Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 17. November 2011
Abgabe: Keine, Besprechung am 1. Dezember 2011

1 Eigenschaften von s-t-Graphen

Sei $D = (V, A)$ ein planarer s-t-Graph mit gegebener Einbettung. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) D ist bimodal.
(b) Der Rand jeder Facette f besteht aus zwei gerichteten Pfaden von start(f) zu ziel(f).
(c) Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es einen einfachen, gerichteten s-t-Pfad, der v enthält.

2 Duales zu s-t-Graphen

Sei D ein planar eingebetteter s-t-Graph. Für eine gerichtete Kante $e = (u, v)$ bezeichne $\ell(e)$ die Facette links von e und $r(e)$ die Facette rechts von e. OBdA ist D so eingebettet, dass $r(s,t)$ die äußere Facette ist. Der gerichtete Dualgraph $D^\star = (V^\star, A^\star)$ von D ist wie folgt definiert:

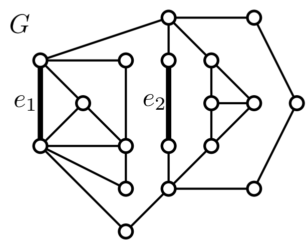
- $V^\star$ ist die Menge der Facetten von D, wobei $s^\star = r(s,t)$ und $t^\star = \ell(s,t)$.
- $A^\star = \{(\ell(e), r(e)) \mid e \in A \setminus \{(s,t)\}\} \cup \{(s^\star, t^\star)\}$

(a) Zeigen Sie, dass $D^\star$ ein planarer s-t-Graph ist.
(b) Zeigen Sie, dass für zwei Facetten f und g von D genau eine der folgenden Eigenschaften zutrifft:
   i) D hat einen gerichteten Pfad von ziel(f) nach start(g)
   ii) D hat einen gerichteten Pfad von ziel(g) nach start(f)
   iii) $D^\star$ hat einen gerichteten Pfad von f nach g
   iv) $D^\star$ hat einen gerichteten Pfad von g nach f

Hinweis: Betrachten Sie eine topologische Nummerierung $\sigma : V \to \mathbb{N}$ der Knoten von D, so dass für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt $\sigma(u) < \sigma(v)$.

3 SPQR-Bäume

Wie viele planare Einbettung hat der nebenstehende Graph mit ...
(a) ... e_1 auf der äußeren Facette?
(b) ... e_2 auf der äußeren Facette?
(c) ... e_1 und e_2 auf der äußeren Facette?



4 Matchings in serien-parallele Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ ist *serien-parallel* wenn sein SPQR-Baum keine R-Knoten enthält. Ein *Matching* ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ sodass jeder Knoten zu maximal einer Kante in M inzident ist.

Finden Sie einen Algorithmus mit linearer Laufzeit der ein maximales Matching (ein Matching mit möglichst vielen Kanten) für serien-parallele Graphen berechnet.

5 Feedback Arc Set in planaren Graph

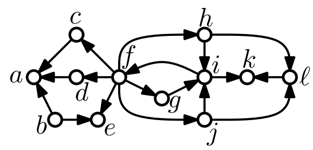
Zeigen Sie, dass man in planaren Graphen ein FAS minimaler Größe in Polynomialzeit berechnen kann. Verwenden Sie hierzu, dass man einen minimalen Dijoin in einem gerichteten Graphen in Polynomialzeit berechnen kann.

Ein Dijoin in einem gerichteten Graphen $G = (V, A)$ ist eine Menge von Kanten $A' \subseteq A$, so dass der Graph G', der aus G durch Hinzunahme der inversen Kanten von A' stark zusammenhängend ist, d.h. dass man von jedem Knoten auf einem gerichteten Weg zu jedem anderen Knoten gelangen kann.

Hinweis: Betrachten Sie den Dualgraph von G.

6 Lagenlayout[1]

Führen Sie den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zur Generierung von Lagenlayouts schrittweise für den nebenstehenden Graphen aus. Entfernen Sie dazu gerichtete Kreise indem Sie für eine möglichst kleine Menge von an Kanten die Richtung umkehren, finden Sie eine Lagenzuordnung minimaler Höhe bei maximaler Breite 4 und ordnen sie die Knoten innerhalb der Lagen so an, dass die Anzahl an Kreuzungen minimal ist.



[1]Falls der Algorithmus für Lagenlayouts am 23. November in der Vorlesung noch nicht komplett besprochen wurde, wird diese Aufgabe erst in der vierten Übung besprochen.