Erstes Übungsblatt

Ausgabe: 20. Oktober 2011
Abgabe: Keine, Besprechung am 3. November 2011

1 Potential zu Kräften

(a) Geben Sie Kräfte für ein kräftebasiertes Layoutverfahren an, die geeignet sind um

(i) einen Knoten in der Nähe einer vorgegebenen Position zu halten,
(ii) einen Knoten in der Nähe der x-Achse zu platzieren,
(iii) eine Kante parallel zur y-Achse auszurichten.

(b) Für einen Knoten u mit Position $p_u = (x_u, y_u)$ sei die Verschiebungsrichtung in einem kräftebasierten Layoutverfahren definiert durch $\text{disp} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\text{disp}(p_u) = \sum_{\{u,v\}\in E} \frac{||p_v - p_u||^2}{d_{uv}}(p_v - p_u) - \sum_{v\in V} \frac{C}{||p_v - p_u||^2}(p_v - p_u).$$

Dabei sind $C \in \mathbb{R}$ und $d_{uv} \in \mathbb{R}$ (für alle Kanten $\{u, v\} \in E$) Konstanten. Bestimmen Sie eine Potentialfunktion $\text{pot} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $\text{disp}(p_u) = -\nabla\text{pot}(p_u)$, d.h. der Verschiebevektor für den Knoten u soll gleich dem negativen Gradienten der Potentialfunktion sein.

2 Stabilität im Springembedder

(a) Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d\}$ und $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$. Geben Sie eine stabile Ausgabe des Springembedder-Algorithmus nach Fruchterman und Reingold an. Geben Sie eine Zeichnung vor, die nicht stabil ist, und zeichnen Sie die Richtungen der Kräfte ein.

(b) Überlegen Sie sich einen Graphen, der im Springembedder-Algorithmus in mindestens zwei unterschiedlichen stabilen Lösungen enden kann. Geben Sie zwei solche Lösungen an.

bitte umblättern

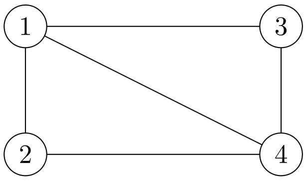
3 Der Matrix-Gerüst-Satz

(a) Betrachten Sie den Graphen G aus dem Handout zum Matrix-Gerüst-Satz. Berechnen Sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes die Anzahl $t(G)$ der Spannbäume von G.
Tipp: *Die Determinante einer* 3×3*-Matrix kann man leicht nach der* Regel von Sarrus *berechnen:*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

(b) Geben Sie alle Spannbäume von G an. Geben Sie dabei im Kontext des Beweises des Matrix-Gerüst-Satzes an, zu welcher Kantenkontraktion bzw. Kantenentfernung die einzelnen Bäume korrespondieren.

(c) Betrachten Sie den folgenden Graphen H:



Geben Sie zu H die Laplacematrix an und berechnen sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes $L(H)^{2,2}$, und dann mit der Regel von Sarrus $t(H)$.
Gehen Sie nun schrittweise vor um zu dem selben Ergebnis zu gelangen (siehe Beweis von 3.3 oder Handout): Betrachten Sie dazu die Bedeutung von $t(H) = t(H/\{2,4\}) + t(H - \{2,4\})$ sowohl in Form der Matrixschreibweise als auch in Form der entsprechenden Graphen.

4 Eigenwerte hoch i

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zusammenhängender Graph und A die zugehörige Adjazenzmatrix definiert durch:

$$A[u,v] := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \{u,v\} \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Sei λ_i mit $1 \leq i \leq n$ die Eigenwerte von A. Geben Sie eine ‘anschauliche’ Interpretation oder Formel für $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j$ an, für $j = 0, 1, 2, 3$. Tipp: *Folgt der heißen Spur!*

5 Jonglieren mit Eigenwerten der Laplacematrix

Sei G ein beliebiger ungerichteter, ungewichteter und einfacher Graph und L die zugehörige Laplace Matrix.

(a) Zeigen Sie, die Vielfachheit des Eigenwert 0 von L ist genau die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

(b) Finden Sie eine Graphklasse mit den Eigenwerten 0 und n mit Vielfachheiten 1 bzw. $n - 1$.