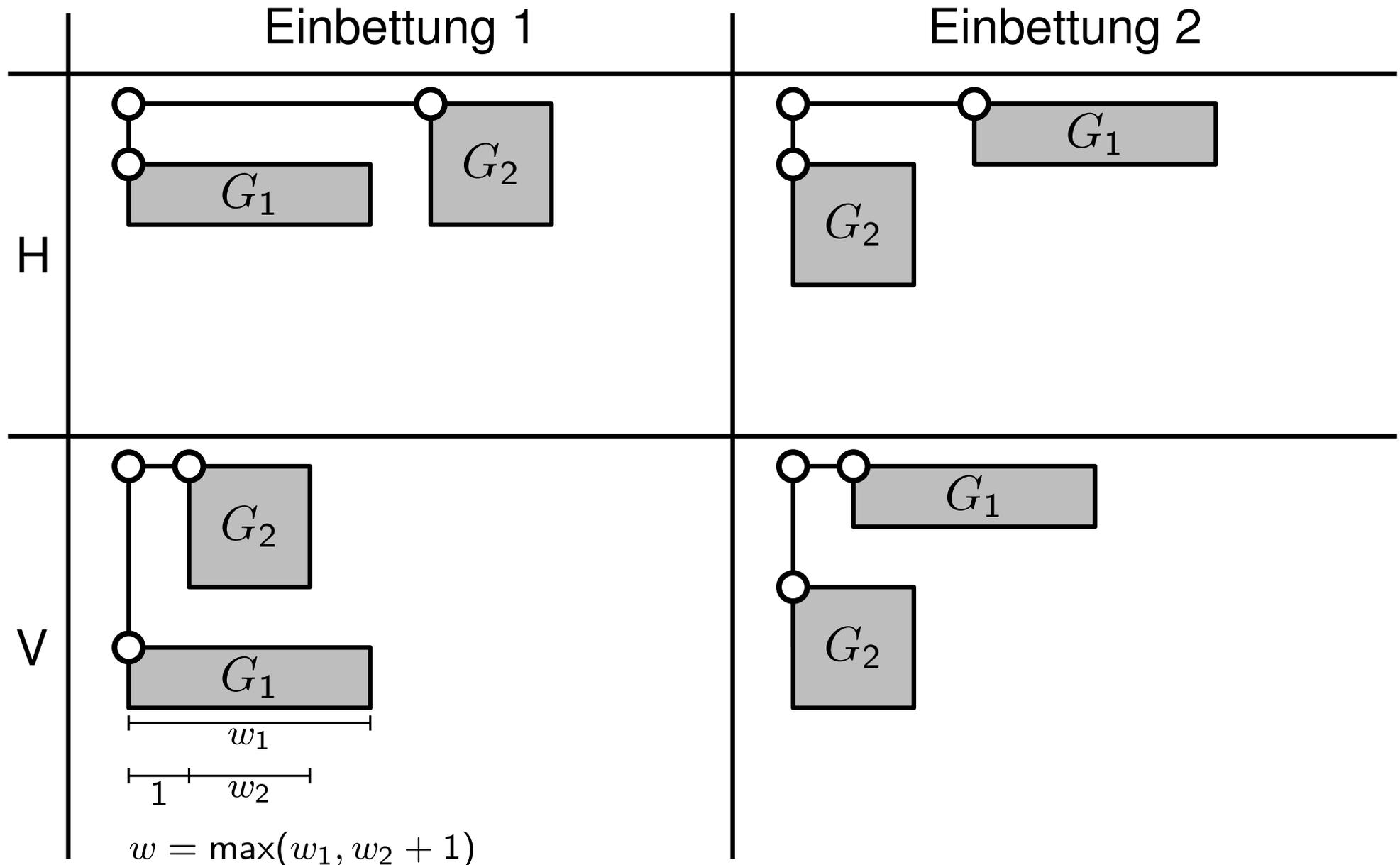
- Zeichne rechten und linken Teilbaum in Rechteck mit der Wurzel links oben
- Kombiniere Teilbäume horizontal oder vertikal
- Minimiere die benötigte Fläche  $\rightarrow$  Dynamisches Programm



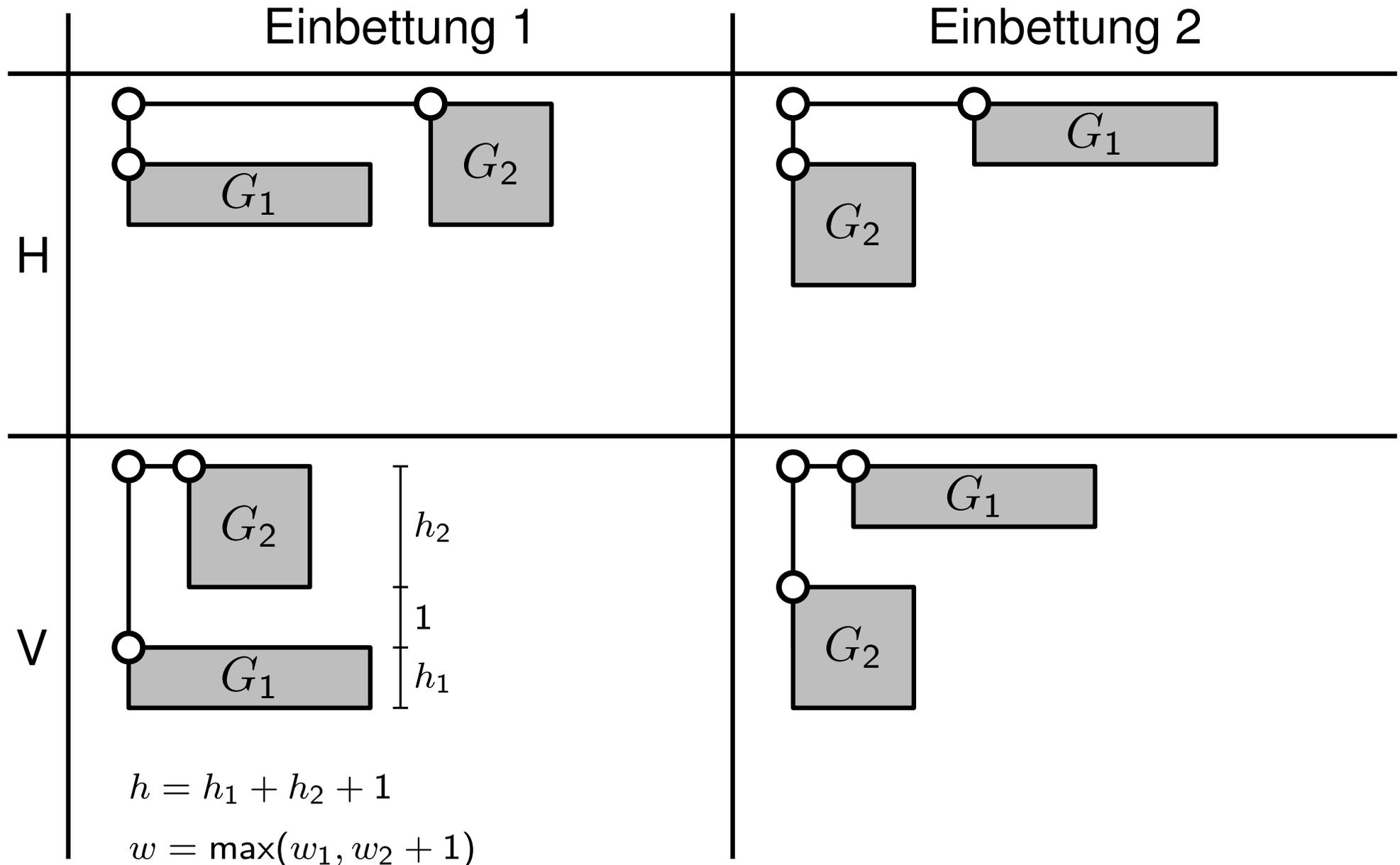
# HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)



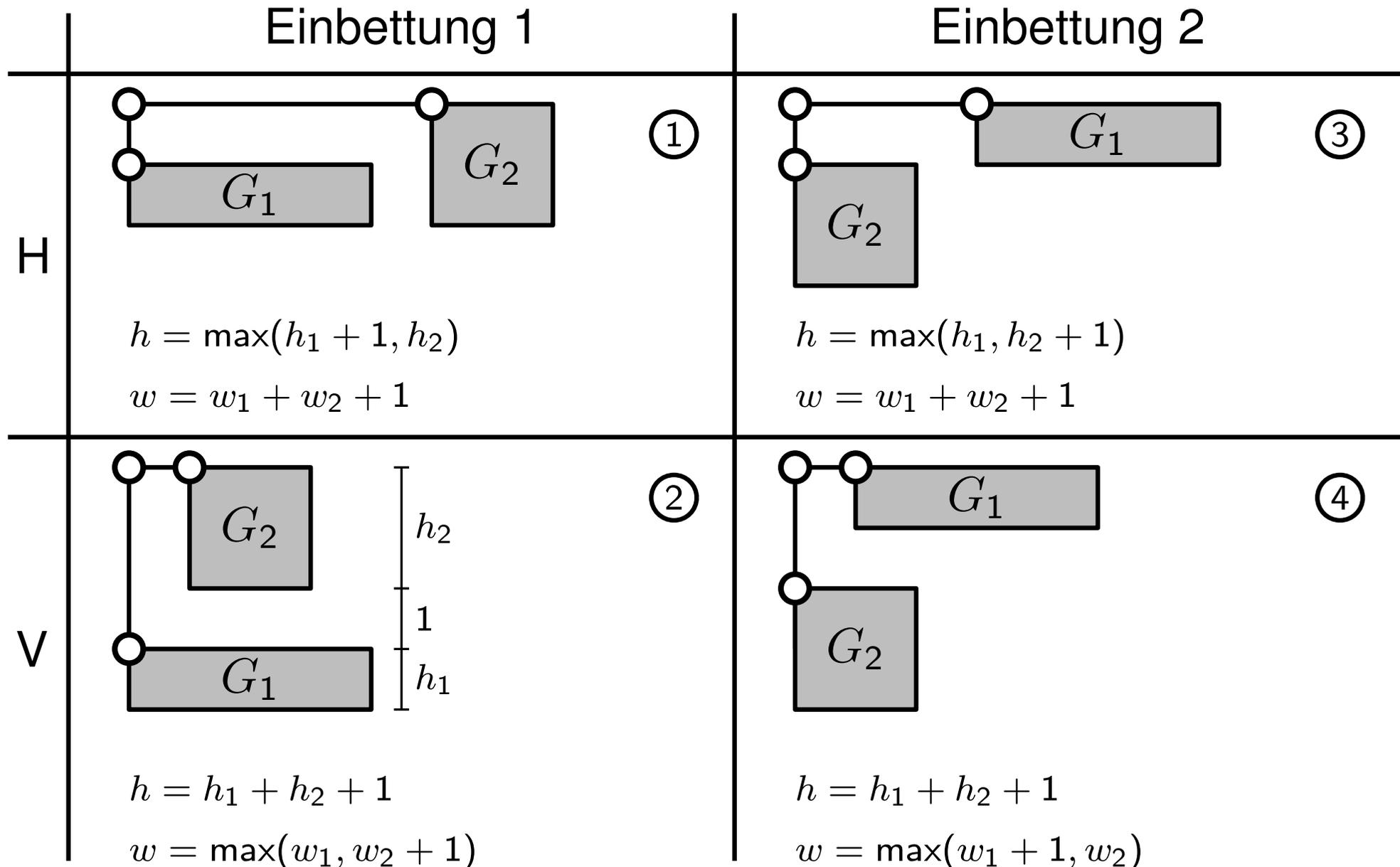
# HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)



# HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)



# HV-Layouts – Kombinationen (var. Einb.)



# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①

$$(w, h) = (7, 2)$$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①

$$(w, h) = (7, 2)$$

②

$$(w, h) = (4, 4)$$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①

$$(w, h) = (7, 2)$$

②

$$(w, h) = (4, 4)$$

③

$$(w, h) = (7, 3)$$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①

$$(w, h) = (7, 2)$$

②

$$(w, h) = (4, 4)$$

③

$$(w, h) = (7, 3)$$

④

$$(w, h) = (5, 4)$$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①	②	③	④
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$	$(w, h) = (7, 3)$	$(w, h) = (5, 4)$

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

②

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

③

$$h = \max(h_1, h_2 + 1)$$

④

$$h = h_1 + h_2 + 1$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1, w_2 + 1)$$

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$w = \max(w_1 + 1, w_2)$$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①

$$(w, h) = (7, 2)$$

②

$$(w, h) = (4, 4)$$

③

$$(w, h) = (7, 3)$$

④

$$(w, h) = (5, 4)$$

Können mehr als zwei Kombinationen übrig bleiben?

# HV-Layouts – Dynamisches Programm

①	②	③	④
$h = \max(h_1 + 1, h_2)$	$h = h_1 + h_2 + 1$	$h = \max(h_1, h_2 + 1)$	$h = h_1 + h_2 + 1$
$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1, w_2 + 1)$	$w = w_1 + w_2 + 1$	$w = \max(w_1 + 1, w_2)$

## Idee: Dynamisches Programm

- Für ein Blatt gilt:  $h = w = 0$
- Für innere Knoten berechne  $(w, h)$  für jede Kombination
- Entferne dominierte Paare  $((w, h) \text{ dom. } (w', h') \Leftrightarrow w \leq w' \wedge h \leq h')$

Beispiel:  $(w_1, h_1) = (4, 1)$  und  $(w_2, h_2) = (2, 2)$

①	②	③	④
$(w, h) = (7, 2)$	$(w, h) = (4, 4)$	$(w, h) = (7, 3)$	$(w, h) = (5, 4)$

Können mehr als zwei Kombinationen übrig bleiben?

Wie geht man im nächsten Schritt vor, wenn beide Kinder mehrere Paare anbieten?

# HV-Layouts – Paretomenge

$G_1$  und  $G_2$  haben nicht jeweils ein optimales Paar  $(w_1, h_1)$  bzw.  $(w_2, h_2)$  sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren  $P_1$  und  $P_2$  (*Paretomengen*).

# HV-Layouts – Paretomenge

$G_1$  und  $G_2$  haben nicht jeweils ein optimales Paar  $(w_1, h_1)$  bzw.  $(w_2, h_2)$  sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren  $P_1$  und  $P_2$  (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge  $P$  von  $G$

# HV-Layouts – Paretomenge

$G_1$  und  $G_2$  haben nicht jeweils ein optimales Paar  $(w_1, h_1)$  bzw.  $(w_2, h_2)$  sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren  $P_1$  und  $P_2$  (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge  $P$  von  $G$

- Für jedes Paar  $(w_1, h_1) \in P_1$  wähle jedes Paar  $(w_2, h_2) \in P_2$  und berechne  $(w, h)$  für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

# HV-Layouts – Paretomenge

$G_1$  und  $G_2$  haben nicht jeweils ein optimales Paar  $(w_1, h_1)$  bzw.  $(w_2, h_2)$  sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren  $P_1$  und  $P_2$  (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge  $P$  von  $G$

- Für jedes Paar  $(w_1, h_1) \in P_1$  wähle jedes Paar  $(w_2, h_2) \in P_2$  und berechne  $(w, h)$  für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

Offensichtlich erhält man die korrekte Paretomenge  $P$

# HV-Layouts – Paretomenge

$G_1$  und  $G_2$  haben nicht jeweils ein optimales Paar  $(w_1, h_1)$  bzw.  $(w_2, h_2)$  sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren  $P_1$  und  $P_2$  (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge  $P$  von  $G$

- Für jedes Paar  $(w_1, h_1) \in P_1$  wähle jedes Paar  $(w_2, h_2) \in P_2$  und berechne  $(w, h)$  für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

Offensichtlich erhält man die korrekte Paretomenge  $P$

Wie groß kann  $P$  werden?

# HV-Layouts – Paretomenge

$G_1$  und  $G_2$  haben nicht jeweils ein optimales Paar  $(w_1, h_1)$  bzw.  $(w_2, h_2)$  sondern eine Menge von sich nicht dominierenden Paaren  $P_1$  und  $P_2$  (*Paretomengen*).

Ziel: Berechne die Paretomenge  $P$  von  $G$

- Für jedes Paar  $(w_1, h_1) \in P_1$  wähle jedes Paar  $(w_2, h_2) \in P_2$  und berechne  $(w, h)$  für jede der vier Kombinationen.
- Entferne alle dominierten Paare.

Offensichtlich erhält man die korrekte Paretomenge  $P$

Wie groß kann  $P$  werden?

## Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit  $n$  Knoten enthält maximal  $n$  Paare.

## Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit  $n$  Knoten enthält maximal  $n$  Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar  $(w, h) \in P$  gilt  $w \in \{0, \dots, n - 1\}$

## Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit  $n$  Knoten enthält maximal  $n$  Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar  $(w, h) \in P$  gilt  $w \in \{0, \dots, n - 1\}$
- Für zwei Paare  $(w, h)$  und  $(w', h')$  gilt  $w \neq w'$ , andernfalls dominiert  $(w, h)$  das Paar  $(w', h')$  oder umgekehrt

## Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit  $n$  Knoten enthält maximal  $n$  Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar  $(w, h) \in P$  gilt  $w \in \{0, \dots, n - 1\}$
- Für zwei Paare  $(w, h)$  und  $(w', h')$  gilt  $w \neq w'$ , andernfalls dominiert  $(w, h)$  das Paar  $(w', h')$  oder umgekehrt
- $\Rightarrow$  Die Paretomenge enthält maximal  $n$  Paare

□

## Lemma

Die Paretomenge eines Baums mit  $n$  Knoten enthält maximal  $n$  Paare.

Beweis:

- Für jedes Paar  $(w, h) \in P$  gilt  $w \in \{0, \dots, n - 1\}$
- Für zwei Paare  $(w, h)$  und  $(w', h')$  gilt  $w \neq w'$ , andernfalls dominiert  $(w, h)$  das Paar  $(w', h')$  oder umgekehrt
- $\Rightarrow$  Die Paretomenge enthält maximal  $n$  Paare

□

Damit benötigen wir  $\mathcal{O}(n^2)$  Zeit pro Schritt also insgesamt  $\mathcal{O}(n^3)$

Geht es schneller?

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$				
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_2 \backslash P_1$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}</math></del>	$\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}</math></del>
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}</math></del>

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$				
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①

$$w = w_1 + w_2 + 1$$

$$h = \max(h_1 + 1, h_2)$$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①  
 $w = w_1 + w_2 + 1$   
 $h = \max(h_1 + 1, h_2)$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$						

An arrow points from the text  $h = \max(h_1 + 1, h_2)$  to the first row of the table.

restliche Zeile wird dominiert nach Eintrag mit  $h_1 + 1 \leq h_2$

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①  
 $w = w_1 + w_2 + 1$   
 $h = \max(h_1 + 1, h_2)$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>			
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>			

restliche Spalten werden dominiert bis Eintrag mit  $h_1 + 1 \leq h_2$

restliche Zeile wird dominiert nach Eintrag mit  $h_1 + 1 \leq h_2$

# HV-Layouts – Beispiel (Paretomenge)

Idee: Sortiere die Mengen

①  
 $w = w_1 + w_2 + 1$   
 $h = \max(h_1 + 1, h_2)$

$P_1 \backslash P_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}</math></del>
$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$	<del><math>\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}</math></del>	<del><math>\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}</math></del>	$\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix}$

restliche Spalten werden dominiert bis Eintrag mit  $h_1 + 1 \leq h_2$

restliche Zeile wird dominiert nach Eintrag mit  $h_1 + 1 \leq h_2$

# HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge  $P$  aus den beiden Paretomengen der Kinder  $P_1$  und  $P_2$  zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere  $P_1$  und  $P_2$  aufsteigend nach der Breite

# HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge  $P$  aus den beiden Paretomengen der Kinder  $P_1$  und  $P_2$  zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere  $P_1$  und  $P_2$  aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über  $P_1$  bis  $h_1 + 1 \leq h_2$  (einschließlich)

# HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge  $P$  aus den beiden Paretomengen der Kinder  $P_1$  und  $P_2$  zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere  $P_1$  und  $P_2$  aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über  $P_1$  bis  $h_1 + 1 \leq h_2$  (einschließlich)
- Nimm nächstes Paar aus  $P_2$  und starte Iteration über  $P_1$  bei aktuellem Element in  $P_1$  (einschließlich)

# HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge  $P$  aus den beiden Paretomengen der Kinder  $P_1$  und  $P_2$  zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere  $P_1$  und  $P_2$  aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über  $P_1$  bis  $h_1 + 1 \leq h_2$  (einschließlich)
- Nimm nächstes Paar aus  $P_2$  und starte Iteration über  $P_1$  bei aktuellem Element in  $P_1$  (einschließlich)

⇒ Laufzeit  $\mathcal{O}(|P_1| + |P_2|) \in \mathcal{O}(n)$

# HV-Layouts – Quadratische Laufzeit

Um die Paretomenge  $P$  aus den beiden Paretomengen der Kinder  $P_1$  und  $P_2$  zu berechnen, führe folgende Schritte aus:

①

- Sortiere  $P_1$  und  $P_2$  aufsteigend nach der Breite
- Iteriere über  $P_1$  bis  $h_1 + 1 \leq h_2$  (einschließlich)
- Nimm nächstes Paar aus  $P_2$  und starte Iteration über  $P_1$  bei aktuellem Element in  $P_1$  (einschließlich)

⇒ Laufzeit  $\mathcal{O}(|P_1| + |P_2|) \in \mathcal{O}(n)$

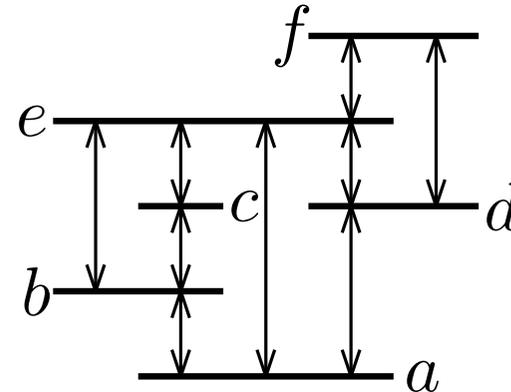
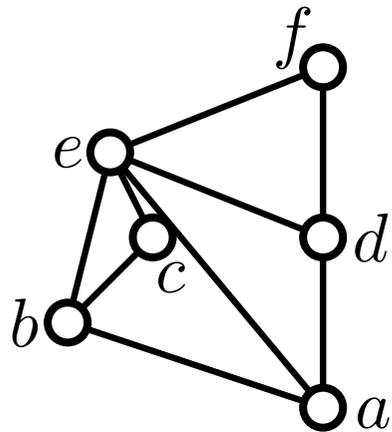
⇒ Gesamtlaufzeit  $\mathcal{O}(n^2)$

# Aufgabe 3 – Außenplanar / Serienparallel

Ein Graph  $G$  heißt außenplanar, wenn er eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt, in der alle Knoten an der äußeren Facette liegen. Zeigen Sie, dass jeder zweifach zusammenhängende außenplanare Graph serienparallel ist.

# Aufgabe 4 – Sichtbarkeitsrepräsentation

Zeigen Sie, dass jeder serienparallele Graph eine Sichtbarkeitsrepräsentation hat.



# Aufgabe 5 – Ohrendekomposition

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph der für jede Kante  $\{s, t\} \in E$  eine offene Ohrendekomposition besitzt die mit  $\{s, t\}$  beginnt. Zeigen Sie, dass  $G$  zweifach zusammenhängend ist. (In der Vorlesung wurde die umgekehrte Richtung gezeigt.)

# Aufgabe 6 – s-t-Ordnungen

Sei  $s = v_1, \dots, v_n = t$  eine s-t-Ordnung eines planaren Graphen  $G$ , der so eingebettet ist, dass die Kante  $\{s, t\}$  auf der äußeren Facette liegt. Zeigen Sie, dass  $v_i$  in der äußeren Facette des von  $v_1, \dots, v_{i-1}$  induzierten Graphen liegt.

# Letzte Übung

Letzte Übung am 2. oder am 9. Februar?