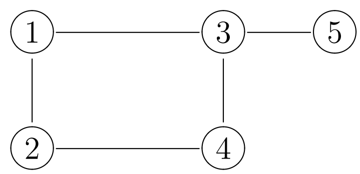
Beispiel zum Matrix-Gerüst-Satz

Ein Beispielgraph $G = (V, E)$ ist gegeben durch



mit der zugehörigen Laplace-Matrix

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

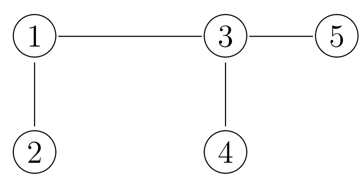
Wir betrachten die Determinante von $L(G)^{2\,2}$:

$$\det(L(G)^{2\,2}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Es ist zu beachten, dass $L(G)^{2\,2}$ keine Laplace-Matrix eines Teilgraphens von G ist. Da der Knoten 2 nicht isoliert ist, hat er einen Nachbarn (im Skript mit u bezeichnet), welcher wir für die Entwicklung der Matrix nutzen wollen. Wir wählen hier im Beispiel den Knoten 4.

$$
\begin{aligned}
\det(L(G)^{2\,2}) \quad = \quad & (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& +(-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& +(-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
& +(-1)^{3+4} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Betrachten wir nun den Graphen $G'' := G - \{2,4\}$, der durch Löschen der Kante $\{2,4\}$ entsteht:



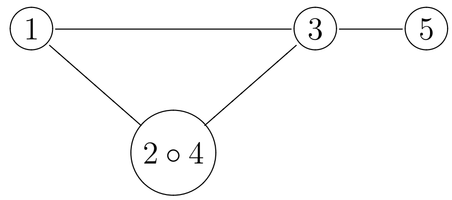
mit der zugehörigen Laplace-Matrix

$$
L(G'') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .
$$

Vergleicht man nun $L(G)^{2\,2}$ und $L(G'')^{2\,2}$ so stellt man fest, dass nur der Eintrag an der Stelle $4,4$ sich um 1 unterscheidet. Dies bedeutet, dass sich die zwei Entwicklungen nur im Summanden zum Eintrag $4,4$ unterscheiden und dies auch nur im Koeffizienten. Genauer gesagt, gilt:

$$
\det(L(G)^{2\,2}) = \det(L(G'')^{2\,2}) + \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .
$$

Dieser Summand läßt sich nun entsprechend deuten. Dazu betrachten wir den Graph $G' := G/\{2,4\}$, in dem die zwei Endknoten 2 und 4 sowie die Kante $\{2,4\}$ zu einem neuen Knoten $2 \circ 4$ verschmolzen werden:



mit der zugehörigen Laplace-Matrix

$$L(G') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Jetzt betrachten wir die Matrix, die durch Streichen der Zeile und der Spalte, die zu $2 \circ 4$ gehören, und stellen fest, dass deren Determinate genau der zusätzliche Summand von oben ist.